BIBLIOTHECAE
ELECTORALIS
MONACENSIS.
Ch. Wink. del.
Söckler sc. 1779.

<3661
<366
Bay

<36611696700015

Bayer. Staatsbibliothek
<36611696700015

Math Un 88-8

Mathesi. Systemata & methodi:
131.

R-

Lehrbegrif
der geſamten
Mathemati

Aufgeſetzt
von
...ereſl. Joh. Guſtav K...
...Schwerinſchen Hofrath, der ...
...ntliche Profeſſor zu Bützow, der ...
...Wiſſenſchaften zu München, der ...
...Wiſſenſchaften zu Harlem, und de...
...ſchaft der Wiſſenſchaften zu Copen...

Der 5...

Die...

...uckt und verleg...

Lehrbegrif
der geſamten
Mathematik.

Aufgeſetzt
von

Wencesl. Joh. Guſtav Karſten,
Herzogl. Mecklenb. Schwerinſchen Hofrath, der Phil. Doct. der Mathem. und Naturlehre Profeſſor zu Bützow, der Churfl. Bayerſchen Akademie der Wiſſenſchaften zu München, der Holländiſchen Geſellſchaft der Wiſſenſchaften zu Harlem, und der Königl. Däniſchen Geſellſchaft der Wiſſenſchaften zu Copenhagen Mitglied.

Der Achte Theil.

Die Photometrie.

Greifswald,
gedruckt und verlegt von Anton Ferdin. Röſe. 1777.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Der

dem allergnädigſten Schutz

Königl. Majeſt

Preuſſe

blühenden

mie der Wiſſe

in

Berlin

Der

unter dem allergnädigſten Schutz

Sr. Königl. Majeſtät

in Preuſſen

blühenden

Akademie der Wiſſenſchaften

in

Berlin

widmet

dieſen achten Theil

ſeines

Lehrbegrifs der Mathematik

als ein Zeugniß

ſeiner gröſten Verehrung

und

vollkommenſten Hochachtung

der Verfaſſer.

Vorrede.

Obgleich die Vorausſetzung, daß von jedem Theilchen eines für ſich leuchtenden oder auch anderswoher erleuchteten ſichtbaren Körpers das Licht ſich nach allen Seiten in Gradlinichten Richtungen ausbreite, von allen optiſchen Schriftſtellern angenommen wird; ſo muß man doch unterſcheiden, wie weit ſelbige bloß **optiſch**, und wie weit eben dieſe Vorausſetzung **photometriſch** iſt. Wer dieſen Satz, wie er eben ausgedrückt iſt, zugiebt, könnte

doch noch wohl zweifeln, ob ſich in gleichen coniſchen oder pyramiden=förmigen Räumen, in deren Spitze das für ſich leuchtende, oder mit fremden Licht glänzende Element befindlich iſt, gleichviele Lichtmaſſe ſo gleichförmig ausbreite, daß auf gleiche Stücke einer das Element als einen Mittelpunct umgebenden Kugelfläche auch allemahl gleichviel Licht falle. Was ſonſt in der Optik ein **Licht=ſtrahl** heißt, das kann in der Photometrie nicht mehr als eine geometriſche Linie betrachtet werden. Soll dieſer Nahme alles Licht bezeichnen, was von dem leuchtenden Element nach einerley gradlinichten Richtung ausgehet, und iſt es erlaubt, das Licht ſelbſt als eine zarte Maſſe zu betrachten; ſo könnten wohl zwey nach verſchiedenen Richtungen ausgehende Strahlen ungleichviele Lichtmaſſe ſolchen Ebenen zuführen, wovon jede einen dieſer Strahlen, auch wenn man will in gleicher Entfernung vom leuchtenden Element, ſenkrecht auffienge. Ferner könnten die nach

allen

allen Seiten ausgehenden Strahlen, auch wohl ungleichförmig vertheilt, durch gleich groſſe coniſche oder pyramidenförmige Räume könnten wohl ungleichviele phyſiſche Lichtſtrahlen verbreitet ſeyn. Wie ſich alſo das von einem leuchtenden Element kommende Licht ausbreite, wie ſich die Strahlenmenge auf Ebenen von gegebener Gröſſe und Lage verhalten, darin iſt nicht alles geometriſch nothwendig: vielmehr iſt es Hypotheſe, daß dieſe Ausbreitung gleichförmig ſey. Der Satz, daß das Licht aus einem leuchtenden Puncte ſich wie das Quadrat der Entfernung verbreite, ſteht freylich in allen Optiken im Anfang: aber eine recht deutliche Aufklärung und richtige Anwendungen dieſes Satzes habe ich noch bey den meiſten optiſchen Schriftſtellern vermiſſet. Selbſt richtig verſtanden und angewandt, erſchöpft dieſer Satz das noch nicht alles, worauf die Wiſſenſchaft gebauet werden muß, die Herr **Lambert** unter dem Nahmen der Photometrie ſo vollſtändig bearbeitet hat.

Die beyden vornehmſten Schriftſteller in einer ſonſt noch wenig oder gar nicht bearbeiteten Wiſſenſchaft, Herrn **Bouguer** und Herrn **Lambert** ſorgfältig zu leſen und mit einander zu vergleichen, würde ich für Pflicht gehalten haben, als ich ſelbſt etwas über die Photometrie aufſetzen wollte, wenn ich nicht ohnehin ſchon beide Werke und beſonders das Lambertſche für mich ſehr lehrreich gefunden hätte. Neuere Bemühungen in dieſer Wiſſenſchaft ſind mir nicht bekannt. Im Jahr 1766. hat Hr. **Hennert** angefangen, ſeinen etwas ausführlichen Lehrbegrif der Mathematik herauszugeben, wovon die erſten drey Theile die reine Mathematik enthalten. Im Jahr 1768 erſchien der erſte Theil ſeines Curſus Matheſeos Applicatae und im Jahr 1770 Curſus Matheſeos Applicatae Pars III, der die fünf optiſchen Wiſſenſchaften, die Optik, Perſpectiv, Catoptrik, Dioptrik, und Photometrie, oder Phaometrie, wie ſie Herr Hennert nennt, in der hier genannten Ord=

Ordnung abhandelt. Zehn Jahr nach der Bekanntmachung eines ſo wichtigen Werks, als Hr. Lamberts Photometrie in einer ganz neuen Wiſſenſchaft iſt, hätte man wohl erwarten mögen, daß deſſelben einige Erwähnung geſchehen wäre: allein Herr **Hennert** erwähnt deſſelben nicht, ſondern allein der Schrift des H. **Bouguer**, woraus er unter dem Nahmen der Phaometrie etwas ſehr weniges mittheilet. Das Original von H. **Prieſtleys Geſchichte der Optik** iſt im Jahr 1772 zu London herausgekommen, und gleichwohl hat H. **Prieſtley** von der Lambertſchen Photometrie keine Nachricht gegeben, weil er ſie nicht hat erhalten können? Werke die in lateiniſcher Sprache geſchrieben ſind, pflegen doch ſonſt wohl von den deutſchen Buchhandlungen auch an auswärtige zu gelangen. Einige auf der 42 S. dieſes Buchs angeführte kleine Schriften, worin nur von einem photometriſchen Elementar-Problem die Rede iſt, erregten aus mehr als einer Ur-

ſache, und vornemlich um deßwillen ſehr meine Aufmerkſamkeit, weil eine davon einen Verfaſſer hat, deſſen groſſe Verdienſte um die Mathematik von allen Kennern der Wiſſenſchaft nach Würden geſchätzt werden: aber eben um deßwillen war es auch wider alles mein Erwarten, als ich eine leichte photometriſche Aufgabe ganz anders behandelt fand, als es den Grundbegriffen und Grundſätzen der Wiſſenſchaft gemäß zu ſeyn ſchien, die ich nicht allein in Bouguers und Lamberts, ſondern zum Theil auch in Eulers und ſelbſt eines Kaeſtners Schriften gefunden zu haben glaubte. Ein groſſer und vielleicht der ſchönſte Theil der Lambertſchen Photometrie muſte fallen, und blieb nichts weiter als höchſtens Uebung in der Integralrechnung, ſinnreiche Unterſuchung über Erfolge, die es in der Natur geben könnte, aber nirgends giebt. Ich war im Begrif, ein Buch drucken zu laſſen, wovon ich glaubte, daß ich doch nebſt der Brauchbarkeit der darin enthaltenen Lehren

ren zugleich auf ihre Gewißheit geſehen hätte, und mir fiel natürlich eine Stelle aus der Vorrede zu Hn. d' Alemberts Dynamique ein, die auch Hr. Kaeſtner in der Vorrede zum vierten Theil ſeiner Anfangsgründe anführt: „daß man in der Mechanik manch„mahl nur bemühet geweſen ſey, das Ge„bäude hoch aufzuführen, ohne ſich zu be„kümmern, ob der Grund feſte genug ſey.“ Konnte es nicht vielleicht der Photometrie eben ſo ergangen ſeyn? Wie mich dies veranlaſſet habe, vorläufig etwas über die erſten Gründe dieſer Wiſſenſchaft aufzuſetzen, das habe ich im Buch ſelbſt, auf der 43 u. f. S. erzählt. Ich könnte und ſollte vielleicht hinzuſetzen, daß eine Anzeige davon, die ich in einer gelehrten Zeitung geleſen habe, mich noch mehr habe befremden müſſen, als der mir ungewöhnliche Vortrag der photometriſchen Grundbegriffe, und die Auflöſung eines Elementar-Problems mich befremdet hatte: allein ich kann mich nicht entſchlieſſen, mehr

hievon

hievon zu ſagen, als was ich an den angeführten Stellen im Buch ſelbſt ſchon davon geſagt habe. Alles übrige unterwerfe ich der Prüfung einſichtsvoller Kenner der Wiſſenſchaft, und gebe nur noch eine ganz kurze Rechenſchaft davon, wie ich mich bey Ausarbeitung der Wiſſenſchaft ſelbſt verhalten habe.

Die Photometrie hat ihre ganz eigenthümlichen Gründe, (M. ſ. den 48 §.) alſo bin ich wohl deshalb gerechtfertiget, daß ich ſie als eine von den übrigen Theilen der Optik verſchiedene Wiſſenſchaft beſonders vortrage: wenigſtens geſchicht das mit völlig eben dem Recht, mit welchem man auch die Perſpectiv von der Optik abſondert. Alsdenn aber hat auch die Photometrie vor der Catoptrik und Dioptrik ihre natürliche Stelle, nicht allererſt am Ende aller optiſchen Wiſſenſchaften. Freylich muſte ich nun die allgemeinen Lehren von der Zurückwerfung und Brechung des Lichts hier ſchon mit vortragen, allein das wird niemanden Anſtoß verurſachen, der es

über=

überlegen will, daß die Eintheilung der optiſchen Wiſſenſchaften in Optik, Catoptrik und Dioptrik überhaupt ſehr willkührlich ſey. Ein ſo vollkommener Vorgänger, als Herr Lambert, hatte mir nichts von Erheblichkeit nachzuhohlen übrig gelaſſen, alſo habe ich die Wiſſenſchaft ſelbſt nicht mit ganz neuen Unterſuchungen bereichern können: doch habe ich auch Herrn Lamberts Photometrie nicht bloß abgeſchrieben, oder nur ins Deutſche überſetzt noch einmahl wieder drucken laſſen. Eben um deswillen, weil ich das weder wollte, noch mich dazu berechtiget halten konnte, habe ich weder alle lehrreiche Unterſuchungen des Hn. Lamberts hier mitgetheilt, noch auch ſonſt alle ſeine Vorſtellungsarten beybehalten; ich theile die Wiſſenſchaft ſo mit, wie ich ſonſt Wiſſenſchaften als mathematiſche zu behandeln gewohnt bin. Ich ſuche alles auf die einfachſten Vorſtellungsarten zurück zu führen, und laſſe mich auf keine phyſiſche Theorien vom Licht ein, ſo wie es in der Geometrie

metrie nicht nöthig iſt, daß man ſich auf phy=ſiſche, oder metaphyſiſche Unterſuchungen über die Natur des Raums einlaſſe. Das in ſeiner Art mit dem Lambertiſchen gleich ſchätzbare Werk des Herrn Bouguer habe ich ebenfalls möglichſt genutzet, und dasjenige, was mir am intereſſanteſten ſchien, daraus mitgetheilet: oft habe ich die aus Hn. Bouguers Werk vorgetragenen Lehren als Vor=bereitungen gebraucht, um Herrn Lambert in ſeinen Schlüſſen deſto leichter folgen zu können, ſo wie es Pflicht für mich war, allenthalben bemerklich zu machen, wo Herr Lambert ſeinen Vorgänger übertroffen hatte.

Bützow im März des Jahrs 1777.

Der Verfaſſer.

Inhalt

Inhalt des achten Theils.

Die Photometrie

oder

Theorie von der Ausmeſſung der Stärke des Lichts.

Der I. Abſchnitt. Vorläufige Unterſuchungen über die erſten Gründe der Photometrie.
Der II. Abſchnitt. Die Erleuchtung einer Ebene von einer Lichtflamme, in wie weit letztere als ein Punct betrachtet werden kann.
Der III. Abſchnitt. Theorie der Erleuchtung, wenn das Licht von einer leuchtenden Fläche ausgehet.
Der IV. Abſchnitt. Theorie der Erleuchtung ebener Flächen von leuchtenden Kugeln.
Der V. Abſchnitt. Allgemeinere Theorie der Erleuchtung auch wenn die ſcheinbare Gränze der leuchtenden Fläche nicht zwiſchen einer graden Kugelfläche liegt.
Der VI. Abſchnitt. Anwendung dieſer Theorie auf einige merkwürdige beſondere Fälle.
Der VII. Abſchnitt. Allgemeine Geſetze der Zurückwerfung des Lichts, mit einer kurzen Anwendung auf ebene Spiegelflächen.
Der VIII. Abſchnitt. Die Zurückwerfung des Lichts von ſphäriſchen Spiegeln.
Der IX. Abſchnitt. Allgemeine Geſetze der Brechung des Lichts mit Anwendungen auf ebene brechende Flächen.
Der X. Abſchnitt. Die Strahlenbrechung, wenn das Licht durch ein Prisma fällt.
Der XI. Abſchnitt. Die verſchiedene Brechbarkeit des ungleichartigen und verſchiedene Farben zuwege bringenden Lichts.
Der XII. Abſchnitt. Die Brechung des gleichartigen Lichts in einer Kugelfläche.
Der XIII. Abſchnitt. Die Brechung des gleichartigen Lichts, wenn es durch eine Glaslinſe fällt.
Der XIV. Abſchnitt. Die verſchiedenen Arten der linſenförmigen Gläſer.
Der XV. Abſchnitt. Theorie der Erleuchtung des Bildes linſenförmiger Gläſer und ſphäriſcher Hohlſpiegel.
Der XVI. Abſchnitt. Theorie der Erleuchtung, wenn das Licht vom erhabenen Kugelſpiegel zurück ſtrahlet.
Der XVII. Abſchnitt. Vom Bau des Auges, und dem ſcheinbaren Glanz leuchtender Gegenſtände.

Der

Der XVIII. Abſchnitt. Gründe der Theorie von Ausmeſſung des Lichts, wenn es von unpolirten Flächen zurückſtrahlet.
Der XIX. Abſchnitt. Prüfung der Theorie des Hn. Bouguer vom Licht, das unpolirte Flächen zurück werfen.
Der XX. Abſchnitt. Von der Klarheit für ſich dunkler Körper, die mit entlehntem Licht glänzen.
Der XXI. Abſchnitt. Anwendung dieſer Theorie auf die Ausmeſſung der Klarheit des Monds in ſeinen verſchiedenen Geſtalten.
Der XXII. Abſchnitt. Von einigen Hülfsmitteln, den Glanz leuchtender Körper durch Verſuche zu vergleichen.
Der XXIII. Abſchnitt. Von der ſcheinbaren Klarheit beym undeutlichen Sehen.
Der XXIV. Abſchnitt. Allgemeine Geſetze der Schwächung des Lichts in durchſichtigen Maſſen.
Der XXV. Abſchnitt. Vergleichung des von durchſichtigen Maſſen ſpiegelartig zurückgeworfenen, wie auch des durchſcheinenden und zerſtreueten, mit der Menge des auffallenden Lichts.
Der XXVI. Abſchnitt. Von der Abnahme des Lichts in ungleichförmig durchſichtigen Maſſen, mit Anwendungen auf die Atmoſphäre.
Der XXVII. Abſchnitt. Fortſetzung dieſer Unterſuchung nach Hn. Lambert.
Der XXVIII. Abſchnitt. Von der Klarheit der Atmoſphäre, und der Erleuchtung die das Tageslicht verurſacht.

Die

Die Photometrie,

oder

Theorie von der Ausmeſſung der Stärke des Lichts.

Der I. Abſchnitt.

Vorläufige Unterſuchungen über die erſten Gründe der Photometrie.

1. §.

Das Licht geht von jedem ſtrahlenden Punct L nach allen Seiten in graden Lienien aus, 1 F. (5. 6. §. Opt.) und wenn derſelbe für ſich leuchtend iſt, ſo ſchreibt man ihm einen gewiſſen Glanz zu. Fällt überdem ein Theil des Lichts, welches L nach allen Seiten umher ſtrahlet, auf eine ebene, oder wie man ſonſt will geſtaltete Fläche; ſo ſagt man, der Punct L erleuchte die Fläche, welche das Licht auffängt. Ob es nun gleich in den übrigen optiſchen Wiſſenſchaften, wenn allein der Weg des Lichts betrachtet wird, genügen kann, daß man ſich die Lichtſtrahlen als grade Linien vorſtelle; ſo ſind ſie doch würklich nicht blos geometriſche Linien. Dergleichen grade Linien, die ſich von L aus nach allen Seiten er-

ſtrecken, ſtellen nur die Richtung des Lichts vor, nach der es entweder von dem leuchtenden Punct würklich ausgehet, oder nach welcher es wenigſtens ſeine Würkung äuſſert, es gehe übrigens damit zu, wie es wolle. Das Licht ſelbſt, oder was auch ſonſt die Erſcheinungen verurſacht, die wir dem Licht zuſchreiben, iſt eine zarte Maſſe, jeder phyſiſche Lichtſtrahl beſtehet aus einer ſolchen Maſſe, die wie jede andere Maſſe in der Natur eine gewiſſe Dichtigkeit hat, und man kann ſich die Sache ſo vorſtellen, als wenn dieſe Lichtmaſſe von dem leuchtenden Punct nach allen Seiten in gradlinichten Richtungen ausflöſſe, geſetzt daß es auch würklich damit eine andre Bewandniß hätte. Alles Licht, was ſolchergeſtalt von L nach einer und eben derſelben graden Linie ausfließt, heiſt hier ein phyſiſcher Lichtſtrahl.

1 Fig. Um den leuchtenden Punct L als um einen Mittelpunct, ſtelle man ſich eine Kugelfläche ABEF vor, ſo treffen alle von L ausgehende Strahlen dieſe Kugelfläche ſenkrecht. Wie nun dieſe Strahlen nicht blos geometriſche Linien ſind, ſo kann man bey den fernern Unterſuchungen über die Art und Weiſe, wie ſich das Licht nach allen Seiten vertheilt, auch L nicht als einen geometriſchen Punct betrachten: vielmehr muß man ſich L als einen phyſiſchen Punct vorſtellen, der eine wiewohl unendlich kleine Ausdehnung hat. Dabey iſt es nicht ganz gleichgültig, ob man ſich in L einen unendlich kleinen Körper, wie etwa ein körperliches Element einer Lichtflamme wäre, oder eine unendlich kleine glänzende, übrigens aber undurchſichtige Ebene, vorſtellen will. Allemahl muß man annehmen, jeder

der phyſiſche Lichtſtrahl erſtrecke ſich durch einen gradlinichten priſmatiſchen oder cylindriſchen Raum $LlqQ$, $LlsS$, deſſen Querſchnitte, die man auf ſeiner Länge ſenkrecht annimmt, unendlich kleine Flächen, nicht blos geometriſche Puncte ſind.

2. §.

Wenn man L als einen unendlich kleinen Körper betrachtet, ſo iſt es gleichgültig, unter welcher Figur man ſich denſelben vorſtellen will. Wäre es eine unendlich kleine leuchtende Kugel, ſo würden alle davon ausgehende phyſiſche Lichtſtrahlen in ſo fern einen gleichen unendlich kleinen Raum einnehmen, in wie fern die ſenkrechten Querſchnitte aller Strahlen gleich groß ſeyn würden. Verbindet man mit dieſer Vorausſetzung noch die folgende, daß alle Strahlen aus einer Lichtmaſſe von durchgängig gleicher Dichtigkeit beſtehen, ſo folgt daraus, daß auf alle Stellen, A, B, E, F, wo ein phyſiſcher Lichtſtrahl die um L angenommene Kugelfläche trift, gleichviel Licht falle. Wofern endlich die phyſiſchen Lichtſtrahlen um L auch ſo gleichförimg vertheilt ſind, daß auf gleichgroße Stücke der Kugelfläche gleichviele Lichtſtrahlen fallen, die vermöge der zweyten Vorausſetzung alle einerley für ſich eigene Dichtigkeit haben; ſo iſt über gleiche Stücke dieſer Kugelfläche gleichviele Lichtmaſſe verbreitet, und die ganze Kugelfläche iſt gleichförmig erleuchtet. Ich werde im folgenden alle drey Vorausſetzungen annehmen, wenn ich von L als einem nach allen Seiten umher leuchtenden phyſiſchen Punct rede.

Wenn dagegen L*l* eine unendlich kleine leuchtende Ebene iſt, ſo fällt die erſte von den dreyen erwähnten Vorausſetzungen weg. Zwar muß man ſich wiederum alles Licht, was von L*l* nach einerley gradlinichten Richtung ausgehet, wie L*lq*Q, L*ls*S, als einen phyſiſchen Lichtſtrahl vorſtellen, nun aber ſind nicht mehr die ſenkrechten Querſchnitte aller von L*l* ausgehenden Strahlen gleich groß: vielmehr werden dieſe Querſchnitte deſto kleiner, je kleiner der Winkel *l*LS wird, unter welchem der Strahl gegen die leuchtende Ebene geneigt iſt, den ich im folgenden den Ausflußwinkel nennen werde. Man ſtelle ſich die unendlich kleine Ebene L*l* nach allen Seiten erweitert vor, ſo wird dadurch jede um L als den Mittelpunct beſchriebene Kugelfläche in zwo Halbkugelflächen, wie OQW, OGW, getheilt. Iſt nun die unendlich kleine Ebene L*l* undurchſichtig, und nur auf einer Seite gegen die Halbkugelfläche OQW leuchtend, wie wenn es ein Element der Oberfläche eines für ſich leuchtenden dabey aber undurchſichtigen Körpers wäre; ſo kann das von L*l* ausgehende Licht ſich nur in dem Raum der Halbkugel OQW ausbreiten. Soll nun die zweyte der vorhin angenommenen Vorausſetzungen ſtehen bleiben, daß alle Strahlen die L*l* ausſendet, aus einer Lichtmaſſe von durchgängig gleicher Dichtigkeit beſtehen, ſo kann nicht auf alle Stellen O, K, Q, S, wo dieſe Strahlen die um L angenommene Kugelfläche treffen, gleichviel Licht fallen: und wenn die dritte Vorausſetzung von der gleichförmigen Vertheilung der Strahlen nach allen Seiten damit verbunden wird, ſo erhellet, daß nicht mehr über gleiche Stücke

der

der erwehnten Kugelfläche gleichveile Lichtmaſſe vertheilt bleibe, daß mithin die Halbkugelfläche OQW nicht gleichförmig erleuchtet ſey.

Ob dieſe Vorſtellungen insgeſammt oder zum Theil mit dem, was in der Natur vorgeht, übereinſtimmen, das läßt ſich nicht ſogleich ausmachen: es muß zuforderſt unterſuchet werden, was daraus folge, wenn man folgende zwey Vorausſetzungen als Grundſätze der Photometrie annimmt:

1) Das Licht breitet ſich von jedem leuchtenden Element in gradlinichten phyſiſchen Strahlen nach allen Seiten in ſo weit gleichförmig aus, daß auf gleiche Stücke einer das Element umgebenden Kugelfläche, ſo weit die Strahlen leztere treffen können, gleichviele Lichtſtrahlen fallen.

2) Alle phyſiſche Lichtſtrahlen, welche einerley leuchtendes Element nach allen Seiten gleichförmig ausſendet, beſtehen aus einer Lichtmaſſe von durchgängig gleicher Dichtigkeit, und dieſe den Strahlen eigene Dichtigkeit bleibt ohne merkliche Aenderung dieſelbe, wie groß auch die Entfernung von dem leuchtenden Element angenommen wird, in welcher man die Strahlen auffängt.

3. §.

Auf jedes Stück der Kugelfläche wie AB fallen ſo viele von allen das Element, oder den phyſiſchen Punct L umgebenden Lichtſtrahlen, als in dem Raum der pyramiden- oder kegelförmigen Spitze ALB enthalten ſind, ſo wie die ganze Kugelfläche die geſammte Menge aller den Punct L umgeben-

den Lichtſtrahlen auffängt. Man kann ſich vorſtellen, daß die ganze Kugelfläche in gleiche und ähnliche Elemente getheilt ſey, über jedes dieſer Elemente kann man ſich eine Pyramide vorſtellen, deren Spitze in L liegt: alsdenn ſind die innern Räume der in L zuſammen laufenden Ecken oder Spitzen alle gleich groß, und die Summe aller der Spitzen, welche die Ecke oder Spitze ALB ausmachen, iſt in der Summe aller den Punct L umgebenden Spitzen ſo vielmahl enthalten, als die Summe der Elemente der Kugelfläche, welche das Stück AB ausmachen, in der Summe aller Elemente der ganzen Kugelfläche; oder mit andern Worten: die körperliche Ecke oder Spitze ALB verhält ſich zur Summe aller Ecken, die den Punct L von allen Seiten umgeben können, wie das Stück der Kugelfläche AB zwiſchen den Seitenflächen der Ecke ALB, (oder zwiſchen der die Spitze L umgebenden coniſchen Fläche, wenn dieſe Spitze Kegelförmig iſt) zur ganzen Kugelfläche.

Durch gleiche pyramiden- oder Kegelförmige Räume dieſer Art, verbreiten ſich gleichviele von den Lichtſtrahlen, die L nach allen Seiten umher ausſendet, und gleiche Stücke der Kugelfläche fangen gleichviele Strahlen ſenkrecht auf (2. §.). Dieſemnach verhält ſich die Menge der Strahlen, welche AB auffängt, zur Menge aller von L ausgehenden Lichtſtrahlen, wie das Stück AB der Kugelfläche zur ganzen Kugelfläche.

Wenn alſo EF ein anderes Stück derſelben Kugelfläche iſt, ſo verhält ſich die Strahlenmenge, welche AB auffängt, zu derjenigen, die EF auffängt,

ſingt, wie AB zu EF, und eben dieſe Stücke der Kugelfläche verhalten ſich, wie die dazu gehörigen körperlichen Ecken oder Spitzen ALB ELF am Mittelpunct der Kugel.

4. §.

Um die Ausdrücke deſto mehr abzukürzen, werde ich im folgenden die pyramiden- oder Kegelförmige Ecke oder Spitze wie ALB, ſchlechthin eine Ecke nennen, und die Fläche, welche ſie von allen Seiten umgiebt, ſelbige mag aus ebenen Flächen beſtehen, oder eine krumme kegelartige Fläche ſeyn, ſoll ſchlechthin die Gränze der Ecke heiſſen. Von einer ſolchen Ecke, und ihrem innern Raum muß man ſich in der körperlichen Geometrie eine ähnliche Vorſtellung machen, wie von einem ebenen gradlinichten Winkel in der ebenen Geometrie. Die Schenkel des ebenen Winkels laufen von ſeiner Spitze aus ins unendliche fort, und der Raum zwiſchen den Schenkeln erweitert ſich immer mehr, je weiter die Schenkel von der Spitze aus fortlaufen. Die Gränze einer körperlichen Ecke läuft ebenfalls von ihrer Spitze aus ins unendliche fort, und ihr innerer Raum erweitert ſich immer mehr, je weiter die Gränze fortläuft. Wie nun dem 472 §. Geom. gemäß ein Bogen zwiſchen den Schenkeln eines gradlinichten ebenen Winkels aus ſeiner Spitze als dem Mittelpunct mit dem Halbmeſſer = 1, zwiſchen ſeinen Schenkeln beſchrieben dazu dienet, die Gröſſe des Winkels auszudrücken, wenn derjenige = 1 angenommen wird, wozu der ſeinem Halbmeſſer gleiche Bogen gehört; ſo kann hier ein Stück einer Kugelfläche aus der Spitze einer körperlichen Ecke,

als dem Mittelpunct zwiſchen der ſie umgebenden Gränze mit dem Halbmeſſer = 1 beſchrieben, dazu dienen, die Gröſſe der Ecke auszudrücken, wenn diejenige Ecke = 1 angenommen wird, wozu ein Stück der Kugelfläche gehört, das dem Quadrat des Halbmeſſers gleich iſt.

1 u. 2 Fig. Mit dem Halbmeſſer *al* ſey um die Spitze *l* der Ecke *alb* eine Kugelfläche *abef* beſchrieben, wovon das Stück *ab* zwiſchen der die Ecke umgebenden Gränze fällt, ſo iſt $abef : ABEF = al^2 : AL^2$. Wenn alſo auch $ab : AB = al^2 : AL^2$ angenommen wird, ſo iſt $ab : AB = abef : ABEF$, oder $ab : abef = AB : ABEF$. Ferner hat man $ab : abef = alb$: Summen aller Ecken um *l*, und $AB : ABEF = ALB$: Summe aller Ecken um L; alſo *alb* : Summe der Ecken um *l* = ALB : Summe der Ecken um L. Weil nun die Summe aller Ecken um *l* mit der Summe aller Ecken um L einerley iſt, ſo hat man $alb = ALB$, wenn $\frac{ab}{al^2} = \frac{AB}{AL^2}$ iſt: oder zwey Ecken ſind gleich groß, wenn die Kugelflächen zwiſchen ihren Gränzen ſich wie die Quadrate der zugehörigen Halbmeſſer verhalten.

Daraus fließt der beſondre Satz, daß diejenige Ecke allemahl einerley Gröſſe habe, wozu ein Segment der Kugelfläche gehört, das dem Quadrat des zugehörigen Halbmeſſers gleich iſt.

Ueberhaupt aber iſt das Verhältniß zwoer Ecken zuſammen geſetzt aus dem Verhältniß der Kugelflächen, zwiſchen ihren Gränzen und dem umgekehrten Verhältniß der Quadrate ihrer Halbmeſſer. Es ſey nemlich die Summe aller Ecken, die einen

Punct,

Punct, wie L oder l umgeben können, = S, ſo iſt ALB : S = AB : ABEF, und S : alb = $abef$: ab, mithin ALB : alb = AB . $abef$: ab . ABEF; und weil $abef$: ABEF = al^2 : AL^2, ſo iſt auch ALB : alb = AB . al^2 : ab . AL^2, oder ALB : alb

$$= \frac{AB}{AL^2} : \frac{ab}{al^2}.$$

Wenn nun $ab = al^2$ genommen wird, ſo iſt

$$ALB : alb = \frac{AB}{AL^2} : 1, \text{ und } ALB = \frac{AB}{AL^2} . \ alb,$$

oder $ALB = \frac{AB}{AL^2}$, weil alb eine beſtimmte als bekannt anzunehmende Gröſſe hat, die man = 1 ſetzen kann.

5. §.

Auf AB falle die Strahlenmenge = M, und auf ein andres Stück AE derſelben Kugelfläche die Strahlenmenge m, ſo iſt M : m = AB : AE = ALB : ALE, und wenn der leuchtende Punct L einerley iſt, ſo iſt M : m zugleich das Verhältniß der Lichtmaſſen, die ſich von L aus in die pyramiden- oder Kegelförmigen Räume ALB, ALE ausbreiten. Wenn demnach die Lichtmaſſe in dem Raum ALB = L, in dem Raum ALE = λ geſetzt wird, ſo iſt auch L : λ = M : m.

Um einen andern leuchtenden Punct l ſtelle man ſich ebenfalls eine Kugelfläche $abef$ vor, und nehme den coniſchen oder pyramidenförmigen Raum ale = ALE an, ſo verbreitet ſich von l aus in dem Raum ale die Strahlenmenge = m, weil die gleichen Räume ALE, ale, gleichviele Strahlen faſ-

ſen. Die Puncte L, l, kann man bey dieſer Unterſuchung nicht als geometriſche Puncte betrachten: vielmehr müſſen ſie als phyſiſche Puncte, als unendlich kleine Maſſen betrachtet werden, und ſo könnten ſie auch ungleich groß ſeyn. Es ſey alſo des Elements L Gröſſe $= E^3$, des Elements l Gröſſe $= e^3$. Wenn nun $\delta : \Delta$ das Verhältniß der eigenen Dichtigkeit der von L ausgehenden Strahlen, zur eigenen Dichtigkeit derjenigen Lichtſtrahlen iſt, die l ausſendet, und die Lichtmaſſe, die ſich in dem Raum ale ausbreitet, $= l$ geſetzt wird, ſo hat man $\lambda : l = E^3 . \delta : e^3 . \Delta$. Denn die Lichtmenge in einerley coniſchen Raum, wächſt in gleichen Verhältniß mit der eigenen Dichtigkeit des Lichts, wenn die Gröſſe des leuchtenden Elements einerley bleibt, und in gleichem Verhältniß mit der Gröſſe, wenn die eigene Dichtigkeit des Lichts ſich nicht ändert: alſo in beyden Verhältniſſen zugleich, wenn ſich beydes, die eigene Dichtigkeit des Lichts, und die Gröſſe des leuchtenden Elements ändert.

Aus den beyden Proportionen

$$L : \lambda = M : m$$

und $\lambda : l = E^3 . \delta . e^3 . \Delta$

folgt $L : l = E^3 . \delta . M : e^3 . \Delta . m$.

alſo auch $L : l = E^3 . \delta . ALB : e^3 . \Delta . ale$,

weil $ale = ALE$ genommen iſt: mithin ferner $L : l = \frac{E^3 . \delta . AB}{AL^2} : \frac{e^3 . \Delta . ae}{al^2}$. (4. §.) Nimmt man die Ecke $ale = 1$, alſo $ae = al^2$ an, ſo iſt $L : l = \frac{E^3 . \delta . AB}{AL^2} : e^3 . \Delta$, und $L = \frac{E^3 . \delta . AB}{e^3 . \Delta . AL^2} . l$, da dann l diejenige Lichtmaſſe iſt, welche der leuchten-

de

de Punct l auf ein Stück der ihn umgebenden Kugelfläche wirft, das dem Quadrat des Halbmeſſers gleich iſt.

6. §.

Je gröſſer die eigene Dichtigkeit der Strahlen iſt, die ein leuchtender Punct um ſich her verbreitet, deſto gröſſer iſt der Glanz deſſelben: er glänzt doppelt ſo ſtark, als ein andrer leuchtender Punct, wenn er doppelt ſo dichte Strahlen ausſendet, als der andre verbreitet, und überhaupt iſt der Glanz der eigenen Dichtigkeit dieſer Strahlen proportional. Es ſey alſo der Glanz des Puncts $L = S$, des Puncts $l = s$, ſo iſt $S : s = \delta : \Delta$, mithin hat man auch $L = \frac{E^3 . S . AB}{e^3 . s . AL^2} . l$.

Wenn nun der Glanz s irgend eines leuchtenden Puncts l als bekannt angenommen wird, und die Gröſſe deſſelben $= e^3$ ein für allemahl beſtimmt iſt, um damit die Gröſſe andrer leuchtender Puncte zu vergleichen; ſo kann man $s = 1$ ſetzen. Ueberdem nehme man diejenige Lichtmenge $= 1$ an, welche ein leuchtender Punct, deſſen glanz man $= 1$ geſetzt hat, wenn ſeine Gröſſe $e^3 = 1$ wäre, auf ein Stück der ihn umgebenden Kugelfläche werfen würde, das dem Quadrat des Halbmeſſers gleich iſt, ſo muß in der gefundenen Formul $l = 1$ ſeyn, wenn $s = 1$ und $e^3 = 1$ iſt, und man hat $L = \frac{E^3 . S . AB}{AL^2}$.

Vermöge dieſer Formul iſt S diejenige Lichmenge, welche ein Punct, deſſen Glanz S und deſſen Gröſſe $= 1$ iſt, in dem Raum einer Ecke ausbreitet,

tet, deren Maaß = 1 iſt: (4. §.) denn es wird L = S, wenn man AB = AL^2 und E^3 = 1 nimmt. Setzt man die durch den Raum einer Ecke = 1 ſcheinende Lichtmenge = Λ, ſo iſt $\Lambda = E^3 . S$, und $S = \frac{\Lambda}{E^3}$. Eben dieſer Ausdruck giebt die Lichtmenge, welche ein eben ſo ſtark glänzender Punct durch den Raum einer Ecke = 1 verbreiten würde, wenn ſeine Gröſſe = 1 wäre. Eben dieſe Lichtmenge giebt alſo ein beſtimmtes Maaß ab für den Glanz des leuchtenden Elements, oder die eigene Dichtigkeit des Lichts, welches daſſelbe nach allen Seiten umherſtrahlet.

7. §.

Von dieſer eigenen Dichtigkeit der Strahlen, die L nach allen Seiten gleichförmig ausbreitet, muß noch die Dichtigkeit des über der Fläche AB oder GH verbreiteten Lichts, in wiefern es dieſe Fläche erleuchtet, unterſchieden werden. Die Kugelſtücke AB, GH, zwiſchen den Gränzen einer und eben derſelben Ecke, fangen gleichviel Licht auf, obgleich GH > AB iſt, wenn GH zum gröſſern Halbmeſſer gehört. Jedes dieſer Kugelſtücke iſt zwar für ſich gleichförmig erleuchtet, gleiche Elemente von GH fangen gleichviel Licht auf, eben ſo, wie gleiche Elemente von AB gleichviel Licht auffangen: weil man aber die erleuchtete Fläche, in wiefern ſich das Licht darüber gleichförmig vertheilt, nunmehro als den Raum betrachten muß, durch welchen das Licht verbreitet iſt, ſo erhellet, daß über AB das Licht dichter beyſammen ſey, als über

GH,

GH, weil AB $<$ GH iſt, mithin einerley Lichtmaſſe über AB in einem kleinern Raum, über GH aber in einem gröſſern Raum gleichförmig vertheilt ſey. Von dieſer Dichtigkeit des über einer Fläche gleichförmig verbreiteten Lichts hat man einen beſtimmten Begrif, wenn man weiß, wie viel Licht über ein ſolches Stück der Fläche verbreitet iſt, das man $= 1$ geſetzt hat. Wenn alſo der Quadrat-Inhalt der Fläche $= Q$, die darüber verbreitete Lichtmenge $= L$, die Dichtigkeit des Lichts über der Fläche $= D$ geſetzt wird; ſo hat man wegen der gleichförmigen Vertheilung des Lichts $Q : 1 = L : D$, und $D = \frac{L}{Q}$, ſo wie $L = D \cdot Q$. Dieſemnach wird die Dichtigkeit des Lichts, in wiefern es eine Fläche gleichförmig erleuchtet, eben ſo gefunden, wie ſonſt die Dichtigkeit einer durch ihren Raum gleichförmig vertheilten Maſſe gefunden wird.

Es ſey L die Lichtmenge, welche der leuchtende Punct L auf das Stück AB der Kugelfläche ABEF wirft; ſo iſt $L = \frac{E^3 . S . AB}{AL^2}$ (6. §.) und AB iſt das, was in der allgemeinen Formul Q war. Bezeichnet alſo D die Dichtigkeit des Lichts über AB, ſo iſt $D = \frac{L}{AB} = \frac{E^3 . S}{AL^2}$, und dieſe Dichtigkeit iſt dem Quadrat des Halbmeſſers der Kugelfläche umgekehrt proportional.

Wenn man Lichtmengen, die von gleich großen phyſiſchen Puncten ausgehen, vergleicht; ſo kann man

man $E^3 = 1$ ſetzen, und $L = \frac{S \cdot AB}{AL^2}$, ſo wie $D = \frac{S}{AL^2}$ annehmen.

8. §.

1 Fig. Wenn der Punct L, deſſen Gröſſe ich nun Kürze halber $= 1$ ſetze, ſein Licht auf eine Ebene CD wirft, ſo kann er dieſelbe nicht gleichförmig erleuchten, auf gleiche Elemente dieſer Ebene kann nicht gleichviel Licht fallen. Es ſey LE auf dieſer Ebene ſenkrecht, und mit dem Halbmeſſer LE ſey eine Kugelfläche beſchrieben; ſo wird ſie die Ebene in E berühren, und das Element Ee der Ebene kann zugleich als ein Element der Kugelfläche betrachtet werden: mithin iſt die Lichtmenge, welche das Element Ee auffängt, $= \frac{Ee \cdot S}{EL^2}$, und die Dichtigkeit des darüber verbreiteten Lichts $= \frac{S}{EL^2}$.

Ferner ſey Pp ein anderes Element der Ebene CD, durch P aber ſey eine neue Ebene auf LP ſenkrecht geſetzt, wovon das Element $P\pi$ zwiſchen der die Ecke PLp umgebenden Gränze liegt; ſo erhellet, daß Pp nur grade ſoviel Licht auffangen könne, als $P\pi$ auffangen würde, und $P\pi$ kann als ein Element einer mit dem Halbmeſſer LP beſchriebenen Kugelfläche angeſehen werden. Mithin iſt die Menge Lichts, welche Pp auffängt, $= \frac{P\pi \cdot S}{LP^2}$. Wenn nun gleich $Pp = Ee$ angenommen wird, ſo iſt doch die Menge Lichts, welche Pp empfängt, kleiner als diejenige,

jenige, welche Ee auffängt, weil die Ecke $PLp <$ ELe iſt. Es iſt nemlich $\frac{P\pi}{LP^2} < \frac{Ee}{LE^2}$, weil $P\pi$ $< Pp$, oder $P\pi < Ee$, und $LP > LE$ iſt.

Die Dichtigkeit des Lichts in der Entfernung LP vom leuchtenden Punct, wenn es in P ſenkrecht aufgefangen würde, iſt $= \frac{S}{LP^2}$, aber das Element Pp fängt das in dem Raum PLp ſich ausbreitende Licht nicht ſenkrecht auf. So wie ſich indeſſen das ſenkrecht aufgefangene Licht über $P\pi$ gleichförmig verbreiten würde, ſo verbreitet ſich auf ähnliche Art das ſchief aufgefangene Licht über Pp ebenfalls gleichförmig. Weil nun der Flächenraum Pp $> P\pi$ iſt, ſo breitet ſich einerley Lichtmenge über Pp in einen gröſſern Flächenraum aus, als wenn ſie auf $P\pi$ fiele, und die Dichtigkeit des Lichts, ſo wie es ſich über das Element Pp in der ſchiefen Lage gegen die auffallenden Strahlen verbreitet, iſt kleiner, als die Dichtigkeit des in der Entfernung LP von dem leuchtenden Punct ſenkrecht aufgefangenen Lichts.

9. §.

Weil Ee, Pp, nur als Elmente der Ebene CD betrachtet werden, ſo ſind alle Strahlen, die ein ſolches Element auffängt, unter ſich parallel, und treffen das Element unter einerley Winkel, wie LEC, LPC, welcher hier der **Einfallswinkel** heiſt. Die Menge des über Pp verbreiteten Lichts war $= \frac{P\pi . S}{LP^2}$, alſo iſt die Dichtigkeit deſſelben =

ben $= \frac{P\pi . S}{Pp . LP^2}$. (7. §.) Weil es gleichviel iſt, was man dem Element Pp für eine Geſtalt geben will, ſo kann man es als ein unendlich kleines Recht=eck betrachten, deſſen eine Seitenlinie Pp, und die andre in P auf der Ebene LPC ſenkrecht iſt: als=denn iſt $P\pi$ ebenfals ein Rechteck, und $P\pi = Pp . \sin LPC$, weil LpC, LPC, hier gleiche Winkel ſind. Wenn alſo nunmehr die Gröſſe des leuch=tenden Elements $= E^3$ angenommen wird; ſo hat man die Dichtigkeit des über Pp verbreiteten Lichts $= \frac{E^3 . S . \sin LPC}{LP^2}$ und die auffallende Lichtmenge $= \frac{E^3 . S . Pp . \sin LPC}{LP^2}$.

10. §.

Um L ſey mit einem Halbmeſſer LG, der gröſſer als LA iſt, auch die Kugelfläche OGWQ beſchrieben, ſo erhellet, daß auf die gan=ze Kugelfläche OGWQ zwar eben ſo viel Licht, als auf ABEF fallen würde, wenn ABEF es nicht auf=hielte: nimmt man aber auf der gröſſern Kugel=fläche ein Stück MN eben ſo groß an, als ein an=dres Stück AB auf der kleinern Kugelfläche, und ſetzt die auf AB fallende Lichtmenge $= L$, die auf MN fallende $= l$; ſo hat man $L = \frac{AB . S}{LA^2}$, $l = \frac{MN . S}{LG^2}$, (6. §.) $E^3 = 1$ geſetzt, mithin $l < L$, weil $MN = AB$, und $LG > LA$ angenommen iſt.

Jede

Jede von den Kugelflächen AB, MN, iſt alſo zwar für ſich gleichförmig erleuchtet, aber AB empfängt von L eine gröſſere Erleuchtung, als MN von AB empfängt. Iſt L = 2 l, oder allgemeiner L = $n \cdot l$, ſo iſt die Erleuchtung, welche L auf AB wirft, 2 mahl, oder überhaupt n mahl gröſſer, als diejenige Erleuchtung, welche MN von L empfängt. Eine ſolche Vergleichung läßt ſich allemahl anſtellen, wenn über zwey verſchiedene gleich groſſe Flächen, das darauf fallende Licht, (es komme übrigens von einem oder von mehrern leuchtenden Puncten zugleich her,) gleichförmig vertheilt iſt, ſo daß auf gleiche Elemente einer jeden Fläche für ſich gleich viel Licht fällt: die Erleuchtungen dieſer Flächen verhalten ſich, wie die darauf fallenden Lichtmengen.

11. §.

Demnach hat man einen völlig beſtimmten Begrif von der Gröſſe der auf eine gleichförmig erleuchtete Fläche fallenden Erleuchtung, wenn man weis, wie groß die Lichtmenge ſey, welche entweder die ganze Fläche, oder ein Theil von ihr von bekannter Gröſſe auffängt. Um alſo die Ausdrücke mehr abzukürzen, damit es nicht nöthig ſey, jedesmahl zu ſagen, die Fläche ſey ſo ſtark erleuchtet, daß ein Theil von ihr in ſolcher Gröſſe ſoviel Licht auffange; iſt es am bequemſten, ein für allemahl feſtzuſetzen, daß der Ausdruck: Erleuchtung, Gröſſe der Erleuchtung, welche auf eine gleichförmig erleuchtete Fläche fällt, diejenige Lichtmenge bezeichnen ſolle, welche über ein Stück der Fläche, das man = 1^2 angenommen hat, ver-

breitet iſt, oder darüber vertheilt ſeyn würde, wenn die Fläche die angezeigte Gröſſe hätte. Solchergeſtalt werden die Ausdrücke: Erleuchtung der Fläche, und Dichtigkeit des darüber verbreiteten Lichts, gleichgültig.

Fällt alles Licht ſenkrecht auf die Fläche, wie das von L kommende Licht auf das Kugelſtück AB; ſo iſt die auf AB fallende Erleuchtung $\frac{L}{AB} = \frac{S}{LA^2}$ einerley mit der Dichtigkeit des Lichts an der Stelle, wo es ſenkrecht aufgefangen wird. Wie nun eben ſo die Erleuchtung des Elements Ee der ebenen Fläche CD, worauf das Licht von L ſenkrecht fällt, $= \frac{\Lambda}{Ee}$ iſt, wenn Λ die darauf fallende Lichtmenge $= \frac{Ee \,.\, S}{LE^2}$ bezeichnet; ſo iſt die eben genannte Erleuchtung $= \frac{S}{LE^2}$ ebenfalls einerley mit der Dichtigkeit des von L ausgehenden, in der Entfernung LE mit einer unendlich kleinen Ebene ſenkrecht aufgefangenen Lichts, und man könnte ſie die ſenkrechte Erleuchtung nennen. Wenn dagegen auf das Element Pp die Lichtmenge λ unter dem ſchiefen Winkel LPC fällt, ſo iſt die von L auf Pp fallende Erleuchtung $= \frac{\lambda}{Pp} = \frac{S \,.\, \sin LPC}{LP^2}$ (9. §). Sie iſt alſo wiederum einerley mit der Dichtigkeit des Lichts über einer unendlich kleinen Ebene, die es unter dem ſchiefen Winkel LPC auffängt.

12. §.

Wenn die Flamme einer angezündeten Kerze oder Lampe ihr Licht umher Strahlet, ſo gelten die erwieſenen Sätze nur für jeden einzelnen Punct, oder eigentlich für jedes einzelne körperliche Element, der Flamme: und wenn man die von ihr herrühren- de Erleuchtung einer Fläche ſuchen wollte, ſo müſte man für jeden Punct, oder für jedes Element der Flamme die Rechnung beſonders anſtellen: die Summe der Erleuchtungen, welche von allen Ele- menten zuſammen genommen herrührt, wäre denn die geſuchte Erleuchtung. Für jedes Element der erleuchteten Ebene würde jeder Punct der Lichtflam- me einen andern Abſtand, und die aus demſelben ausgehenden Strahlen einen andern Einfallswin- kel haben. Weil indeſſen die Lichtflamme nie ſon- derlich groß iſt, ſo kann man ſie ſelbſt als einen phy- ſiſchen Punct betrachten: oder, welches einerley iſt, man kann die Rechnung ſo anſtellen, als wenn alle Elemente der Flamme etwa in ihrer Mitte in einem einzigen Punct beyſammen wären. Dies heiſt an- nehmen, daß alle Elemente der Flamme von einerley Element der erleuchteten Fläche gleich weit entfernt ſind, und die von jedem Element der Flamme auf einerley Element der erleuchteten Fläche fallenden Strahlen, gegen daſſelbe unter einerley Einfalls- winkel geneigt ſind. Beydes kommt der Wahr- heit deſto näher, je kleiner die Flamme ſelbſt, und je weiter ſie von der erleuchteten Fläche entfernt iſt. Wenn man hiebey annimmt, daß eine ſolche Flam- me ihr Licht nach allen Seiten gleichförmig umher ſtrahle, eben ſo, als wenn es ein einziger leuchten- der Punct wäre, hat ſeinen Grund in der Durch-

ſichtigkeit der Flamme, weswegen auch die innern Theile durchſcheinen, und ſolchergeſtalt die umher ſtrahlende Lichtmenge vermehren können.

13. §.

Das Licht, was ein leuchtender Punct, (oder auch die glänzende Oberfläche eines leuchtenden Körpers,) einer für ſich dunklen Fläche zuſchickt, erleuchtet die Fläche; das heiſt, wenn man das Wort dem Sprachgebrauch am gemäſſeſten erklären will: es iſt die Urſache, welche macht, daß die Fläche ſichtbar, hell, wird. So verſtanden, beziehet ſich das Wort: erleuchten, auf den glänzenden Punct, (oder die glänzende Fläche,) wovon das Licht herkommt. Wie man nun der erleuchteten Fläche eine gewiſſe Helligkeit, oder Klarheit, zuſchreibt; ſo iſt vermöge des eben angeführten die Menge des auf einen Flächenraum von beſtimmter Gröſſe fallenden Lichts d. i. die Erleuchtung, als die Urſache, die Helligkeit, Klarheit, der Fläche aber als ihre Wirkung anzuſehen. Es ſey alſo L*l* eine unendlich kleine erleuchtete für ſich dunkle Ebene, und um L als einen Mittelpunct ſey eine Kugelfläche beſchrieben, welche von der nach allen Seiten erweiterten Ebene L*l* in zwo Halbkugeln getheilt wird: das Licht falle auf die Seite der Ebene L*l*, welche der Halbkugelfläche OQW zugekehrt iſt; ſo wird wenigſtens ein Theil des auffallenden Lichts den im 2 §. angenommenen Geſetzen gemäß in gradlinichten Richtungen nach allen Seiten völlig eben ſo zurück ſtrahlen, wie ſich das Licht in gradlinichten phyſiſchen Strahlen nach allen Seiten verbreiten würde, wenn L*l* für ſich leuchtend wäre.

14. §.

Dieſe phyſiſchen Lichtſtrahlen haben durchgängig einerley eigene Dichtigkeit, und ihre Ausbreitung iſt zwar in ſo weit gleichförmig, daß auf gleiche Stücke der Halbkugelfläche OQW gleichviele Lichtſtrahlen fallen: nur führen, wie ſchon aus dem 2. §. bekannt iſt, nicht alle Strahlen den Stellen der Halbkugelfläche, die ſie treffen, gleichviele Lichtmaſſe zu. Wenn L*l* für ſich leuchtend iſt, ſo iſt die eigene Dichtigkeit der davon ausgehenden Lichtſtrahlen das Maaß des Glanzes; und wenn L*l* mit fremden Licht erleuchtet iſt, ſo iſt die eigene Dichtigkeit der zurückgehenden Strahlen das Maaß der Klarheit der Ebene L*l*. So läßt ſich die Klarheit einer erleuchteten Fläche als ein entlehnter Glanz betrachten: für zwey verſchiedene leuchtende Elemente iſt das Verhältniß der eigenen Dichtigkeiten der davon ausgehenden Strahlen zugleich das Verhältniß des Glanzes der Elemente, es mag eigener oder entlehnter Glanz ſeyn.

Nach dieſen Geſetzen Strahlt wenigſtens ein Theil des auffallenden Lichts allemahl von der Oberfläche eines dunklen Körpers zurück: und wenn gleich Spiegelflächen einen großen Theil des auffallenden Lichts nach andern Geſetzen zurückwerfen, ſo ſtrahlt doch der übrige Theil ebenfalls nach den hier angenommenen Geſetzen zurück. Ich ſetze indeſſen die Spiegelflächen noch ganz beyſeite, und verſtehe hier die Fläche einer unpolirten Maſſe, wenn von einer dunklen Fläche die Rede iſt, die das auffallende Licht wenigſtens zum Theil nach allen Seiten wieder zurück ſendet.

15. §.

Sind zwey leuchtende Elemente gleich groß, ſo iſt das Verhältniß der eigenen Dichtigkeiten der von jedem Element für ſich ausgehenden Strahlen zugleich das Verhältniß der Lichtmaſſen, die jedes Element für ſich in dem Raum einer Halbkugel aus-breitet. Wenn nemlich die von L*l* ausgehenden Strahlen *n* mahl dichter würden, ſo iſt für ſich klar, daß die in dem ganzen Raum der Halbkugel um-her ſtrahlende Lichtmaſſe *n* mahl gröſſer würde. Wenn dagegen ungleich große Elemente einen glei-chen Glanz haben, ſo iſt das Verhältniß der Licht-maſſen, die jedes Element für ſich in dem Raum einer Halbkugel umher ſtrahlet, einerley mit dem Verhältniß der Gröſſe der Elemente. Demnach iſt das Verhältniß der Lichtmaſſen, die un-gleich große Elemente bey ungleichen Glanz nach allen Seiten ausbreiten, zuſammen ge-ſetzt aus den Verhältniſſen des Glanzes und der Gröſſe der leuchtenden Elemente.

16. §.

Wenn gleich große Elemente einer leuchtenden Fläche, die ihre beſtimmte Gröſſe hat, gleichviele Lichtmaſſe nach allen Seiten ausbreiten, ſo haben ſie alle einerley Glanz, oder die ganze Fläche hat einen gleichförmigen Glanz. Man ſetze den Quadrat-Inhalt einer ſolchen Fläche $= Q$, die geſammte Lichtmaſſe, welche dieſe ganze Fläche nach allen Seiten ausbreitet, $= \Lambda$; ferner ſey *s* dieje-nige Lichtmenge, welche eine in allen Elementen eben ſo ſtark glänzende Fläche nach allen Seiten ausbreiten würde, wenn ihr Flächen-Inhalt $= 1$ wäre:

wäre: ſo iſt $Q : 1 = \Lambda : s$, alſo $s = \Lambda : Q$ und $\Lambda = s . Q$.

Was hier s heiſt, iſt dem Glanz der Fläche proportional, und man hat einen beſtimmten Begrif von der Gröſſe des (eigenen oder entlehnten) Glanzes einer überal gleichförmig glänzenden Fläche, wenn man weis, wie groß die Lichtmaſſe ſey, die eine eben ſo ſtark und überal gleichförmig glänzende Fläche nach allen Seiten ausſenden würde, wenn ihr Quadratinhalt = 1 wäre. Demnach iſt eben dieſe Lichtmaſſe das Maaß des Glanzes der leuchtenden Fläche. Jede unendlich kleine leuchtende Ebene Ll, kann als gleichförmig glänzend angenommen werden: wenn alſo Λ die Lichtmaſſe iſt die ſie nach allen Seiten in dem Raum einer Halbkugel ausbreitet, und s ihr Glanz in dem eben erklärten Verſtande, ſo hat man $\Lambda = s . Ll$. Man wird bey angeſtellter Vergleichung eben dieſe Begriffe beym Hn. Bouguer (Traite d'Optique ſur la gradation de la lumiere Liv. I. Sect. I. Art. VIII) finden. Was hier mit s bezeichnet iſt, heiſt beym ihm intenſité de la lumiere, und was ich mit Λ bezeichnet habe, heiſt bey ihm quantité totale de la lumiere.

17. §.

Auf die für ſich dunkle unendlich kleine Ebene $Ll = \omega^2$ falle die Lichtmenge $= L$, und die nach allen Seiten zurückſtrahlende Lichtmenge ſey $= n . L$, ihre Klarheit $= \sigma$, ſo iſt $\sigma = \frac{nL}{\omega^2}$. Setzt man ferner die Erleuchtung, welche Ll empfängt $= I$,

ſo iſt $\frac{L}{\omega^2} = I$, alſo $\sigma = n \cdot I$. Wenn ein paar gleich weiſſe Flächen von völlig einerley phyſiſchen Beſchaffenheit, (ein paar matt geſchliffene gläſerne oder metallene Tafeln, ein paar Stücke von feinem weiſſen holländiſchen Papier,) gleich ſtark erleuchtet ſind, ſo iſt I für beyde einerley. Wie es nun keinen Zweifel leidet, daß nicht zugleich n für beyde einerley ſey; ſo iſt auch σ für beyde einerley. Ein paar dergleichen gleich ſtark erleuchtete Flächen haben alſo eine gleiche Klarheit.

Kann man vorausſetzen, daß bey völlig einerley phyſiſchen Beſchaffenheit der erleuchteten Fläche die Zahl n einerley bleibe, wenn gleich I größer oder kleiner würde; ſo iſt die Klarheit einer erleuchteten Fläche der darauf fallenden Erleuchtung proportional: und wenn dies keinen Zweifel unterworfen iſt, ſo kann man die Ausdrücke: Erleuchtung und Klarheit, als gleichgültige brauchen, wenn es nur darauf ankommt, die Klarheit eines und eben deſſelben Elements, oder zweyer Elemente von einerley Art, bey verſchiedenen Erleuchtungen zu vergleichen.

18. §.

Was nach der eben angegebenen Erklärung Klarheit der erleuchteten Fläche iſt, muß übrigens noch von der geſehenen Klarheit, wie ſie dem Auge vorkommt, unterſchieden werden, und um deßwillen werde ich jene Klarheit, wovon kurz vorhin die Rede war, die wahre Klarheit nennen; Auch ſiehet man wohl, daß aus eben dem Grunde der wahre Glanz einer mit eigenem Licht glänzen-

den

den Fläche von ihrem geſehenen oder ſcheinbaren Glanz unterſchieden werden müſſe. Kommt nun die geſehene Klarheit, wie nicht zu zweifeln iſt, auf die Art und Weiſe an, wie das von der erleuchteten, oder auch für ſich leuchtenden Fläche ausgehende Licht das Auge rührt; ſo läßt ſich keine Unterſuchung darüber, wie etwa die geſehene Klarheit von der wahren Klarheit abhängen mag, anſtellen, bevor der Bau des Auges, und die Art, wie es beym Sehen zugehet, iſt erklärt worden. Ich nehme indeſſen bis auf weitere Prüfung folgendes an.

1) Gleich weiſſe und gleich ſtark erleuchtete Flächen von völlig einerley phyſiſchen Beſchaffenheit, die ein Zuſchauer beyde neben einander zugleich mit einem Blick überſehen kann, haben nicht allein eine gleiche wahre (17. §.) ſondern auch für dieſen Zuſchauer eine gleiche ſcheinbare Klahrheit.

2) Sind eben die Flächen ungleich ſtark erleuchtet, ſo iſt ihre wahre Klarheit ungleich groß, und ſie ſcheinen eben dem Zuſchauer auch ungleich klar, wenn anders die erwehnte Ungleichheit der Erleuchtung und wahren Klarheit nicht etwa ſehr geringe iſt.

3) Wenn alſo ein Paar neben einander befindliche Flächen von der vorausgeſetzten Beſchaffenheit einem Zuſchauer, der ſie beyde zugleich mit einem Blick überſiehet, gleich klar zu ſeyn ſcheinen; ſo ſind ſie würklich gleich klar, mithin ſind die auf beyde fallenden Erleuchtungen gleich groß.

Die Einſchränkung, die dieſer Satz eben um deßwillen leidet, weil bey dem vorhergehenden eine Einſchränkung nöthig war, wird einem jeden von

ſelbſt beyfallen. So wenig aber die kleinen unvermeidlichen Fehler bey Schätzung der Gleichheit grader Linien die Geometrie ſelbſt und ihre Gründe unſicher machen, ſo wenig machen die nicht ganz zu vermeidenden kleinen Fehler bey Schätzung deſſen, ob ein Paar Flächen gleich klar oder hell ſind, die Photometrie und ihre Gründe unſicher.

19. §.

Wenn man mit einigen Kerzen ſoviel möglich von einerley Art und Gröſſe, am beſten iſt es mit Wachskerzen, verſehen iſt, damit ihre Flammen, wenn ſie nach der Anzündung ruhig brennen, wenigſtens beynahe eine gleiche Gröſſe und gleichen Glanz haben; ſo kann man im finſtern Zimmer auf mehr als eine Art Verſuche anſtellen, welche zur Beſtättigung der bisher vorgetragenen photometriſchen Grundſätze dienen. Von der gleichen Gröſſe der Flammen kann man ſich ziemlich durch den Augenſchein verſichern, wenn man ein paar ſolcher Kerzen neben einander ſtellt. Es ſey alſo AB die Grundlinie der weiſſen Wand eines dunklen Zimmers auf der Ebene DEAB, die hier den Fußboden des Zimmers, oder auch jede damit parallele Ebene, etwa eines Tiſchblades, vorſtellt. Ueber L ſtelle man eine oder mehrere brennende Kerzen ſehr nahe bey einander, daß man ihre Flammen als eine einzige aus allen zuſammengeſetzte Flamme betrachten kann, deren Gröſſe ich $= E^3$, ihren Glanz $= S$ ſetze. Ueber EF ſtelle man eine dunkle Ebene, welche die Geſtalt eines Rechtecks hat, lothrecht, damit ihr Schatten, den die (einfache oder aus mehrern zuſammen geſetzte Lichtflamme) in L

an

an der gegen über ſtehenden Wand verurſacht, zwiſchen den Verticallinien über B und G falle. Weiter ſtelle man eine andre einfache oder zuſammengeſetzte Kerze in H ſo, daß der Schatten der dunklen Ebene über EF, den dieſe in H befindliche Flamme allein verurſachen würde, zwiſchen den Verticallinien über A und G falle, und ſetze die Gröſſe der in H befindlichen Flamme $= e^3$; ihren Glanz $= s$. Der Stellung der Kerzen gemäß, empfängt die Fläche der Wand über AG allein von der Flamme L eine Erleuchtung = I, die Fläche über BG aber allein von der Flamme H eine Erleuchtung $= i$, und auf dieſe Stellen fallen die Strahlen wenigſtens beynahe ſenkrecht. Demnach hat man $I : i = \frac{E^3 . S}{LO^2} : \frac{e^3 . s}{HK^2}$. Man ändre eine von beyden Entfernungen LO oder HK ſo lange, bis beyde Stellen über AG und BG gleich hell ſcheinen, ſo ſind die darauf fallende Erleuchtungen gleich groß, (18. §. n. 3.) und man hat $\frac{E^3 . S}{LO^2} = \frac{e^3 . s}{HK^2}$, oder $LO^2 : HK^2 = E^3 . S : e^3 . s$.

20. §.

Wenn die einzelnen Lichtflammen alle gleich groß ſind, und ihre Anzahl in $L = m$, in $H = n$ iſt, ſo hat man $E^3 : e^3 = m : n$, alſo $LO^2 : HK^2 = m . S : n . s$; und eben wegen dieſer bequemen Vergleichung ſucht man ſolche Kerzen zu Verſuchen dieſer Art aus, deren Flammen wenigſtens ſehr nahe von gleicher Gröſſe ſind.

Stellt man in jeder von den Stellen L und H nur eine einfache Kerze, ſo iſt $LO^2 : HK^2 = S : s$, und

und wenn alsdenn LO = HK befunden wird, ſo iſt man verſichert, daß die Flammen einen gleichen Glanz haben. Von ſolcher Beſchaffenheit ſucht man ſich etwa drey oder mehrere Kerzen aus, um die weiter folgenden Verſuche anzuſtellen: da dann bey eben der Zubereitung zum Verſuch, wie im vor. §., $LO^2 : HK^2 = m : n$ iſt, wenn man ſich davon verſichert hat, daß für alle einzelne Lichtflammen $S = s$ ſey.

Stellt man zwey Kerzen über C und D bey einander, die eine doppelte Kerze in L vorſtellen, und in H eine einfache Kerze, ſo iſt $LO^2 : HK^2 = 2 : 1$, oder es muß $LO^2 = 2\,HK^2$ ſeyn, und $LO = HK\sqrt{2}$. H. Lambert hat den Verſuch angeſtellt (Photom. §. 58. Exper. 1) und er beſchreibt den Erfolg ſo, daß er würklich ſehr nahe $LO = HK\sqrt{2}$ befunden habe.

21. §.

4 Fig. Wiederum ſey AB die Grundlinie einer verticalſtehenden Wand im dunklen Zimmer, und über EF ſey eine undurchſichtige rechteckte Ebene aufgerichtet. In C ſey eine Kerze ſo geſtellt, daß ſie den Schatten der Ebene EF zwiſchen den Verticallinien über G und H werfen würde, übrigens aber die Stellen der Wand zunächſt bey G von ihr unter dem Einfallswinkel CGA erleuchtet werden. Ferner ſtelle man in D eine andre Kerze, deren Flamme eben ſo groß, und eben ſo ſtark glänzend, als die vorige iſt, ſo daß ſie den Schatten der Ebene EF auf der Seite von G werfe, wo A liegt, verrücke ſie aber in der Linie DG ſo lange, bis die Wand auf beyden Seiten der Verticallinie über G gleich

helle

helle erſcheint, ſo werden die Stellen der Wand zunächſt bey G auf der Seite wo H liegt, allein von D unter dem Einfallswinkel DGH erleuchtet, ſo wie die Stelle zunächſt bey G auf der Seite, wo A liegt, allein von C unter dem Winkel CGA erleuchtet wird. Alſo iſt die Erleuchtung in GA $= \frac{S . \sin CGA}{CG^2}$, in GH $= \frac{S . \sin DGH}{DG^2}$, mithin vermöge des Verſuchs, und der Vorausſetzung im 18 §. n. 3. $\sin CGA : \sin DGH = CG^2 : DG^2$. Weil man nun beym Verſuch die Linie CG, DG, CA, DK, meſſen kann, ſo hat man $\sin CGA = \frac{CA}{CG}$, $\sin DGH = \frac{DK}{DG}$, und der Verſuch muß $\frac{CA}{CG} : \frac{DK}{DG} = CG^2 : DG^2$ geben. Auch dies hat H. Lambert ſo befunden a. a. O. 63 §. Exper. IV.

22. §.

Nachdem in C eine oder etliche Kerzen bey einander geſtellt worden, könnte man die Entfernung GD = GC annehmen, und in D ebenfalls einige Kerzen bey einander ſtellen, allemahl ſolche, wovon die Flammen gleich groß und gleich ſtark glänzend ſind. Hierauf müſte man die Entfernung GC = GD ſo lange verändern, bis die Stellen von beyden Seiten gleich hell zu ſeyn ſcheinen. Iſt nun in C die Zahl der Kerzen $= n$, in D aber $= m$, ſo iſt hier die Erleuchtung aus C $= \frac{nS . \sin CGA}{CG^2}$, und die aus D kommende Erleuchtung $= \frac{mS . \sin DGH}{DG^2}$. 4Fig.

Ver-

Vermöge des Verſuchs, und der Vorausſetzung im 18 §. n. 3. ſind dieſe Erleuchtungen gleich, und CG = DG, alſo *n*. ſin CGA = *m*. ſin DGH, oder ſin CGA : ſin DGH = *m* : *n*. So hat es wiederum Hr. L. würklich befunden, a. a. O. 62. §. Exper. III.

Der II. Abſchnitt.

Die Erleuchtung einer Ebene von einer Lichtflamme, in wie weit leztere als ein Punct betrachtet werden kann.

23. §.

Wenn nicht auf gleiche Elemente einer erleuchteten Fläche eine gleiche Lichtmenge fällt, wenn die Erleuchtungen, welche auf verſchiedene Elemente dieſer Fläche fallen, verſchieden ſind; ſo kann eigentlich nie von der Erleuchtung der ganzen Fläche die Frage ſeyn. Wenn indeſſen die geſammte Lichtmenge bekannt iſt, welche die Fläche auffängt; ſo giebt dieſe Menge des auffallenden Lichts, durch den Quadrat-Inhalt der Fläche dividirt, einen Begrif von ihrer mittlern Erleuchtung. Man kann nemlich ſo fragen: wenn die ganze auf die Fläche fallende Lichtmenge über ſelbige gleichförmig vertheilt wäre, wieviel davon auf ein

ein ſolches Stück der Fläche fallen würde, das man $= 1$ geſetzt hat. Das wäre denn die mittlere Erleuchtung der Fläche, und derſelben wäre auch die mittlere Klarheit proportional. (M. ſ. H. Lamberts Photom. P. I. Cap. II. §. 167. p. 77.) Ein einziger leuchtender Punct kann eine Ebene nicht gleichfömig erleuchten: wenn alſo gefragt wird, wie groß die Erleuchtung, oder Klarheit der Ebene ſey, die ſie von einem Punct empfängt, ſo kann nur von der mittlern Erleuchtung die Rede ſeyn.

Unter welchen Umſtänden es verſtattet ſey, eine Lichtflamme, die eine Ebene, etwa einen Tiſch erleuchtet, als einen einzigen Punct zu betrachten, iſt ſchon aus dem 12 §. bekannt: mit den nöthigen Einſchränkungen alſo läßt ſich die eben angeſtellte Betrachtung auf Erleuchtungen, welche von einer Lichtflamme kommen, anwenden.

24. §.

Es ſey LMON ein Kreis, und AC eine im Mittelpunct A auf ſeiner Ebene lothrecht ſtehende grade Linie: in der leztern befinde ſich eine Lichtflamme C in gegebener Höhe AC über der Ebene: man ſoll die mittlere Erleuchtung des Kreiſes finden. 5 Fig.

Aufl. Der Halbmeſſer $AM = z$ wachſe um das Element $M\mu$, und mit dem Halbmeſſer $A\mu = z + dz$ ſtelle man ſich einen andern concentriſchen Kreis $\lambda\mu\omega\nu$ beſchrieben vor, ſo iſt zwiſchen beyden ein Ring enthalten, deſſen Breite $M\mu$ unendlich klein, und deſſen Fläche $= 2\pi z dz$ iſt. Ein andrer Halbmeſſer Am ſchlieſſe mit AM einen unendlich

lich kleinen Winkel MAm ein: ſo iſt $M\mu nm$ ein Element der Kreisfläche, wovon beyde Abmeſſungen unendlich klein ſind. Man ſetze $AC = c$, den Winkel $ACM = \psi$, ſo iſt $CM = \sqrt{(c^2 + z^2)}$ und die Erleuchtung des Elements $M\mu nm = \frac{S.\sin\psi}{CM^2}$ (11. §.) $= \frac{S.\sin\psi}{c^2 + z^2}$, wenn S den Glanz der Lichtflamme bezeichnet, und ihre Gröſſe $= 1$ iſt. Ueberdem iſt $\sin\psi = \frac{AC}{CM} = \frac{c}{\sqrt{(c^2 + z^2)}}$, mithin eben dieſe Erleuchtung $= \frac{S.c}{(c^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ für alle Elemente, die zu dem Ringe LMON $\lambda\mu\omega\nu$ gehören, iſt dieſe Erleuchtung einerley, weil für ſie alle z, alſo auch ψ und CM einerley bleibt, mithin wird dieſer Ring gleichförmig erleuchtet, und der Ausdruck $\frac{S.c}{(c^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ giebt zugleich die Erleuchtung des ganzen Ringes. Eben dieſes Ringes Fläche war $= 2\pi z dz$, mithin iſt die auf ihn fallende Strahlenmenge $= \frac{2\pi c S z dz}{(c^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, und durch Integration dieſer Formul findet man die Summe der auf alle Ringe der ganzen Kreisfläche fallenden Strahlen; mithin die ganze den Kreis erleuchtende Lichtmenge.

Man ſetze dieſe Strahlenmenge $= M$, ſo iſt $dM = \frac{e\pi c S z dz}{(c^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$. Ferner ſey $c^2 + z^2 = y$,

ſo

ſo iſt $2zdz = dy$, und $dM = \pi c S y^{-\frac{3}{2}} dy$, mithin $M = C - 2\pi c S y^{-\frac{1}{2}}$, oder $M = C - \frac{2\pi c S}{\surd(c^2+z^2)}$.
Mit z muß dies Integral zugleich verſchwinden, alſo wird $C = 2\pi S$, und $M = 2\pi S\left(1 - \frac{c}{\surd(c^2+z^2)}\right)$.
Weil endlich der Flächen-Inhalt des Kreiſes LMON $= \pi z^2$ iſt, ſo wird die geſuchte mitlere Erleuchtung $= \frac{2S}{z^2}\left(1 - \frac{c}{\surd(c^2+z^2)}\right)$.

25. §.

Weil $\frac{c}{\surd(c^2+z^2)} = \sin AMC = \cos ACM$ war, ſo iſt auch $M = 2\pi S \,\text{ſinv}\, ACM$, da dann ACM der ſcheinbare Halbmeſſer des erleuchteten Kreiſes iſt, aus dem leuchtenden Punct C geſehen. Um C als einen Mittelpunct ſey mit dem Halbmeſſer CB $= 1$ eine Kugelfläche beſchrieben, ſo iſt zwiſchen der Fläche des auf den Kreis fallenden Strahlenkegels MCN ein Segment der mit dem Halbmeſſer $= 1$ beſchriebenen Kugelfläche enthalten, deſſen Fläche $= 2\pi\,\text{ſinv}\,ACM$ iſt. (621 §. Geom.) Wenn alſo die Fläche dieſes Segments $= K^2$ geſetzt wird, ſo iſt auch $M = K^2 . S$. Hier aber bezeichnet S die Menge Lichts, welche der Punct C auf ein Stück der Kugelfläche wirft, das dem Quadrat des Halbmeſſers gleich, mithin hier $= 1$ iſt (6. §.): alſo hat man $1 : K^2 = S : M$, und der Ausdruck $M = K^2 . S$ zeigt an, daß auf den

Kreis LMON ſo viele Lichtmaſſe falle, als das Kugelſegment FBG zwiſchen den Gränzen des auf den Kreis fallenden Strahlenkegels auffängt.

Das hätte man auch ohne alle Rechnung von ſelbſt wiſſen können, denn es iſt für ſich klar, daß der Kreis LMON nicht mehr und nicht weniger Licht auffangen könne, als das Kugelſegment FBG auffangen würde. Indeſſen war es nicht undienlich, die bisher vorgetragenen Gründe der Photometrie auf ein ſo leichtes Beyſpiel anzuwenden, und zu zeigen, wie die Rechnung aus den Grundformuln auf eben das Reſultat führe, was man auch ſonſt kürzer hätte finden können.

26. §.

Die Erleuchtung des Ringes, wozu der Halbmeſſer z gehört, war $= \frac{S \cdot c}{(c^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, und dieſe ändert ſich mit z ſo, daß ſie $= \frac{S}{c^2}$ wird, wenn z verſchwindet, übrigens aber beſtändig abnimmt, wenn z wächſt, bis ſie verſchwindet, wenn man z unendlich groß ſetzt. Die Vorausſetzung $z = 0$ giebt die ſenkrechte Erleuchtung grade unter der Lichtflamme, und bey der Vorausſetzung $z = \infty$ muß die Erleuchtung verſchwinden, weil der Einfalswinkel AMC verſchindet. Auf die Stelle grade unter dem Licht, fällt um deswillen eine gröſſere Erleuchtung als auf jede andre Stelle, weil nicht allein die Entfernung dieſer Stelle von der Flamme kürzer iſt, als die Entfernung jeder andern Stelle, ſondern auch, weil zugleich auf dieſe Stelle das

Licht

licht ſenkrecht, auf jede andre unter einem ſchiefen Winkel fällt. Auf jeder von den Wänden des dunklen Zimmers, worin eine Kerze brennt, giebt es demnach ebenfals eine Stelle, die am ſtärkſten erleuchtet iſt, da nemlich, wohin eine grade Linie fällt, die von der Flamme auf die Wand ſenkrecht gezogen wird. Oben an der Decke des Zimmers giebt es eben ſo eine am ſtärkſten erleuchtete Stelle. (Man vergleiche den 153 §. der Perſpectiv).

27. §.

Nimmt man z beſtändig, dagegen aber *c* als veränderlich an, ſo verſchwindet die Erleuchtung des Ringes durch M, wenn $c = 0$ iſt, weil der Einfallswinkel für jede Stelle M nun $= 0$ wäre: mit *c* wächſt ſie zwar anfangs, nimmt aber hiernächſt wieder ab, und verſchwindet zum zweyten mahl, wenn $c = \infty$ genommen wird, weil nun zwar der Einfallswinkel $= 90°$, aber die Entfernung unendlich groß wäre. Man kann alſo fragen: wie weit die Flamme über der gegebenen Stelle A erhöhet ſeyn müſte, damit auf eine gleichfals gegebene Stelle M, oder einen Ring, wozu der gegebene Halbmeſſer CM gehört, die möglichſt gröſte Erleuchtung falle?

Stehet die Lichtflamme über der Mitte eines kreisrunden Tiſches grade ſo hoch, als erfordert wird, damit auf den äuſſerſten Rand deſſelben die gröſte Erleuchtung falle, ſo ſind alle übrige mit dem Rande concentriſche Ringe noch mehr erleuchtet, als der äuſſerſte. Wenn alſo die auf den äuſſern Rand fallende Erleuchtung noch ſo groß iſt, als man ſie nöthig hat, um ohne Beſchwerde dabey

ſeine Augen zu gebrauchen; ſo wird um ſo mehr die Erleuchtung aller übrigen Stellen auf dem Tiſch dazu hinlänglich ſeyn. Die Erleuchtung wäre auf ſolche Art auch am beſten über dem Tiſch vertheilt: Denn würde das Licht mehr erhöhet, ſo würde die Erleuchtung aller Stellen ohne Ausnahme kleiner werden, als ſie vorher war: würde dagegen die Lichtflamme mehr erniedriget, ſo würden zwar die Stellen grade unter dem Licht und in der Nähe umher deſto mehr Erleuchtung empfangen, je niedriger die Flamme geſtellt würde, allein die Erleuchtung der gegen den Rand zu liegenden Stellen würde man deſto mehr ſchwächen. Die Flamme wirft zwar deſto mehr Strahlen auf den Tiſch, je niedriger ſie ſteht, und die Hälfte aller Strahlen, die ſie um ſich her verbreitet, ſo viele, als auf die Fläche einer um ſelbige beſchriebenen Halbkugel fallen würden, iſt die Gränze, welche die auf den Tiſch fallende Strahlenmenge nie übertreffen kann, wenn gleich die Höhe der Flamme über dem Tiſch kleiner würde, als jede gegebene Höhe.

28. §.

So wie dies alles aus der Natur der Sache klar iſt, ſo ſtimmt auch die Formul für die Strahlenmenge $M = 2\pi S \left(1 - \frac{c}{\sqrt{(c^2 + z^2)}}\right)$ damit überein; denn dieſer Werth wächſt, wenn c abnimmt, und wird am gröſten, nemlich $= 2\pi S$, wenn c verſchwindet, da dann 2π die Fläche einer dem Halbmeſſer $= 1$ zugehörigen Halbkugel iſt. Allein bey dieſer möglichſten Erniedrigung der

Licht-

Lichtflamme würde man alles auf den Tiſch fallende Licht in den nächſten Stellen um den Mittelpunct vereinigen: nur das mittelſte Element allein würde erleuchtet werden, wenn die Flamme würklich ein Punct, und ihre Höhe über dem Tiſch unendlich klein wäre; wie denn auch die Formul für die Erleuchtung eines zum unbeſtimmten Halbmeſſer z gehörigen Ringes $= \frac{S.c}{(c^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ allemahl $= 0$ iſt, wenn $c = 0$ genommen wird, was auch z bedeutet, wenn nur $z > 0$ iſt. Demnach hat man Grund, diejenige Erleuchtung des kreisrunden Tiſches von einer über ſeiner Mitte ſtehenden Lichtflamme für die beſte anzunehmen, wobey auf den äuſſerſten Rand die gröſte Erleuchtung fällt.

29. §.

Zu finden, wie hoch eine Lichtflamme über der Mitte eines kreisrunden Tiſches ſtehen müſſe, damit ſie ihn am beſten erleuchte.

Aufl. Es ſey der beſtändige Halbmeſſer des kreisrunden Tiſches $= a$, die veränderliche Höhe $= x$, ſo iſt die Erleuchtung des äuſſern Randes $= \frac{S.x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$, wenn man in der Formul des 24. §. a ſtatt z, und x ſtatt c ſchreibt. Nach der nun ſchon oft gebrauchten im 343 §. Mech. zuerſt vorgekommenen Regel ſetze man $d.x(a^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}}$

 $= 0$,

$=0$, ſo wird $(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x(a^2+x^2)^{-\frac{5}{2}}$

$. 2x = 0$, oder $1 - \frac{3x^2}{a^2+x^2} = 0$ gefunden. Daraus folgt $a^2+x^2=3x^2$, oder $2x^2=a^2$, und $x = a\sqrt{\frac{1}{2}} . = 0,7071068 . a$; mithin muß die Höhe der Lichtflamme über dem erleuchteten Tiſch nur etwas weniges mehr denn $\frac{7}{10}$ des Halbmeſſers betragen. Uebrigens iſt $\frac{x}{a}$ die Tangente des Einfallswinkels AMC und $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sin 45°$. Es wird aber erfordert, daß $\frac{x}{a} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ſey, mithin muß die Tangente des Winkels, unter welchem die Strahlen auf den äuſſerſten Rand des Tiſches fallen, dem Sinus von 45° gleich ſeyn, wenn der Tiſch am beſten erleuchtet ſeyn ſoll; und zu dieſer Tangente gehört ein Winkel von 35° 16′.

30. §.

Aehnliche Betrachtungen mit denjenigen, die im 27. §. darüber ſind angeſtellt worden, wie ſich die Erleuchtung des Ringes LMON$\lambda\mu\omega\nu$ ändre, wenn c Aenderungen leidet, kann man auch über das Geſetz anſtellen, nach welchem ſich die auf einen ſolchen Ring fallende Lichtmenge $dM = \frac{2\pi c S z dz}{(c^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ (24. §.) ändert, wenn man z veränderlich annimmt. In der Vorausſetzung, daß dz ungeändert bleibe, oder alle Ringe eine gleiche Breite haben, verſchwindet bey einer gegebenen Höhe c der

der Lichtflamme die auf den Ring fallende Lichtmenge zweymahl, ſowohl wenn $z = 0$, als auch wenn z unendlich groß geſetzt wird: ſie wächſt anfangs mit z und nimmt hiernächſt wieder ab. Demnach muß es einen Ring geben, auf welchen die gröſte Strahlenmenge fällt.

31. §.

Bey gegebener Höhe der Lichtflamme über der Mitte des Tiſches den Halbmeſſer desjenigen Ringes zu finden, der die gröſte Strahlenmenge auffängt.

Aufl. Man ſetze $d \dfrac{z}{(c^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$, ſo wird $(c^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3z^2 (c^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} = 0$, alſo $1 - \dfrac{3z^2}{(c^2 + z^2)} = 0$, und $z = c\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ gefunden. Vermöge dieſer Gleichung fällt die gröſte Strahlenmenge auf einen Ring, dem ein Einfallswinkel zugehört, deſſen Tangente $= \dfrac{c}{z} = \sqrt{2}$ iſt, mithin ein Einfallswinkel von $54° 44'$. Hier muß alſo $\dfrac{z}{c}$ als die Cotangente des Einfallswinkels dem ſin $45°$ gleich ſeyn; ſo wie die Aufgabe des 29. §. erfoderte, daß die Tangente des Einfallswinkels $=$ ſin $45°$ ſey, und der Einfallswinkel ſelbſt $= 35° 16'$. Die eine dieſer Aufgaben erfordert demnach einen Einfallswinkel, welcher denjenigen, den die andre erfordert, zu $90°$ ergänzt.

32. §.

6 Fig. Wenn AGB dasjenige Stück der Oberfläche eines Körpers iſt, wohin der leuchtende Punct M Strahlen werfen kann, und man nimmt etwa in der Mitte der leuchtenden Fläche AGB, oder wo es ſonſt am bequemſten iſt, einen bekannten Punct G an, ſo kann die grade Linie MG als eine Axe des auffallenden Strahlenkegels betrachtet werden. Eine Ebene durch dieſe Axe gelegt ſchneidet die Kegelfläche, ſo wie die erleuchtete Fläche, und giebt an M einen Winkel AMB, der als der ſcheinbare Durchmeſſer der erleuchteten Fläche in der ſchneidenden Ebene anzuſehen wäre, wenn das Auge in M ſtünde. (15. §. Opt.) Auf ähnliche Art, wie dieſer Winkel einen Begrif giebt von der ſcheinbaren Länge oder Breite des erleuchteten Körpers, nach einer gewiſſen Richtung genommen, kann der ganze innere Raum der Ecke oder coniſchen Spitze an M dienen, von der ganzen ſcheinbaren Ausdehnung des erleuchteten Körpers nach allen Seiten einen Begrif zu geben, wenn man ſich vorſtellt, er werde aus M geſehen. Dasjenige Stück DFE einer um den Mittelpunct M mit dem Halbmeſſer = 1 beſchriebenen Kugelfläche, was innerhalb der Gränzen dieſes Kegel- oder Pyramidenförmigen Raums liegt, iſt das Maaß der Ecke oder coniſchen Spitze an M, (4. §.) mithin kann eben dieſes Stück DFE der Kugelfläche um M das Maaß der ſcheinbaren Gröſſe oder Ausdehnung des erleuchteten Körpers nach allen Seiten abgeben, wenn die Stelle des Ausges in M angenommen wird.

Auf

Auf die Fläche AGB fällt ſo viel Licht als DFE auffangen würde, wenn das Licht von einer in M befindlichen kleinen Lichtflamme kommt, und dieſe Lichtmenge iſt das Product der Gröſſe und des Glanzes der Flamme in die ſcheinbare Gröſſe der Fläche AGB aus M geſehen. (13. §.) Dieſemnach iſt die Lichtmenge leicht gefunden, wenn die ſcheinbare Gröſſe der erleuchteten Fläche ſchon ſonſt aus geometriſchen Gründen bekannt iſt, welches der Fall im 25. §. war. In andern Fällen müſte die Lichtmenge vermittelſt der Integralrechnung gefunden werden: weil jedoch Aufgaben dieſer Art keinen erheblichen practiſchen Nutzen haben würden, ſo kann dieſe allgemeine Betrachtung darüber genügen. Ich füge alſo dem bisherigen nur noch folgende Anmerkung bey. Im 13. §. war $L : l = \frac{E^3 . S . AB}{AL^2} : \frac{e^3 . s . al}{al^2}$: will man nun diejenige Lichtmenge $l = 1$ ſetzen, die eine Lichtflamme, deren Gröſſe $e^3 = 1$, und Glanz $s = 1$ iſt, durch den Raum einer Halbkugel ausbreitet, ſo muß man $ae = 2\pi . al^2$ ſetzen, wenn $s = 1$ und $e^3 = 1$ iſt, und man erhält $L = \frac{E^3 . S . AB}{2\pi . AL^2}$. Alsdenn iſt das Maaß S des Glanzes der Flamme diejenige Lichtmenge, welche ſie in dem Raum einer Halbkugel umher ſtrahlen würde, wenn ihre Gröſſe $= 1$ wäre. In dem Fall $AB = 2\pi\, AL^2$ iſt nun $L = E^3 . S$, und wenn man dieſe Lichtmenge $= \Lambda$ ſetzt, ſo iſt $S = \frac{\Lambda}{E^3}$.

33. §.

Ueber die im 29 §. vorgetragene Aufgabe hat man eine Sammlung von drey kleinen Abhandlungen unter dem Titel: Beſtättigte Vorſchrift über die beßte Erleuchtung einer Ebene mittelſt einer Lampe, nebſt Unterſuchungen darüber von H. H. Kaeſtner, Wien 1772, und die Ausgabe derſelben iſt von H. Gerlach Lehrer bey der K. K. Ingenieur-Academie zu Wien veranſtaltet, der auch von zweyen der erwehnten Abhandlungen Verfaſſer iſt. Die erſte davon war nur ein ganz kurzer Aufſatz von H. Gerlach im 52 Stück der K. K. Realzeitung vom 21 Dec. 1771; die zweyte iſt von H. H. Kaeſtner, der ſie im 33 Stück des neuen Hannöverſchen Magazins unterm 24 April 1772 bekannt gemacht hatte, und eben dieſe veranlaßte Hrn. Gerlach zu einer weitern Erläuterung ſeiner Meinung im dritten Aufſatz.

Im erſten Aufſatz nahm H. Gerlach an:

„es wachſe die Helle auf dem Tiſch (ſeine Meinung „iſt, die Erleuchtung auf einer gegebenen Stelle „des Tiſches) wie des Lichts Höhe, und umgekehrt das Quadrat ſeiner Weite von dem erleuchteten Punct,“

und das gab ihm den Ausdruck $\frac{x}{a^2 + x^2}$ dem die Erleuchtung oder Helligkeit proportional ſeyn ſoll. Weil nun dieſe Formul am gröſten wird, wenn $x = a$

$= a$ iſt, ſo fand er, für die beſte Erleuchtung des kreisförmigen Tiſches müſſe die Höhe der Flamme über dem Tiſch dem Halbmeſſer des leztern gleich ſeyn; da dann die Strahlen auf dem äuſſern Rand unter einem Winkel von 45° fallen würden. In der Erleuterung ſagt er zwar, er habe ſtatt des Lichts Höhe eigentlich den Sinus des Winkels gemeint, unter welchem die Strahlen den äuſſern Rand des Tiſches erleuchten. Er ſezt aber dieſen Sinus $= x$, und kommt ſo wieder auf denſelben vorhin angezeigten Ausdruck. Es ſcheint indeſſen, daß H. Gerlach das oben im 11 §. bewieſene Geſez der Erleuchtung im Sinne gehabt, und dabey nur aus der Acht gelaſſen habe, daß in den analytiſchen Formuln gewöhnlich die zum Halbmeſſer $= 1$ gehörigen trigonometriſchen Linien gebraucht werden; deswegen iſt nicht x, ſondern $\frac{x}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}$ das, was Hr. Gerlach den Sinus der Schiefe nennt, und wenn er hiemit multiplicirt hätte, ſo hätte er die hier vorgetragene Auflöſung ebenfals gefunden.

H. Lamberts Photometrie iſt im Jahr 1760 zu Augsburg im Druck erſchienen, und mir ſind ſeit der Zeit keine neuere Bemühungen in dieſer Wiſſenſchaft bekannt geworden. Da ich ſeit einigen Jahren mit Ausarbeitung der Photometrie beſchäftiget geweſen, und eben dadurch veranlaßt worden bin, im Jahr 1774 der Churfürſtl. Bayerſchen Academie der Wiſſenſchaften zu München einen nunmehro im 9 Bande ihrer Ab-

Abhandlungen abgedruckten Aufſatz: über die erſten Gründe der Photometrie, zu überreichen; ſo hätten bey der kleinen Anzahl photometriſcher Schriften, die wir bis jetzt haben, die vorhin angeführten Abhandlungen allemahl meine Aufmerkſamkeit ſehr erreget, wenn auch nicht die eine derſelben einen Kaeſtner zum Verfaſſer hätte, deſſen Verdienſte um die Mathematik ſchwerlich jemand mehr als ich ſchätzen wird. Denn auſſer den Schriften anderer um der Mathematik verdienter Männer, deren Nahmen zu bekannt ſind, als daß ich ſie hier nennen dürfte, bin ich die Kaeſtneriſchen nicht blos flüchtig durchgegangen, ich glaube vielmehr ſelbige aufs genaueſte durchgedacht zu haben. Wenn ich demnach H. Kaeſtners Aufſatz über die vom H. Gerlach veranlaßte Aufgabe eben ſo genau durchgegangen bin, als ich meine eben angeführte im 9 B. der Schriften der Churf. Bayerſchen Acad. d. Wiſſ. gedruckte Abhandlung ſchrieb; ſo iſt das kein Beweis davon, daß ich nur genigt geweſen wäre, einem Manne von allgemein erkannten Verdienſten zu widerſprechen, wenn ich gleich Gründe anführen muſte, weswegen ich mit Hn. Kaeſtner nicht übereinſtimmte: vielmehr zeuget es davon, daß mir eine Schrift von Kaeſtner allemahl ſehr wichtig ſey, ſie mag übrigens in einem Wochenbladt oder in einer Sammlung von Schriften einer Wiſſenſchafts-Academie ſtehen.

In einer Schrift, die für eine Academie der Wiſſenſchaften beſtimmt iſt, ſoll man freylich ſonſt eben nicht die Anfangsgründe einer ſchon bekannten, und in Anſehung der Grunbegriffe und

Grund-

Grundſätze völlig berichtigten Wiſſenſchaft abhandeln: die nähere Aufklärung und Berichtigung der Gründe einer noch ganz neuen, und wie es ſcheint, noch wenig bekannten Wiſſenſchaft dürfte aber ganz wohl eine der Abſicht einer ſolchen Geſellſchaft angemeſſene Beſchäftigung ſeyn. Herrn Lamberts Photometrie iſt der einzige eigentliche Lehrbegrif, den wir von dieſer Wiſſenſchaft haben, und ich glaube dies ſagen zu können, ohne gegen die Verdienſte ſeines Vorgängers des H. Bouguer ungerecht zu ſeyn. (M. ſ. unten den 54 §.) Allemahl hatte es mir ein beſonderes Vergnügen verurſacht, dem Herrn Lambert in ſeinen ſehr lehrreichen Unterſuchungen zu folgen, und ich hatte für mich ſchon ſehr oft daſſelbe von der Lambertſchen Photometrie geurtheilt, was nur kürzlich Herr Klügel in einem Zuſatz zur Ueberſetzung von Prieſtleys Geſchichte der Optik 312 S. davon gerühmt hat: bey dem allen war es mir noch immer ſo vorgekommen, als wenn einige Aenderung in der Ordnung, wie Hr. Lambert ſeine Unterſuchungen hat nach einander folgen laſſen, gewiſſen Schwierigkeiten leichter abgeholfen hätte, wovon H. Lambert ſelbſt erklärt hatte, daß ihnen nicht leicht auszuweichen ſey, und eben das veranlaßte mich hauptſächlich, die oberwehnte Abhandlung aufzuſetzen.

Herr Lambert berührt bie erwehnten Schwierigkeiten gleich anfangs, wo er die erſten Begriffe und Gründe der Photometrie vorträgt, und hebt ſie allererſt ſpät im IV Theil ſeines Lehrbegrifs, nachdem eine ſehr groſſe Anzahl andrer auch ſonſt

ſehr intereſſanter Unterſuchungen vorangegangen iſt, die gleichwohl zur Hebung der erwehnten Schwierigkeiten nicht alle gleich nothwendig waren. Ich ſetze ein paar Stellen aus H. Lamberts Photometrie her, woſelbſt er dieſe Schwierigkeiten vorläufig anzeigt.

Deeſt phyſica luminis, ſiquidem demonſtratam rationibusque innixam deſideráveris, theoria. Deſunt, quibus lumen metiremur, inſtrumenta. Deſunt denique prima, a quibus cetera deducerentur, principia. Et quod non minus his omnibus geometrae faceſſit operam, dum ſingula inventa connectere, ſuoque ordine debite digerere cupit, *ne in circulum incurrat logicum, vix ſibi cavere poteſt.* (Phot. §. 2.)

Im 7. §. iſt die Rede von der Unſicherheit deſſen, wenn wir vermittelſt des Geſichts die Klarheit erleuchteter Gegenſtände empfinden, und bald eine gröſſere, bald eine geringere Klarheit bey einerley Erleuchtung zu empfinden glauben, weil ſich wegen allerley Nebenurſachen leicht ein betrügliches Urtheil mit einmiſcht. Oft geht es uns dabey nicht beſſer, als wenn uns die Luft bey einerley Grad der Wärme bald kalt bald warm vorkommt. Ohne ſchon die innere Structur des Auges zu kennen, iſt es auch eine ſonſt nicht unbekannte Sache, und jeder, der es noch nicht wüſte, könnte ſich durch leichte Erfahrungen davon überzeugen, daß die kreisförmige Oefnung des

Sterns

Sterns im Auge beym ſchwächern Licht gröſſer, beym ſtärkern Licht aber kleiner werde, weshalb im erſten Fall mehr, im lezten Fall weniger Licht ins Auge kommt, als geſchehen würde, wenn die Oefnung des Sterns unveränderlich wäre. Sollte nicht jenes die geſehene Klarheit, wie ſie empfunden wird, vergröſſern, nnd dieſes ſie vermindern? Daraus entſteht folgende Schwierigkeit:

Utraque haec aberratio, quae oculi de claritate judicium reddit incertius, ſimul aliud poſt ſe trahit incommodum. Ut enim oculi judicium exactius definiri queat, oporteret aberrationis iſtius rationem habere, eamque in calculum inducere, ut inde cetera Photometriae principia ſtabilire liceret. At ſi curatius in rem iſtam inquiramus, principiis hisce jam opus eſſe patebit; pro determinando errore, qui in oculi judicio occurrit. *Quomodo ergo hic vitari poſſit circulus logicus, ſi univerſam Photometriam omni rigore demonſtratam deſideraveris, ego quidem non video.* Quodſi vero ab iſto rigore paullo recedamus, medium dabitur, poſitiones Photometriae ita connectendi, ut certitudine ſua non careant. (Phot. §. 8.) Ich ſetze noch eine Stelle hinzu, womit der IV Theil anfängt.

Eam

Eam jam Photometriae Partem inchoamus, quae ceteris praemittenda fuiſſet, niſi ordinem hunc turbaſſet *circulus ille logicus*, *quem in demonſtrandis Photometriae legibus vix evitabilem eſſe ſupra diximus*, quemque jam claudemus, cum eo ſimus redituri, unde ſimus profecti. (Phot. 784. §.)

Hieraus wird man die Veranlaſſuug erſehen, die ich gehabt habe, in meiner obangeführten Abhandlung einflieſſen zu laſſen: einige Stellen in der Lambertiſchen Photometrie könnten bey dem Leſer den Verdacht erregen, als laſſe ſich beym Vortrage der Photometrie ſchwerlich ein logiſcher Cirkel vermeiden. Wie Hr. Lambert dies verſtanden wiſſen will, weis ich ſehr wohl, nicht anders, als man Herrn Hofrath Kaeſtner verſtehen muß, wenn man in der Vorrede zum erſten Bande ſeiner Aſtronomiſchen Abhandlungen folgendes lieſt:

„Die aſtronomiſchen Kenntniſſe ſind nicht nur „die weitläuftigſten, deren der menſchliche Ver„ſtand fähig iſt, ſondern ſie ſind auch ſo in einan„der verwickelt, daß immer einige zu ihrer Voll„kommenheit andre vorausſetzen, welche andern ſich „doch ohne die erſten nicht erlangen laſſen. — — „Von einer ſolchen Wiſſenſchaft wie ich die Aſtro„nomie

„nomie beſchrieben habe, jemanden dem ſie noch neu „iſt, dergeſtalt zu belehren, daß er das Ganze über„ſieht, begreift wie man zu dieſen Kenntniſſen nach „und nach gekommen iſt, und wie ſie ſicher ſind, ob „man gleich oft vorhergehende durch folgende, die „man erſt aus den vorhergehenden erlangt hat, voll„kommener macht, dazu iſt zuerſt ein kurzer Begriff „der Wiſſenſchaft nöthig. —— Umſtändliche Un„terſuchungen würden nicht nur die Aufmerkſam„keit des Lernenden ermüden und zerſtreuen, ſondern „ſelbſt einander ſo durchkreuzen, daß er nicht allemahl „wiſſen würde, ob er aus feſten Gründen ſchlöſſe, „oder aus Vorausſetzungen, die er jetzo auf Treu „und Glauben annähme, und in der Folge wieder „nur aus dem, was er aus ihnen geſchloſſen hat, „herleiten würde.“

Wenn nun die photometriſchen Kenntniſſe ebenfals wenigſtens zum Theil eben ſo wie die aſtronomiſchen in einander verwickelt ſind; wenn die völlige Berichtigung der Theorie von der Erleuchtung und der wahren Klarheit erleuchteter Gegenſtände, die Theorie von der geſehenen und ſcheinbaren Klarheit derſelben, wie ſie das Auge empfindet, vorausſetzet, und wenn umgekehrt eine völlig berichtigte Theorie von der letztern nicht zu erlangen iſt, ohne die erſtgenannte vorauszuſetzen; ſo konnte mich dies wohl veranlaſſen, darauf zu dencken: ob es

nicht vielleicht auf eine genauere Zergliederung der erſten Grundbegriffe und Grundſätze der Photometrie ankomme, um den erwehnten Schwierigkeiten noch mehr, als bisher geſchehen war, auszuweichen.

Wenn man meine hier vorgetragenen Gedanken 1 - 18. §. mit jener Abhandlung in den Schriften der Churf. Bayerſchen Acad. der Wiſſenſ. vergleichen will, ſo wird man finden, daß ich hier würklich die Begriffe von dem was die Ausdrücke: Erleuchtung, wahre Klarheit erleuchteter Flächen bezeichnen ſollen, noch genauer unterſcheide, als in jenem Aufſatz geſchehen iſt, wo ich mich ohngefehr ſo darüber erkläre, wie Hr. Lambert, (Phot. §. 36. 37.) ob ich gleich glaube, ſchon damahls eben ſo wie jetzt darüber gedacht zu haben, und mit H. Lamberts eigentlichen Meinung noch jetzt einſtimmig zu ſeyn. Um nicht gleich anfangs Unterſuchungen zu veranlaſſen, wobey es ſchlechterdings darauf mit ankommt, was man durch die geſehene Klarheit verſtehen, und nach welchen Geſetzen man ſie meſſen will; halte ich es am beſten zu ſeyn, wenn der Ausdruck: Erleuchtung gebraucht wird, grade nur das, nichts weiter zu verſtehen, als was ich hier im 10 und 11 §. angezeigt habe. Ob nun gleich die wahre Klarheit der Erleuchtung, wie ich das Wort verſtehe, proportional iſt; (17. §.) ſo mögte es doch, um alle Mißdeutung zu vermeiden, beſſer ſeyn, lieber auſſer dem Wort Erleuchtung kein andres zu gebrauchen, weil ohnehin darüber, wie die wahre Klarheit ſowohl erleuchteter Körper unter einander,

als auch mit dem Glanz für ſich leuchtender Körper verglichen werden kann, unten noch Unterſuchungen vorkommen müſſen. Indeſſen liegt auch nichts daran, wenn man hier bis auf weitere Unterſuchung die Ausdrücke: **Erleuchtung** und **Klarheit** mit H. **Lambert** als gleichgültige brauchen will.

Uebrigens glaube ich die den Ausdrücken, **Erleuchtung, Helligkeit, (wahre) Klarheit**, angemeſſenen photometriſchen Grundbegriffe nicht allein in H. **Lamberts** Photometrie, ſondern auch in einer hieher gehörigen Abhandlung vom H. **Leonh. Euler** im VI. Tom. der Hiſtoire de l'Acad. de Berlin p. 280., woraus ich unten mehreres anführen werde, und eben ſo in dem vollſtändigen Lehrbegriff der Optik nach H. **Rob. Smiths** engliſchen, mit Aenderungen und Zuſätzen von H. H. **Kaeſtner** an verſchiedenen Stellen, vornemlich aber im 2 Buch 2 Th. 2 Cap. 155. S. zum Theil auch, wiewohl nicht aufs genaueſte auseinander geſetzt, in des H. **Bouguer** bekannten und unten oft anzuführenden Werk: ſur la gradation de la lumiere, gefunden zu haben. An der aus dem Smith- Kaeſtneriſchen Werk angeführten Stelle, iſt zwar die Rede von der Helligkeit des Bildes auf der Netzhaut im Auge, ſie wird aber, ob ich gleich unten allererſt den Bau des Auges erklären werde, hier ſchon völlig verſtändlich ſeyn, wenn ich ſie ganz herſetze.

„Das Bild im Auge enthält eine gewiſſe Men„ge Lichtſtrahlen, es wird **heller**, wenn es eben „ſo groß bleibt, und mehr bekommt, **dunkler**,

„wenn es unter eben der Gröſſe weniger hat. „Was man bey Körpern Menge der Materie, „Räume, Dichte, nennt, das ſind hier Menge „der Lichtſtrahlen, Gröſſen des Bildes, Hellig„keit. Alſo verhält ſich die Helligkeit, wie die „Menge der Lichtſtrahlen mit der Gröſſe des Bil„des dividirt.“ Man ſetze ſtatt des Bildes im Auge jede andre Fläche, die das Licht auffängt, ſo ſtimmt das mit meinen Vorſtellungen von der Sache völlig überein: nur daß ich wegen der oben ausgeführten Gründe alsdenn, wenn das Licht auf eine Fläche fällt, lieber das Wort: Erleuchtung brauche, und die Klarheit oder Helligkeit der Fläche davon als die Wirkung von der Urſache unterſcheide. Ich finde würklich, daß die zuletzt bemerkte Vorſtellungsart mit H. Eulers Gedanken a. a. O. n. XXV. u. f. 291 S. u. f. zuſammen treffe. Wie man ein Wort definiren will, darauf kommt an ſich nichts an: wenn aber in einer Wiſſenſchaft ein Wort ſchon ſeine beſtimmte Bedeutung hat, oder gute Gründe vorhanden ſind, die ſonſt ſchon bekannte Bedeutung deſſelben noch genauer zu beſtimmen; ſo ſetzt die Vernunftlehre der Freyheit, die man ſonſt hat, einem Wort eine Bedeutung wie man will zu geben, ihre Gränzen.

Der

Der III. Abſchnitt.

Theorie der Erleuchtung wenn das Licht von einer leuchtenden Fläche ausgehet.

34. §.

Die Lichtmenge, welche von der unendlich kleinen Ebene Ll vermittelſt des ſenkrechten Strahls LlqQ ausgehet, verhält ſich zu der Lichtmenge, die vermittelſt eines andern gegen die Ebene geneigten Strahls LlsS davon ausgehet, wie der ganze Sinus zum Sinus des Ausflußwinkels. 1 Fig.

Beweis. Man kann Ll als ein unendlich kleines Rechteck betrachten, deſſen eine Seitenlinie Ll, die andre aber durch l auf der Ebene WLQ ſenkrecht iſt, ſo hat jeder phyſiſche Strahl LlsS die Figur eines Parallelepipedi. Durch l ſey eine Ebene auf den Seitenlinien deſſelben ſenkrecht geſetzt, wovon das Stück $l\lambda$ zwiſchen den Gränzen des phyſiſchen Strahls LlsS enthalten iſt, ſo wie zwiſchen den Gränzen eben dieſes Strahls das unendlich kleine Stück Ss, der das Element Ll umgebenden Kugelfläche liegt. Zwiſchen den Gränzen des ſenkrechten Strahls liegt das Element Qq der Kugelfläche, und es iſt $Qq = Ll$, $Ss = l\lambda$. Weil nun die eigene Dichtigkeit des Lichts für alle Strahlen gleich groß angenommen wird, (2. 14. §.) ſo iſt das Verhältniß der Lichtmengen, die vermit-

telſt des ſenkrechten, und unter dem Winkel lLS ausgehenden Strahls der Kugelfläche zugeführet, werden $= Qq : Ss = Ll : l\lambda = 1 : \sin lLS$.

35. §.

1 Fig. Die geſammte Lichtmenge, welche das leuchtende Element Ll nach allen Seiten in dem Raum einer Halbkugel umher ſtrahlet, iſt gegeben: man ſoll die Lichtmenge finden, die ein Element ST der von Ll erleuchteten Halbkugelfläche OQW auffängt, deſſen Abſtand vom Pol Q der Halbkugel durch den Winkel $QLS = \alpha$ gegeben iſt.

Aufl. Die Fläche des Elements ST ſey $= \omega^2$, die darauf fallende Lichtmenge $= l$, und die ganze in dem Raum der Halbkugelfläche umher ſtrahlende Lichtmenge $= \Lambda$. Ferner ſey $QR = \omega^2$ ein Element der Kugelfläche in ihrem Pol, worauf das Licht ſenkrecht fällt, die Lichtmenge die es auffängt $= \lambda$, ſo iſt $l = \lambda \,.\, \cos\alpha$. (34. §.) Wie nun das Element QR unter allen übrigen eben ſo großen Elementen die gröſte Erleuchtung empfängt, ſo kann man fragen: wie groß ein zu eben der Axe LQ gehöriges Kugelſegment ſeyn müſte, wenn die ganze von Ll umher ſtrahlende Lichtmenge Λ daſſelbe gleichförmig und eben ſo ſtark erleuchten ſollte, als das Element QR erleuchtet iſt. Um dies zu finden, ſetze man den Halbmeſſer $LQ = r$, ſo iſt die Halbkugelfläche $QOW = 2\pi r^2$, und wenn man das geſuchte Kugelſegment $= 2n\pi r^2$ ſetzt, ſo kommt es nur darauf an, die Zahl n zu finden. Vermöge der angenommenen gleichförmigen Erleuchtung des Segments hätte man $\omega^2 : 2n\pi r^2$

$= \lambda$

$= \lambda : \Lambda$, alſo $\lambda = \frac{\omega^2 . \Lambda}{2n\pi r^2}$, mithin $l = \frac{\omega^2 . \Lambda \cos\alpha}{2n\pi r^2}$.
In der 1 Figur ſtelle ST die eine Seitenlinie des Elements der Halbkugelfläche vor, welches dieſe Lichtmenge l auffängt, ſo iſt dieſe Seitenlinie $= r d\alpha$. Die andre Seitenlinie SZ ſey ein Element eines zur Axe LQ gehörigen Parallelkreiſes, wozu ein Halbmeſſer $= r \sin\alpha$ gehört. Wenn alſo der Winkel am Pol SQZ $= d\phi$ geſetzt wird, ſo hat man $\omega^2 = r^2 d\phi\, d\alpha \sin\alpha$, und $l = \frac{\Lambda . d\phi d\alpha \sin\alpha \cos\alpha}{2n\pi}$.
Wird dies Differential ſo integrirt, daß man allein ϕ veränderlich annimmt, und nach der Integration $\phi = 2\pi$ ſetzt; ſo findet man die Lichtmenge, welche die Zone zwiſchen zweenen Parallelkreiſen durch S und T auffängt. Dieſe Lichtmenge ſey $= dL$, ſo iſt $dL = \frac{\Lambda . d\alpha \sin\alpha \cos\alpha}{n}$. Dies Differential integrire man von neuen ſo, daß es mit α zugleich verſchwindet, ſo findet man die Lichtmenge L, welche das Segment KQS auffängt, mithin $L = \frac{\frac{1}{2} \Lambda . \sin \alpha^2}{n}$. Wie nun dieſer Ausdruck die geſammte Lichtmenge giebt, welche die Halbkugelfläche QOW auffängt, wenn $\alpha = 90°$ geſetzt wird; ſo muß $L = \Lambda$ ſeyn, wenn $\sin\alpha = 1$ iſt, und das giebt $\Lambda = \frac{\frac{1}{2}\Lambda}{n}$, mithin $n = \frac{1}{2}$. Dieſer Werth ſtatt n gebraucht giebt die geſuchte Lichtmenge $l = \frac{\omega^2 . \Lambda \cos\alpha}{\pi r^2}$.

Ein zur Axe LQ gehöriges Kugelſegment, welches von der geſammten Lichtmenge Λ gleichförmig, und eben ſo ſtark als das Element QR erleuchtet würde, müſte $= \pi r^2$ ſeyn, mithin ſo groß, als der gröſte Kreis der Kugel, oder die Hälfte der Halbkugelfläche. Auch hat man $L = \Lambda \sin\alpha^2$.

Man ſetze den Glanz der unendlich kleinen Ebene $Ll = s$, ſo iſt $s = \frac{\Lambda}{Ll}$, und $\Lambda = s \,.\, Ll$. (16. §.), alſo auch $l = \frac{s \,.\, Ll \,.\, \omega^2 \cos\alpha}{\pi r^2}$, oder $l = \frac{s \,.\, Ll \,.\, \omega^2 \,.\, \sin lLS}{\pi \,.\, LS^2}$. Ferner iſt $L = \Lambda \sin\alpha^2 = s \,.\, Ll \,.\, \sin\alpha^2$, mithin $\frac{s \,.\, Ll}{\pi}$ die Lichtmenge, welche ein Kugelſegment KQS auffängt, deſſen Axe der ſenkrecht ausgehende Strahl LQ, und deſſen ſcheinbarer Halbmeſſer $QLS = Ang \,.\, \sin \,.\, \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ wäre, wenn es aus L geſehen Würde. Nimmt man nun $\frac{s}{\pi} = S$ an, ſo bleibt S eine Zahl, die dem Glanz des Elements Ll proportional iſt, und es iſt $L = \pi S \,.\, Ll \,.\, \sin\alpha^2$, alſo $\pi \,.\, S = s$ die Lichtmenge, welche eine Fläche $= 1^2$ nach allen Seiten umher ſtrahlen würde, wenn ſie mit Ll einerley Glanz hätte, ſo wie $\pi \,.\, S \,.\, Ll$ die Lichtmenge iſt, welche Ll in dem Raum einer Halbkugel verbreitet. Wird alſo in der gefundenen Formul $s = \pi S$ geſetzt; ſo

iſt

iſt $l = \frac{S . Ll . \omega^2 \sin lLS}{LS^2}$, und die Erleuch- tung, welche das unter dem Winkel lLS ausflieſſen- de Licht auf ein Element $= \omega^2$ der Kugelfläche wirft, das von dieſem Licht beſchienen wird, $= \frac{S . Ll . \sin lLS}{LS^2}$.

Was in dieſen Formuln S heiſt, kann in einem völlig ähnlichen Verſtande für das Maaß des Glanzes des leuchtenden Elements Ll angenom- men werden, in welchem bisher s das Maaß des Glanzes geheiſſen hat: nur iſt alsdenn dies S nicht die ganze Lichtmenge, welche eine eben ſo ſtark glän- zende Fläche, wenn ſie $= 1^2$ wäre, nach allen Sei- ten ausbreiten würde; ſondern ein Theil von ihr, der ſich zur ganzen nach allen Seiten umher ſtrah- lenden Lichtmenge, wie $1 : \pi$ verhält. Soll nun $S = 1$ ſeyn, wenn der Glanz der leuchtenden Fläche $= 1$ geſetzt wird; ſo heiſt das: denjenigen Theil der ganzen von einer gleichförmig und eben ſo ſtark glän- zenden Fläche $= 1^2$ nach allen Seiten umher ſtrah- lenden Lichtmenge $= 1$ ſetzen, der ſich zu dieſer gan- zen Lichtmenge, wie $1 : \pi$ verhält.

36. §.

Die unendlich kleine Ebene Ll wirft ihr Licht auf eine Ebene DE: man ſucht die Erleuchtung eines Elements Pp deſſen Stel- le auf dieſer Ebene gegeben iſt. 7 Fig.

Aufl. Es ſey LM auf DE ſenkrecht, und Mm ein Element der Ebene DE, worauf das Licht

ſenkrecht fällt; ferner ſey mit dem Halbmeſſer LM um L diejenige Halbkugelfläche BAC beſchrieben, worin das von Ll kommende Licht ſich ausbreitet: ſo iſt Mm zugleich ein Element dieſer Kugelfläche, mithin empfängt es eine Erleuchtung $= \frac{S \,.\, Ll \,.\, \text{ſin}\, CLM}{LM^2}$. (35. §.) Weil nun die Stelle des Elements Pp gegeben iſt, ſo iſt MP gegeben, und man hat $\text{ſin}\, LPD = \frac{LM}{\sqrt{(LM^2 + MP^2)}}$. Wird ferner mit dem Halbmeſſer LP um L eine Kugelfläche beſchrieben, wovon das Element $P\pi$ zwiſchen den Gränzen des Raums $LlPp$ liegt, worin die geſammte von Ll auf Pp fallende Lichtmaſſe enthalten iſt; ſo erhellet, daß $P\pi$ eben ſo viel Licht anffangen würde, als Pp auffängt: mithin iſt die über Pp verbreitete Lichtmenge $= \frac{S \,.\, Ll \,.\, P\pi \,.\, \text{ſin}\, CLP}{LP^2}$, (35. §.) oder auch eben dieſe Lichtmenge $= \frac{S \,.\, Ll \,.\, Pp \,.\, \text{ſin}\, LPD \,.\, \text{ſin}\, CLP}{LP^2}$, und die Erleuchtung, welche Pp von Ll empfängt, die Dichtigkeit des über Pp verbreiteten Lichts $= \frac{S \,.\, Ll \,.\, \text{ſin}\, CLP \;\text{ſin}\, LPD}{LP^2}$.

37. §.

7 Fig. Von zwoen unendlich kleinen gleich ſtark glänzenden Ebenen Ll, Pp, ſchickt jede der andern einerley Menge Lichts zu, es mag die eine, oder die andre als leuchtend angenommen werden.

Be-

Beweis. In beyden Fällen, es mag Ll oder Pp die leuchtende Fläche ſeyn, wirft eine Fläche auf die andre die Lichtmenge =

$$\frac{S \,.\, Ll \,.\, Pp \,.\, \sin CLP \sin LPD}{LP^2}$$, weil ſich nur die Einfalls- und Ausflußwinkel verwechſeln. Mithin iſt die Menge Lichts, welche eine Ebene der andern zuſchickt, in beyden Fällen einerley.

Wenn alſo beyde unendlich kleine Ebenen gleich groß ſind, ſo iſt auch die Erleuchtung in beyden Fällen einerley: widrigenfals verhält ſich die Erleuchtung, wie die erleuchtende Fläche. Wenn Ll leuchtend iſt, ſo iſt die Erleuchtung über

$$Pp = \frac{S \,.\, Ll \,.\, \sin CLP \sin LPD}{LP^2}$$; wenn aber Pp leuchtend iſt, ſo iſt die Erleuchtung über Ll =

$$\frac{S \,.\, Pp \,.\, \sin CLP \,.\, \sin LPD}{LP^2}$$, und die erſte verhält ſich zur zweyten wie $Ll : Pp$.

38. §.

1) Wenn das Element Mm das von Ll ausgehende Licht ſenkrecht auffängt; ſo verhält ſich die Erleuchtung, welche Mm von Ll empfängt, wie das Product der ſcheinbaren Gröſſe des leuchtenden Elements Ll, das Auge in M angenommen, in den Glanz des Elements. 7 Fig.

Beweis. Die unendlich kleine auf LM ſenkrechte Ebene $l\lambda$ zwiſchen den Gränzen der auf Mm fallenden Lichtmaſſe iſt auch als ein Element einer mit

mit dem Halbmeſſer Ml beſchriebenen Kugelfläche zu betrachten, und ſo iſt $\frac{L\lambda}{LM^2} = \frac{Ll \,.\, \sin CLM}{LM^2}$ das Maaß des coniſchen oder pyramidenförmigen Raums LMl, (4. §.) und der ſcheinbaren Gröſſe des Elements Ll aus M geſehen. (32. §.) Es war aber die Erleuchtung dieſes Elements Mm = $\frac{S \,.\, Ll \,.\, \sin CLM}{LM^2}$, (36. §.), alſo verhält ſich die Erleuchtung wie $\frac{S \,.\, l\lambda}{LM^2}$, oder wie das Product der ſcheinbaren Gröſſe des Elements Ll aus M geſehen, in den Glanz des Elements.

2) Wenn das Element Pp das von Ll ausgehende Licht ſchief auffängt, ſo iſt die Erleuchtung dem Product der ſcheinbaren Gröſſe des leuchtenden Elements aus P geſehen in den Glanz des Elements und den Sinus des Einfallswinkels proportional.

Beweis. Die ſcheinbare Gröſſe des Elements Ll aus P geſehen iſt = $\frac{Ll \,.\, \sin CLP.}{LP^2}$ (4. 32. §.) und LPD iſt der Einfallswinkel, mithin das Product der ſcheinbaren Gröſſe des Elements Ll aus P geſehen in den Glanz des Elements und den Sinus des Einfallswinkels = $\frac{S \,.\, Ll \,.\, \sin CLP \,.\, \sin LPD}{LP^2}$,

und

und dieſem Ausdruck iſt die Erleuchtung, welche *Pp* von *Ll* empfängt, proportional. (36. §)

Dieſemnach iſt bey einerley Glanz, einerley Einfallswinkel und einerley ſcheinbaren Gröſſe des leuchtenden Elements die Erleuchtung einerley: alſo auch die auffallende Strahlenmenge, wenn die Gröſſe des erleuchteten Elements einerley iſt.

Das Element M*m* wird von L*l* eben ſo erleuchtet, als wenn L*l* nach M*m* eine Anzahl Lichtkegel zuſammen gehender Strahlen, wie L*l*M, L*lm* ſchickte, die der Gröſſe des Elements M*m* proportional wäre: jeder Lichtkegel aber eine Lichtmaſſe auf M*m* brächte, die ſich wie die ſcheinbare Gröſſe des Elements L*l* aus M geſehen verhielte. Wird dagegen ein Element, wie P*p* ſchief erleuchtet, ſo iſt die Anzahl der auffallenden Lichtkegel L*l*P dem Product der Gröſſe des Elements in den Sinus des Einfallswinkels proportional.

39. §.

Die Lichtmenge, welche das leuchtende Element L*l* der unendlich kleinen Ebene P*p* zuſchickt, verhält ſich wie das Product der ſcheinbaren Gröſſe des erleuchteten Elements P*p* aus L geſehen in den Sinus des Ausflußwinkels, den Flächen-Inhalt und Glanz des leuchtenden Elements.

Beweis. Die erwehnte ſcheinbare Gröſſe iſt = $\frac{Pp \,.\, \sin LPD}{LP^2}$; (32. §.) Dieſe in den Sinus des

Aus-

Ausflußwinkels den Flächeninhalt und Glanz des leuchtenden Elements Ll multiplicirt giebt $\frac{S . Ll . Pp . \sin LPD . \sin CLP}{LP^2}$, und die auf Pp fallende Lichtmenge verhält ſich wie das angezeigte Product. (36. §.)

Bey einerley ſcheinbaren Gröſſe des erleuchteten Elements alſo, und einerley Ausflußwinkel iſt die auffallende Lichtmenge einerley, wenn auch die Gröſſe des leuchtenden Elements nebſt dem Glanz deſſelben einerley iſt.

Man kann ſich auch vorſtellen, das Element Pp werde von Ll ſo erleuchtet, als wenn jeder Punct L, ω, l, des leuchtenden Elements nach Pp einen Lichtkegel LPp, ωPp, lPp aus einander fahrender Strahlen ſchickte, da dann die Anzahl dieſer Lichtkegel dem Product der Gröſſe des leuchtenden Elements in den Sinus des Ausflußwinkels proportional iſt.

40. §.

6Fig. Wenn eine in allen ihren Elementen gleich ſtark glänzende Fläche AGB von endlicher Gröſſe, die übrigens eben oder wie man will gekrümmt ſeyn mag, die unendlich kleine Ebene Mm erleuchtet; ſo iſt die Erleuchtung, welche Mm empfängt, eben ſo groß als ſie ſeyn würde, wenn zwiſchen den Gränzen des auffallenden Strahlenkegels AMB eine andre eben ſo ſtark glänzenden Fläche HOK befindlich wäre, die ihr Licht nach Mm ſchickte.

Beweis.

Beweis. Es ſey L*l* ein Element der leuchtenden Fläche AGB, ſo iſt zwiſchen den Gränzen der auf M*m* fallenden Strahlen-Pyramide LM*l* ein Element Q*q* der Fläche HOK enthalten, und beyde Element L*l*, Q*q*, haben einerley ſcheinbare Gröſſe aus M geſehen; auch würde das Licht von Q*q* auf M*m* unter eben dem Winkel fallen, unter welchem es von L*l* auffällt. Mithin würde M*m* von Q*q* ſo ſtark erleuchtet ſeyn, als von L*l*, und von Q*q* eben ſoviel Licht, als von L*l* empfangen (38. §. n. 2.) Wäre aber die ganze Fläche AGB in unendlich kleine Elemente wie L*l* getheilt, ſo würden die von allen dieſen Elementen auf M*m* fallenden Strahlen-Pyramiden die Fläche HOK in eben ſoviele Elemente theilen, und jedes Element in AGB würde mit dem dazu gehörigen Element in HOK einerley ſcheinbare Gröſſe haben, das Auge in M angenommen; auch würde der Einfallswinkel für jede zwey dergleichen zuſammen gehörige Elemente einerley ſeyn. Mithin würde jedes Element in HOK eben ſoviel Licht, als das dazu gehörige Element in AGB, nach M*m* werfen; folglich muß auch die Summe der Lichtmengen, welche alle Elemente zuſammen in HOK auf M*m* werfen, ſo groß ſeyn, als die Summe der Lichtmengen, welche M*m* von allen Elementen in AGB zuſammen empfängt, oder die ganze Fläche HOK muß eben ſoviel Licht, als die ganze Fläche AGB nach M*m* werfen: mithin die Erleuchtung in beyden Fällen gleich groß ſeyn.

41. §.

Wenn die unendlich kleine Ebene M*m* leuchtend iſt, und ihr Licht auf eine Fläche AGB 6 Fig.

AGB von willkührlicher Geſtalt und Gröſſe wirft; ſo fängt AGB eine eben ſo groſze Lichtmenge auf, als jede andre Fläche HOK zwiſchen den Gränzen des von M*m* auf AGB fallenden Strahlenkegels auffangen würde.

Beweis. Es ſey wiederum L*l* ein Element der Fläche AGB, und zwiſchen den Gränzen der auffallenden Strahlen-Pyramide LM*l* ſey das Element Q*q* der Fläche HOK enthalten, ſo haben die Elemente L*l*, Q*q*, einerley ſcheinbare Gröſſe aus M geſehen, und für beyde iſt der Ausflußwinkel einerley, mithin auch die auffallende Lichtmenge. (39. §.) Man kann aber die ganze Fläche AGB in Elemente wie L*l* theilen, ſo wird durch die auffallenden Strahlen-Pyramiden HOK in eben ſo viele Elemente getheilt. Für jedes Paar zuſammengehöriger Elemente iſt die ſcheinbare Gröſſe und der Ausflußwinkel einerley, mithin auch die auffallende Lichtmenge: (39. §.) alſo muß die ganze Fläche HOK eine eben ſo groſſe Lichtmenge als AGB auffangen.

42. §.

6 Fig. Jede leuchtende Fläche AGB oder HOK wirft ſoviel Licht auf eine unendlich kleine Ebene M*m*, als die letztere, wenn ſie leuchtend und eben ſo ſtark glänzend wäre, auf erſtere werfen würde.

Beweis. Um den Mittelpunct M ſey eine Kugelfläche mit dem Halbmeſſer = 1 beſchrieben, wovon das Stück DFE zwiſchen den Gränzen des auf M*m* fallenden Strahlenkegels AMB liegt; ſo wirft DFE ſoviel Licht auf M*m* als AGB oder HOK dahin

hin werfen würden. (40. §.) Umgekehrt, wenn Mm leuchtend iſt, ſo wirft Mm ſoviel Licht auf AGB oder HOK, als Mm auf DFE werfen würde. (41. §.) Nun ſey Nn ein Element von DFE, ſo empfängt Mm von Nn die Strahlen-Menge S. Mm. Nn. ſin. NMm, und dieſer Ausdruck für alle Elemente in DFE ſummirt, giebt die auf Mm fallende Strahlenmenge = S. Mm. ∫Nn ſin NMm. Umgekehrt würde Mm auf Nn die Strahlenmenge S. Nn. Mm. ſin NMm werfen, mithin auf alle Elemente in DFE zuſammen die Strahlenmenge = S. Mm. ∫Nn. ſin NMm, welche der vorigen gleich iſt.

Die Richtigkeit des Satzes läßt ſich auch ohne alle Rechnung ſo überſehen. Jedes Element Ll wirft auf Mm ſoviel Licht als Mm bey einerley Glanz auf Ll werfen würde. (37. §.) Mithin, müſſen alle Elemente Ll zuſammen auf Mm ſoviel Licht werfen, als Mm über alle Elemente Ll zuſammen verbreiten würde: Das heiſt Mm empfängt von der ganzen Fläche AGB ſoviel Licht, als umgekehrt Mm der ganzen Fläche AGB zuſchicken würde.

43. §.

Jede leuchtende Fläche *AB* wirft auf jede andre Fläche *CD* ſoviel Licht, als umgekehrt letztere, wenn ſie leuchtend und eben ſo ſtark glänzend als *AB* wäre, auf *AB* werfen würde. Fig. 8

Beweis. Auf jedes Element Mm von CD wirft AB ſoviel Licht, als umgekehrt Mm auf AB werfen würde. (42. §.) Mithin wirft AB auf alle Elemente Mm zuſammen ſoviel Licht als letztere

zuſammen umgekehrt auf AB werfen würden: d. i. AB wirft auf CD ſoviel Licht, als umgekehrt CD auf AB werfen würde.

Der Satz im 40 §. iſt wahr, man mag ihn von der Erleuchtung, oder von der Strahlenmenge verſtehen, welche die eine oder die andre von den leuchtenden Flächen AGB, oder HOK auf M*m* wirft. Denn wofern jede dieſer Flächen nach M*m* gleich viel Licht ſchickt, ſo iſt auch M*m* in beyden Fällen gleich ſtark erleuchtet, weil die Erleuchtung gefunden wird, wenn man die Strahlenmenge, welche auf M*m* fällt, durch dieſe unendlich kleine Fläche M*m* dividirt.

In den dreyen letzten Sätzen des 41. 42. 43. §. iſt nur von der Menge des Lichts die Rede, ſo eine Fläche der andern zuſchicken würde; keinesweges von der Erleuchtung. Dies iſt um deswillen zu erinnern nöthig, weil die Begriffe von dem, was Erleuchtung, und Menge des auffallenden Lichts heiſt mit einander ſehr oft verwechſelt werden.

44. §.

7 Fig. Die Halbkugelfläche *BAC* iſt leuchtend, alle ihre Elemente haben einen gleich ſtarken Glanz, und ſie wirft ihr Licht auf das Element *Ll* welches im Mittelpunct der Halbkugel auf ihrer Axe *LA* ſenkrecht iſt: man ſucht die Erleuchtung des Elements *Ll*, welche es von jedem gegebenen Segment *MAN* der Kugelfläche empfängt, das zur Axe *AL* gehört.

Aufl.

Aufl. Wenn MN und *mn* ein Paar zur Axe AL gehörige Parallelkreiſe vorſtellen, deren Entfernung von einander unendlich klein iſt; ſo liegt zwiſchen beyden eine Zone M*mn*N der Kugelfläche, und von allen Puncten dieſer Zone fällt das Licht auf L*l* unter einerley Einfallswinkel CLM, ſo wie überall der Ausflußwinkel $= 90°$ iſt. Der Flächen-Inhalt des Segments MAN iſt dem 621. §. Geom. gemäß $= 2\pi r^2 \text{ſin} v\alpha$, wenn ALM $= \alpha$, und der Kugel Halbmeſſer $= r$ geſetzt wird, alſo die Fläche der Zone MN*nm* $= 2\pi r^2 \delta\alpha \text{ſin}\alpha$. Ferner ſey die Fläche des Elements L*l* $= \omega^2$, ſo iſt überdem der Einfallswinkel CLM $= 90° - \alpha$, und man findet die Lichtmenge, welche die Zone MN*nm* nach L*l* ſchickt, $= 2\omega^2 . S . \pi . d\alpha \text{ſin}\alpha \text{ coſ}\alpha$. (36. §.) Das Integral hievon ſo genommen, daß es mit $\alpha = o$ verſchwindet, iſt $= \omega^2 . S . \pi . \text{ſin}\alpha^2$, und daſſelbe drückt die geſammte Lichtmenge aus, welche das Segment MAN nach L*l* ſchickt. Daraus findet man die Erleuchtung, welche L*l* empfängt, $= S . \pi . \text{ſin}\alpha^2$.

Wenn alſo ALM $= \alpha = 90°$ genommen wird, ſo iſt für die völlige Halbkugel die geſuchte Erleuchtung $= \pi S$.

Weil die Fläche des Kreiſes MN $= \pi r^2 \text{ſin}\alpha^2$ iſt, und die Erleuchtuug, welche das Segment MAN nach L*l* ſchickt, $= \pi S \text{ſin}\alpha^2$ war, ſo iſt ſelbige der Grundfläche dieſes Segments proportional, nicht der Kugelfläche des Segments.

Könnten die Strahlen alle ſenkrecht auf L*l* fallen, ſo wäre die Erleuchtung, welche jede Zone M*mn*N dahin ſchickte, $= 2S\pi d\alpha \text{ſin}\alpha$, und die geſammte von dem Segment MAN dahin fallende Erleuch-

tung wäre $= 2S\pi\text{ſin}v\alpha$, mithin wäre ſie der Fläche des Segments MAN proportional. Sie iſt aber wegen der Schiefe der Einfallswinkel $= \pi S\text{ſin}\alpha^2$, und weil man $\text{ſin}\alpha^2 = 1 - \text{coſ}\alpha^2 = 1 - (1 - \text{ſin}v\alpha)^2 = 2\text{ſin}v\alpha - \text{ſin}v\alpha^2$ erhält, ſo iſt eben dieſe Erleuchtung, welche Ll von dem Segment MAN empfängt, $= 2\pi S\text{ſin}v\alpha - \pi S\text{ſin}v\alpha^2$. Der poſitive Theil wäre die Erleuchtung, wenn die Schiefe der Einfallswinkel die Erleuchtung nicht ſchwächte, und die von dieſer Urſache herrührende Verminderung iſt $= \pi S\text{ſin}v\alpha^2$. Dieſer negative Theil verſchwindet in Vergleichung des poſitiven, wenn α unendlich klein angenommen wird.

So lange demnach ein ſolches Segment wie $aA\alpha$ als unendlich klein betrachtet werden kann, ſo lange iſt die Erleuchtung der Fläche deſſelben proportional.

45. §.

Die Strahlemenge, welche das Segment MAN auf Ll wirft, iſt $= \omega^2 . \pi S\text{ſin}\alpha^2$, und eben ſoviel Licht würde das Element Ll, wenn es leuchtend und eben ſo ſtark glänzend wäre, über die Fläche des Segments MAN verbreiten. (42. §.) Dieſe Strahlenmenge iſt alſo ebenfals nicht der Fläche des Kugelſegments MAN, ſondern der Grundfläche deſſelben MON proportional, und diejenige Lichtmenge, welche das Element Ll über die völlige Halbkugelfläche verbreitet, iſt $= \omega^2 . \pi . S$.

Wenn alles Licht, das von jedem Punct des Elements Ll kommt ſich ungehindert nach allen Seiten ausbreiten könnte, ohne daß wegen der Undurchſichtigkeit des Elements das ſchief ausgehende

hende Licht Abgang litte, ſo wäre die Strahlenmenge, welche die Zone MmnN auffienge, =

$$\frac{\omega^2 . S . MmnN}{r^2} = 2\omega^2\pi S d\alpha \sin\alpha,$$

und die geſammte Strahlenmenge, welche das Segment MAN auffienge, wäre = $2\omega^2\pi S \sin v\alpha$, mithin eben ſo groß, als die Strahlenmenge, die MAN nach Ll ſchicken würde, wenn die Schiefe der Einfallswinkel das Licht nicht ſchwächte, ſo wie es hier die Schiefe der Ausgehungswinkel ſchwächt: die von Ll ausgehende auf MAN fallende Strahlenmenge wäre der Fläche des Segments MAN proportional, wie auch für ſich klar iſt. Wie nun die auf MAN würklich fallende Strahlenmenge $= \omega^2\pi S \sin\alpha^2 = \omega^2\pi S\,(2\sin v\alpha - \sin v\alpha^2)$ iſt, ſo zeigt hier der negative Theil die von der Schiefe der Ausflußwinkel herrührende Verminderung der Strahlenmenge an. Wenn dieſe Urſache das Licht nicht ſchwächte, ſo wäre die Lichtmenge, welche Ll über die völlige Halbkugel verbreitete, $= 2\omega^2\pi S$, mithin doppelt ſo groß, als ſie wegen der Schiefe der Ausflußwinkel iſt.

46. §.

Die Menge Lichts, welche ein einziger leuchtender Punct L (1 Fig.) um ſich her verbreitet, mithin auch diejenige, ſo er auf einen beſtimmten Theil der um denſelben beſchriebenen Kugelfläche wirft, iſt oben im I. und II. Abſchnitt als eine endliche Gröſſe in der Rechnung betrachtet worden; dies war daſelbſt verſtattet, weil die von dem einzigen Punct ausgehende Lichtmenge allein in Betrachtung kam, und die geſammte von einem ſol-

chen Punct ausgehende Lichtmenge nur mit ihren Theilen verglichen ward. Geſetzt, daß es auch in der Natur keine leuchtende Puncte gäbe, worauf man jene Rechnungen anwenden könnte, ſo ließ ſich doch eine kleine Lichtflamme ohne ſehr zu fehlen, als ein leuchtender eben ſo ſtark glänzender Punct betrachten, als alle in der Lichtflamme zu unterſcheidende Puncte zuſammen genommen: auch war die Menge Lichts, welche eine ſolche Flamme nach allen Seiten um ſich her verbreitet, und die ſie auf jede von ihr erleuchtete Fläche wirft, würklich endlich. Hier wird die Menge Lichts, welche ein Ele-
8 Fig. ment einer leuchtenden Fläche, wie L*l*, um ſich her verbreitet, als unendlich klein in der Rechnung betrachtet, und zwar dies in Vergleichung mit derjenigen Menge, welche die ganze Fläche, wozu das Element gehört, nach allen Seiten verbreitet: Von dieſer zuletzt erwehnten Lichtmenge fällt wiederum auf jedes Element der erleuchteten Fläche nur ein unendlich kleiner Theil. Es ſey AB die leuchtende, CD die erleuchtete Fläche, ſo iſt die Lichtmenge, welche jedes Element M*m* der Fläche CD von AB empfängt, ein unendlich kleiner Theil von derjenigen, welche die ganze Fläche CD von AB empfängt. Wiederum iſt diejenige Lichtmenge, welche M*m* von einem Element L*l* der Fläche AB empfängt, ein unendlich kleiner Theil von derjenigen Lichtmenge, welche die ganze Fläche AB auf das Element M*m* wirft. Wenn M die geſammte Lichtmenge iſt, welche AB auf CD wirft, ſo iſt *d*M diejenige Menge, welche M*m* von AB empfängt, und $\frac{dM}{Mm}$ die Erleuchtung des

Elements Mm, welche von AB herrührt. Damit dieſe endlich ſey, müſſen dM und Mm unendlich kleine Gröſſen ſeyn, die zu einerley Ordnung gehören. Man ſetze alſo $\frac{dM}{Mm} = I$, ſo iſt I die Erleuchtung des Elements Mm, und $dM = I \cdot Mm$. Ob nun gleich dieſe Lichtmenge in Vergleichung mit derjnigen, welche AB auf CD wirft, unendlich klein iſt; ſo iſt doch in Vergleichung mit jener wiederum diejenige unendlich klein, welche ein Element Ll der Fläche AB auf Mm wirft. Wird alſo L ſtatt $I \cdot Mm$, oder ſtatt dM geſchrieben, ſo wirft Ll auf Mm die Lichtmenge $dL = dI \cdot Mm$, und die Erleuchtung welche Mm von Ll empfängt, iſt $\frac{dL}{Mm} = dI$, woraus $I = \int \frac{dL}{Mm}$ gefunden wird. So begreift man, wie die Erleuchtung, welche Mm von AB empfängt, als die Summe der Erleuchtungen betrachtet werden kann, welche alle Elemente der Fläche AB nach Mm ſchicken, wie alſo I durch die Integralrechung gefunden werden könne, wenn $dI = \frac{dL}{Mm}$ bekannt iſt. Aus I wird alsdenn ferner die Strahleumenge $M = \int I \cdot Mm$ gefunden.

47. §.

Ob nun gleich dieſer Vorſtellung gemäß die Lichtmenge, welche ein Element einer leuchtenden Fläche um ſich her verbreitet, als unendlich klein in der Rechnung zu betrachten iſt; ſo iſt doch das, was bisher der Glanz des Elements genannt, und in

 den

den Formuln mit S bezeichnet iſt, als eine endliche Gröſſe in der Rechnung zu betrachten. Eigentlich hat es damit folgende Bewandniß. Man ſtellt ſich vor, daß von jedem Punct L des Elements L*l* nach allen Seiten Strahlen ausgehen, und zwar ſo, daß für jeden Punct dieſe nach allen Seiten ausgehende Strahlenmenge einerley iſt, weil wenigſtens für einerley Element alle dazu gehörige Puncte als gleich ſtark glänzend angenommen werden, geſetzt daß auch verſchiedene Elemente der ganzen leuchtenden Fläche nicht einerley Glanz hätten. Iſt dieſe von jedem Punct ausgehende Strahlenmenge doppelt ſo groß, ſo iſt das Element doppelt ſo ſtark glänzend, und überhaupt verhält ſich der Glanz des Elements wie die von jedem Punct des Elements ausgehende Strahlenmenge. Ob nun gleich wegen der Schiefe der Ausflußwinkel das Element nur halb ſoviel Licht in dem Raum einer Halbkugel verbreiten kann, als geſchehen würde, wenn das Element vollkommen durchſichtig wäre, und jeder Punct ſein Licht nach allen Seiten frey und gleichförmig verbreiten könnte; ſo iſt doch beym doppelten Glanz dieſe durch den Raum einer Halbkugel verbreitete Lichtmenge, der Schiefe der Ausflußwinkel ungeachtet, doppelt ſo groß, und beym n fachen Glanz n mahl ſo groß, als beym einfachen Glanz. Sind zwey gleich groſſe Elemente ungleich ſtark glänzend, und verhält ſich der Glanz des erſten zum Glanz des zweyten, wie $m : n$, ſo iſt der Glanz des erſten $= \frac{m}{n}$, wenn der Glanz des leztern $= 1$ angenom-

nommen wird. Setzt man alsdenn $\frac{m}{n} = S$, ſo iſt S eine Zahl, keine Linie oder Fläche. Es iſt nemlich S der Exponent des Verhältniſſes der Strahlenmenge, welche das erſte Element in den Raum einer Halbkugel verbreiten würde, zur Strahlenmenge, welche das zweyte Element in einen gleichen Raum ausbreitet. Wenn alſo gleich die Strahlenmenge, welche ein ſolches Element durch den Raum einer Halbkugel ausbreitet, hier als unendlich klein in der Rechnung vorkommt; ſo kann doch das Verhältniß der Strahlenmengen, welche zwey gleich groſſe Elemente auf dieſe Art ausbreiten, jedes endliche ſeyn, und daſſelbe iſt mit dem Verhältniß des Glanzes beyder Elemente einerley. Dieſemnach behält der Buchſtab S in den Formuln, woraus die Rechnung geführt werden muß, wenn das Licht von einer leuchtenden Fläche ausgehet, eine völlig übereinſtimmige Bedeutung mit derjenigen, die er oben im 10 §. hatte, woſelbſt das Licht nur betrachtet ward, in wiefern es von einem leuchtenden Punct ausgehet.

48. §.

Es ſey demnach AB eine leuchtende Fläche, die 6 Fig. ihr Licht auf die Fläche RS wirſt, ferner ſey M*m* ein Element der erleuchteten Fläche RS, deſſen Stelle in der Fläche als bekannt angenommen wird; ſo kann man zuerſt fragen:

Wie groß die Erleuchtung ſey, welche jedes Element wie *Mm* von der leuchtenden Fläche *AB* empfängt?

Hiernächſt aber auch:

Wie groß die geſammte Menge Licht ſey welche die leuchtende Fläche *AB* der Fläche *RS* zuſchickt?

Um die erſte Aufgabe aufzulöſen, betrachte man ein Element L*l* der leuchtenden Fläche AB, und ſetze die Erleuchtung, welche M*m* von L*l* empfängt, $= dI$, den Ausflußwinkel $lLM = \eta$, den Einfallswinkel $LMm = \vartheta$, ſo iſt $dI =$

$$\frac{S \,.\, Ll \,.\, \sin\eta \,.\, \sin\vartheta}{ML^2}.$$

Mit dem Halbmeſſer $MD = 1$ ſey eine Kugelfläche um M beſchrieben, und DFE ſey das Stück von ihr, welches zwiſchen den Gränzen der Strahlen-Pyramide AMB enthalten iſt, welche die Fläche AB auf M wirft, N*n* aber das Stück eben der Kugelfläche, was zwiſchen den Gränzen der Strahlenpyramide enthalten iſt, die aus L*l* auf M fällt; ſo iſt $Nn = \frac{Ll \,.\, \sin\eta}{ML^2}$ die ſcheinbare Gröſſe des Elements L*l*. Wenn alſo $Nn = d\mu$ geſetzt wird, ſo iſt $dI = S \,.\, d\mu \sin\vartheta$, und weil $d\mu$ als ein Element einer Kugelfläche, deren Halbmeſſer $= 1$ iſt, kein Element einer Linie oder Fläche, ſondern einer Zahl iſt, (wie denn auch der Ausdruck $\frac{Ll \,.\, \sin\eta}{ML^2}$ eine Zahl iſt, weil L*l* und ML² Flächen ſind,) ſo wird auch das Integral $I = \int S d\mu \sin\vartheta$ eine Zahl, welche die Erleuchtung ausdrückt, die M*m* von einem unbeſtimmten Theil der Fläche AB empfängt, welches man ſodann leicht für die ganze Fläche ausdehnt. Hiebey iſt noch zu bemerken, daß *S* bey der Rech-

nung

nung als veränderlich zu betrachten wäre, wenn nicht alle Elemente der leuchtenden Fläche einerley Glanz hätten, ſondern ihr Glanz ſich nach einem bekannten Geſetz änderte, und von der Stelle eines jeden Elements in der Fläche abhienge. Wofern aber alle Elemente einerley Glanz haben, ſo iſt $I = S\int d\mu \sin\vartheta$.

Iſt I gefunden, ſo läßt ſich auch die zweyte vorhin erwehnte Aufgabe vermittelſt der Integralrechnung auflöſen. Man ſetze nemlich das Element Mm der erleuchteten Fläche $= dz$, ſo iſt die auf Mm fallende Strahlenmenge $= I dz$. Dieſe ſey $= dM$, ſo hat man $dM = I dz$, oder $dM = dz \int S d\mu \sin\vartheta$, woraus durch die Integration $M = \int I dz$ gefunden wird, und das iſt die Strahlenmenge, welche AB auf einen unbeſtimmten Theil der Fläche RS wirft, die man nach der Integration auf die ganze Fläche ausdehnt.

Es ſind demnach die beyden Gleichungen $dI = S d\mu \sin\vartheta$, und $dM = I dz$, oder $dM = dz \int S d\mu \sin\vartheta$ als die Fundamentalgleichungen der ganzen Photometrie zu betrachten, und es kommt bey Auflöſung photometriſcher Aufgaben nur auf eine geſchickte Anwendung dieſer Gleichungen an, wozu das folgende eine allgemeine Anleitung geben wird.

49. §.

Ein leuchtender Körper der ſein Licht auf ein ſolches Element, wie Mm wirft, mag eine Geſtalt 6 Fig. haben, welche er wolle, ſo kann man doch allemahl M als die Spitze eines Pyramiden- oder Kegelförmigen Körpers betrachten, deſſen Seitenflächen, oder in M zuſammenlaufende Seitenlinien,

den

den leuchtenden Körper um und um berühren: in dem innern Raum dieſes nach M zu geſpitzten Körpers wird alles Licht enthalten ſeyn, was der leuchtende Körper nach M ſchickt; ſo wie zwiſchen den ihn umgebenden in M zuſammenlaufenden Gränzen das Stück der Oberfläche des leuchtenden Körpers enthalten iſt, welches allein, mit Ausſchlieſſung des übrigen von M abgewandten Theils Licht nach M ſchicken kann. Statt dieſer das Element M*m* erleuchtenden Fläche läßt ſich allemahl eine andre zwiſchen den Gränzen deſſelben zugeſpitzten Raums enthaltene Fläche annehmen, die bey einerley Glanz mit AB das Element M*m* eben ſo ſtark erleuchten würde: (40. §.) und da würde man wohl am natürlichſten eine ſolche Fläche zu wählen ſuchen, worauf ſich die Rechnung am leichteſten anwenden lieſſe, wenn auch nicht die Gleichung $dI = Sd\mu \sin \vartheta$ ſchon von ſelbſt darauf leitete, eine Kugelfläche *DFE* anzunehmen, deren Mittelpunct in *Mm* liegt, und deren Halbmeſſer = 1 iſt.

Wenn nun gleich nicht alle Elemente der Fläche AGB einerley Glanz hätten; ſo wird doch zwiſchen den Gränzen der von jedem Element L*l* auf M*m* fallenden Strahlenpyramide ein Element N*n* der Kugelfläche DFE enthalten ſeyn, welches M*m* eben ſo ſtark als L*l* erleuchtet, wenn man vorausſetzt, daß N*n* und L*l* einen gleichen Glanz haben. (39 §.) Mithin wird auch die geſammte Erleuchtung, welche M*m* von AGB empfängt, eben ſo groß ſeyn, als diejenige, welche M*m* von DFE empfangen würde. Uebrigens wird die Geſtalt und Gröſſe dieſes Kugelſtücks DFE von der Geſtalt und Gröſſe

der

der körperlichen Ecke oder der coniſchen Spitze um M abhängen, ſo wie die Geſtalt und Gröſſe der letztern von der Geſtalt und Gröſſe der Gränze desjenigen Theils der leuchtenden Fläche abhängt, der nach M Lichtſtrahlen werfen kann.

Wofern die Fläche, welche die Ecke oder Spitze an M umgiebt, eine grade Apollonianiſche Kegelfläche iſt, wie ſie allemahl ſeyn wird, wenn die ſcheinbare aus M*m* geſehene äuſſere Gränze der leuchtenden Fläche AB Kreisförmig, und die Ebene dieſes Kreiſes auf der graden Linie durch ihren Mittelpunct und M ſenkrecht iſt; ſo iſt auch das Kugelſtück DFE von einem Kreiſe eingeſchloſſen, und es iſt ſelbſt ein Segment der Kugel. Wenn aber die Spitze M eine von ebenen Flächen eingeſchloſſene körperliche Ecke iſt, wie ſie ſeyn wird, wenn die äuſſere Gränze der leuchtenden Fläche AB eine ebene gradlinichte Figur iſt; ſo iſt das Kugelſtück DFE von ſovielen Bogen groſſer Kugelkreiſe eingeſchloſſen, als AB grade Seitenlinien hat; und die auf M fallenden Strahlen ſind in dem Raum einer eigentlichen Pyramide enthalten. Es kann auſſer dieſen beyden jetzt erwehnten ſehr viele andre verſchiedene Fälle geben, indeſſen werden dieſe eben angeführten Fälle im folgenden vornemlich vorkommen.

50. §.

Die äuſſere Gränze der leuchtenden Fläche, welche ihr Licht auf M*m* wirft, ſey alſo Kreisförmig, und die Fläche, welche die auffallenden Strahlen umſchließt, eine grade Apollonianiſche Kegelfläche; ſo iſt das eben ſo ſtark als AB erleuchtende

Kugelſtück DFE ein Segment, deſſen Umfang ſo lange ein kleinerer Kreis der Kugel bleibt, als das Segment ſelbſt kleiner iſt als eine Halbkugel. Die Axe dieſes Segments wird durch M gehen, weil der dazu gehörige Mittelpunct in M angenommen wird, auch geht eben dieſe Axe durch den Mittelpunct C der Kreisförmigen Grundfläche des Segments, worauf ſie zugleich ſenkrecht iſt. Uebrigens aber kann das Element M*m* gegen die auffallenden Strahlen ſehr viele verſchiedene Lagen haben; und in keiner angenommenen Lage deſſelben, ſie ſey welche ſie wolle, können alle Strahlen unter einerley Winkel auffallen.

1) Die erſte merkwürdige Lage eines ſolchen ebenen Elements, welche hier zu betrachten vorkommt, iſt diejenige, wenn daſſelbe auf der Axe MF des Kugel-Segments DE ſenkrecht iſt: wie denn überhaupt die Lage aller auffallenden Strahlen gegen M*m* beſtimmet iſt, wenn die Lage der Axe MF gegen M*m* beſtimmt iſt. Bey der angenommenen ſenkrechten Lage der Axe MF gegen M*m* hat man den Vortheil, daß alle Strahlen, welche von Puncten des Segments kommen, die in einerley zur Axe MF gehörigen Parallelkreiſe liegen, unter einerley Winkel auf M*m* fallen. Man kann ſich übrigens das Segment durch dergleichen Parallelkreiſe, deren Abſtand von einander unendlich klein iſt, in Zonen eingetheilt vorſtellen, ſo fallen alle Strahlen, die von einerley Zone ausgehen, unter einerley Winkel auf M, und man wendet die Fundamentalgleichung $dI = S d\mu \sin \vartheta$ (48 §.) leicht an, weil durch $d\mu$ die Fläche einer ſolchen unendlich kleinen Zone verſtanden werden kann; da dann ϑ den

den Abſtand dieſer Zone von ihrem nächſten Pol zu 90° ergänzt. Wie nun in dieſem Fall die Erleuchtung des Elements in Mμ gefunden werde, weis man ſchon aus dem 44 §. woſelbſt $d\mu = 2\pi d\alpha \sin\alpha$ war, ($r = 1$ geſetzt) und $\vartheta = 90° - \alpha$. Von der übrigen daſelbſt gegebenen Auflöſung ſollen bald fernere Anwendungen gemacht werden, und ich bemerke nur noch, daß man diejenige Erleuchtung, welche eine unendlich kleine Ebene von einer Kreisförmig ſcheinenden leuchtenden Fläche empfängt, wenn der Strahlenkegel grade, und ſeine Axe auf dem erleuchteten Element ſenkrecht iſt, die ſenkrechte Erleuchtung Kreisförmig ſcheinender leuchtender Flächen nennen könne.

Hieher gehört demnach allemahl der Fall, wenn die leuchtende Fläche ein Kreis iſt, und eine vom Mittelpunct des Kreiſes auf ſeiner Fläche ſenkrecht ausgehende grade Linie das erleuchtete Element Mm ſenkrecht trift; ſo wie auch der Fall, wenn die Axe einer leuchtenden Kugel das erleuchtete Element Mm ſenkrecht trift. Allemahl iſt dieſe ſenkrechte Erleuchtung $= \pi \, . \, S \, . \, \sin\alpha^2$ (44 §.), wenn α den ſcheinbaren Halbmeſſer der Kreisförmig ſcheinenden leuchtenden Fläche bezeichnet: und die auf das Element fallende Lichtmenge $=$ Mm . $\pi S \sin\alpha^2$.

2) Wird die Lage der unendlich kleinen Ebene Mm gegen die Axe des auffallenden Strahlenkegels ſchief angenommen; ſo iſt nicht für jede zwiſchen zweyen zu dieſer Axe gehörigen Parallelkreiſen liegende unendlich kleine Zone der Einfallswinkel durchgängig einerley: alsdenn muß die von jeder einzelnen Zone herrührende Erleuchtung zuförderſt

derſt beſonders geſucht werden, indem man ſich dieſe Zone abermahl in unendlich kleine Elemente eingetheilt vorſtellt, da dann für jedes einzelne Element, die Erleuchtung vermittelſt der Gleichung $dl = S.d\mu \sin\vartheta$ gefunden wird. Die Summe dieſer Erleuchtungen giebt die von der Zone herrührende Erleuchtung, und wenn man hiernächſt aufs neue die Erleuchtungen aller Zonen ſummirt, ſo giebt ſich die ganze geſuchte Erleuchtung.

51. §.

Dieſe Betrachtung dient zugleich zur allgemeinen Anleitung, um daraus abzunehmen, wie man in andern Fällen verfahren muß, wenn der auffallende Strahlenkegel kein grader Kegel, oder auch wohl der Umfang der leuchtenden Fläche, die ihre Strahlen nach M wirft, gar nicht Kreisförmig iſt. Allemahl kann man ſich eine gerade Linie, wie MG durch die Mitte, oder ſonſt einen bekannten Punct innerhalb der leuchtenden Fläche vorſtellen, und ſie als die Axe der auffallenden Strahlen-Pyramide betrachten. Eine Ebene durch dieſe Axe gelegt ſchneidet die Pyramidenfläche und giebt an M einen Winkel, der als der ſcheinbare Durchmeſſer der leuchtenden Fläche in der ſchneidenden Ebene genommen anzuſehen wäre, wenn das Auge in M ſtünde: und dasjenige Stück einer mit dem Halbmeſſer = 1 aus dem Mittelpunct M beſchriebenen Kugelfläche, was innerhalb den Gränzen des pyramidenförmigen oder coniſchen Raums liegt, den die von den äuſſern ſcheinbaren Gränzen der leuchtenden Fläche auf M fallenden Strahlen umſchlieſſen, iſt das Maaß der ſcheinbaren

Gröſſe

Gröſſe oder Ausdehnung des leuchtenden Körpers vorausgeſetzt, daß in M das Auge ſtünde. (32. §.) Dieſe Kugelfläche, welche das Maaß der ſcheinbaren Gröſſe der leuchtenden Fläche abgiebt, betrachtet man in allen Fällen ſtatt der leuchtenden Fläche ſelbſt: man nimmt ihre Elemente ſo ſtark glänzend an, als die Elemente der leuchtenden Fläche ſelbſt, deren ſcheinbare Gröſſe jene Elemente der Kugelfläche vorſtellen. Auf letztere wendet man die Formul $dl = S \cdot d\mu \sin\vartheta$ an, und alsdenn hängt alles übrige von einer geſchickten Integration dieſer Formul ab.

52. §.

Das Maaß der ſcheinbaren Gröſſe des leuchtenden Körpers iſt gewöhnlich keine völlige Halbkugel: indeſſen kann man ſich drey Fälle vorſtellen, in welchen es eine völlige Halbkugel werden müſte. Der erſte iſt der, wenn die leuchtende Fläche die unendlich kleine Ebene M*m* würklich von allen Seiten umgiebt, ſo wie das ſcheinbare Himmelsgewölbe nach allen Seiten über dem Horizont ausgebreitet iſt; der zweyte Fall wäre der, wenn die leuchtende Fläche eben, mit M*m* parallel und nach allen Seiten unendlich weit ausgebreitet, die Ebene M*m* aber nur um einen endlichen Abſtand davon entfernt wäre: der dritte Fall aber, wenn die erleuchtete Ebene M*m* noch mit der leuchtenden Fläche parallel, aber um einen unendlich kleinen Abſtand von ihr entfernt wäre, und ſie unmittelbar berührte. In allen dreyen Fällen empfängt M*m* die **möglichſt gröſte Erleuchtung**, die ihr einerley leuchtender Körper bey einerley Glanz mit-

theilen kann: und dieſe ſoll hinführo die abſolute Erleuchtung heiſſen. Ohne ſchon das Geſetz zu kennen, nach welchem die Erleuchtung von der ſcheinbaren Gröſſe der leuchtenden Fläche abhängt, iſt ſoviel aus dem bisherigen klar, daß ſelbige mit der ſcheinbaren Gröſſe wachſen müſſe, und ſo wird es keinen Zweifel leiden, daß nicht in den beyden zuerſt erwehnten Fällen die Erleuchtung bey einerley Glanz der leuchtenden Fläche die möglichſt gröſte ſey. Was den dritten Fall betrift, ſo könnte es zweifelhaft ſcheinen, weil eine unendlich kleine Ebene, wenn ſie die leuchtende Fläche berührt, nur von demjenigen Element, welches ſie berührte, Strahlen auffangen würde, von den übrigen aber gar keine, und ſo ſchiene es, als wenn die Erleuchtung nur unendlich klein ſeyn könnte. (46 §.) Allein dies würde nur ſeine Richtigkeit haben, wenn das erleuchtete Element in endlicher Entfernung die Strahlen von einem leuchtenden Element allein auffienge. Eigentlich iſt die Erleuchtung, welche Ll nach Mm ſchickt $= \frac{S \,.\, Ll \,.\, \sin\eta \,.\, \sin\vartheta}{ML^2}$ und wegen der parallelen Lage beyder Elemente wären η und $\vartheta = 90°$. Zugleich würde wegen der unmittelbaren Berührung ML unendlich klein, und weil auch Ll eine unendlich kleine Fläche iſt, ſo würde $\frac{S \,.\, Ll}{ML^2}$ eine endliche Gröſſe ſeyn. Bey dieſen Schlüſſen muß man übrigens noch vorausſetzen, daß alle Elemente der leuchtenden Fläche einerley Glanz haben, weil ſonſt nicht für jedes Element Ll, wenn man auch alle gleich groß annähme, dieſe abſolute Erleuchtung einerley wäre.

§. 53.

53. §.

Die Erleuchtung, welche eine unendlich kleine Ebene empfängt, wenn die leuchtende Fläche in allen Elementen einerley Glanz hat, und ihre ſcheinbare Gröſſe eine völlige Halbkugel wird, iſt im 44 §. $= \pi . S$ gefunden: Demnach giebt dieſer Ausdruck allemahl die abſolute Erleuchtung, mithin auch diejenige, welche das erleuchtete Element empfangen würde, wenn es den leuchtenden Körper unmittelbahr berührte. Mit dieſer abſoluten Erleuchtung läßt ſich jede andre von demſelben leuchtenden Körper herrührende Erleuchtung vergleichen, die derſelbe der erleuchteten unendlich kleinen Ebene in jeder angenommenen Lage und Entfernung zuſchicken würde. Wird die Rechnung auf eine leuchtende Fläche angewendet, deren Glanz man $= 1$ geſetzt hat, ſo iſt ihre abſolute Erleuchtung $= \pi$, und mit dieſer abſoluten Erleuchtung einer Fläche, deren Glanz $= 1$ iſt, läßt ſich auch jede andre Erleuchtung vergleichen, die von einer Fläche kommt, deren Glanz $= S$ iſt. Die allgemeine Formul für die Erleuchtung war $I = \int S d\mu \sin\vartheta$, (48. §.) wenn alſo die abſolute Erleuchtung einer Fläche, deren Glanz $= 1$ angenommen iſt, $= y$ geſetzt wird, ſo iſt $I : y = \int S d\mu \sin\vartheta : \pi$; und wenn man auch $y = 1$ annehmen will, ſo iſt $I =$

$$\frac{1}{\pi} \int S d\mu \sin\vartheta.$$

Man hat es häufig als eine Haupt-Schwürigkeit angeſehen, weswegen keine vollſtändige Theorie von Ausmeſſung der Stärke des Lichts zu hoffen ſey, daß es hier an einem Maaß fehle, womit

ſich die Stärke des Lichts ausmeſſen laſſe: allein Herr Bouguer erinnert gleich anfangs in ſeinem Traité d' Optique ſur la gradation de la lumiere ganz richtig, daß es mit dieſer anſcheinenden Schwürigkeit nicht mehr zu ſagen habe, als bey allen andern Ausmeſſungen, ſelbſt in der Geometrie, wo allemahl das Maaß als gegeben betrachtet wird, und die Gröſſe einer Linie, einer Fläche, eines körperlichen Raums nur dadurch beſtimmt werden kann, daß man das Verhältniß einer ſolchen Gröſſe gegen das als bekannt angenommene Maaß zu beſtimmen ſucht. Wir ſind eben ſo wenig im Stande zu ſagen, wie groß eigentlich eine Ruthe, ein Fuß ſey? als wir im Stande ſind, ſchlechthin zu ſagen, wie groß dieſe oder jene Erleuchtung ſey, ohne ſie mit einer andern zu vergleichen, die wir als bekannt annehmen, ſo wie die Länge einer Ruthe eines Fuſſes als bekannt angenommen wird. Jede mathematiſche Wiſſenſchaft ſucht nur die Geſetze auf, nach welchen ſich Gröſſen unter einander vergleichen laſſen; und wie es allemahl willkührlich iſt, welche Gröſſe man = 1 ſetzen, oder als das Maaß annehmen will, um alle übrige von eben der Art damit zu vergleichen; ſo iſt es auch in der Photometrie willkührlich, welche Erleuchtung, und welche Strahlenmenge, man = 1 annehmen will. Soll die abſolute Erleuchtung, einer leuchtenden Fläche, deren Glanz als bekannt anzuſehen iſt, und eben deswegen = 1 geſetzt werden kann, für das Maaß, oder diejenige Einheit, angenommen werden, womit man alle übrige Erleuchtungen vergleichen will; ſo iſt die abſolute Erleuchtung jeder andern leuchtenden Fläche

che

che $= S$, wie denn auch für ſich ſchon klar iſt, daß die abſolute Erleuchtung zweyer Flächen von verſchiedenen Glanz eben dieſem Glanz derſelben proportional ſeyn muß. Bey eben der Vorausſetzung wäre nun auch diejenige Strahlenmenge $= 1$, die eine Fläche, deren Quadrat-Inhalt $= 1^2$ geſetzt iſt, auffangen würde, wenn ihre Erleuchtung in allen Elementen eben ſo groß wäre, als die abſolute Erleuchtnng derjenigen Fläche, deren Glanz $= 1$ geſetzt iſt.

Wird eine unendlich kleine Ebene von einer Kreisförmig ſcheinenden in allen Elementen gleich ſtark glänzenden Fläche ſenkrecht erleuchtet, ſo iſt die Erleuchtung $I = \pi S \sin\alpha^2$, wenn α den ſcheinbaren Halbmeſſer der leuchtenden Fläche bezeichnet. Wird alſo ihr Glanz $S = 1$ angenommen, ſo erhält man $I = 1$, wenn $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ iſt. Es iſt aber $\frac{1}{\pi} = 0{,}318309886183 79$ (470 §. Geom.) alſo $\frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0{,}5641895$, und zu dieſem Sinus gehört ein Winkel von $34°, 20\frac{3}{4}'$. Zugleich wird die abſolute Erleuchtung einer ſolchen Fläche $= \pi$, ſo wie die abſolute Erleuchtung einer jeden andern in allen Elementen gleich ſtark glänzenden Fläche, deren Glanz $= S$ iſt, $= \pi S$. Behält man alſo die Fundamental-Formuln, ſo wie ſie im 48 §. gefunden ſind, ungeändert bey; ſo iſt diejenige Erleuchtung $= 1$, welche eine Kreisförmig ſcheinende überal gleich ſtark glänzende Fläche einer unendlich kleinen Ebene ſenkrecht zuſchickt,

wenn ihr ſcheinbarer Halbmeſſer aus der erleuchteten Ebene geſehen $34^\circ\ 20\frac{3}{4}'$ groß iſt, oder wenn das Quadrat vom Sinus ihres ſcheinbaren Halbmeſſers ſich zum Quadrat des ganzen Sinus verhält, wie der Durchmeſſer eines Kreiſes zu ſeiner Peripherie. Fällt alsdenn auf alle Elemente einer Ebene, deren Quadrat-Inhalt $= 1^2$ iſt, eine eben ſo groſſe Erleuchtung, ſo iſt die auffallende Strahlenmenge = 1.

Wenn übrigens von zwoen leuchtenden Flächen jede für ſich überall gleich ſtark glänzt, wenn ferner die ſcheinbare Geſtalt und Gröſſe beyder Flächen einerley, und die Lage des erleuchteten Elements gegen den auffallenden Strahlenkegel oder die auffallende Strahlen-Pyramide einerley iſt; ſo iſt für beyde Flächen $\int d\mu \sin\vartheta$ einerley, und $I = S \int d\mu \sin\vartheta$ verhält ſich wie S, oder die Erleuchtung iſt dem Glanz der leuchtenden Flächen proportional.

54. §.

Bey dem bisherigen Vortrage der Gründe der Photometrie bin ich vornemlich dem Herrn Lambert gefolget, ſo wie ich zugleich bemühet geweſen bin, die hieher gehörigen Grundbegriffe möglichſt aufzuklären, und zugleich H. Lamberts Vortrag mehr zu erläutern, der ſoviel ich weis, den erſten eigentlichen Lehrbegrif dieſer Wiſſenſchaft unter dem Titel: Photometria, ſive de menſura et gradibus luminis colorum et umbræ. Aug. Vindel. 1760 geliefert hat. Was H. Bouguer davon zuerſt im Jahr 1729 in ſeinem Eſſay d' Optique ſur la Gradation de la lumiere vorgetragen, und nachher in dem gröſſern Werk: Traité d' Optique

ſur

ſur la gradation de la lumiere, das vom H. de la Caille nach des Verfaſſers Tode im Jahr 1760 zum Druck befördert worden, weiter ausgeführt hat, beſtehet theils in einer ſchätzbaren Sammlung wohl gewählter Verſuche zur nähern Entwickelung der Gründe dieſer Wiſſenſchaft, theils in beſondern Unterſuchungen über die Geſetze, nach welchen das Licht geſchwächt wird, wenn es von dunklen polirten oder auch unpolirten Flächen zurück ſtrahlet, oder wenn es durch durchſichtige Maſſen dringt. Die Form einer allgemeinen ſyſtematiſchen Theorie von der Erleuchtung und was davon abhängt, hat H. Bouguer der Wiſſenſchaft noch nicht gegeben: vor H. Lambert iſt H. Euler der letztern am nächſten gekommen, von deſſen hieher gehörigen Aufſätzen, wie auch von demjenigen, was ſich bey andern Schriftſtellern hieher gehöriges findet, ich unten weitere Nachricht geben werde.

Der IV. Abſchnitt.

Theorie der Erleuchtung ebener Flächen von leuchtenden Kugeln.

55. §.

Wenn die unendlich kleine Ebene M*m* von einer Kugel HOKP erleuchtet wird, ſo ſind alle auf M fallende Strahlen in dem Raum eines gra- 6 Fig.

den Apollonianiſchen Kegels enthalten, und das Kugelſtück DFE, welches die Ebene Mm eben ſo ſtark als die Kugel ſelbſt erleuchten würde, iſt ein Segment, deſſen Axe mit der Axe des auffallenden Strahlenkegels zuſammen fällt. Schneidet man nun die in M zuſammengehende coniſche Spitze mit einer Ebene durch ihre Axe, ſo iſt der Winkel DME, welchen dieſer Schnitt giebt, der ſcheinbare Durchmeſſer der leuchtenden Kugel aus Mm geſehen, und CMD = CME der ſcheinbare Halbmeſſer.

Wird nun CMD = CME = α geſetzt, und angenommen, daß die Axe des auffallenden Strahlenkegels die unendliche kleine Ebene Mm ſenkrecht treffe, ſo weis man ſchon aus dem 50 §. n. 1. daß die ſenkrechte Erleuchtung der unendlich kleinen Ebene Mm = $\pi S \sin\alpha^2$ ſey, vorausgeſetzt, daß alle Elemente der Kugel gleich ſtark glänzen. Setzt man dieſe Erleuchtung = I, und nimmt zugleich den Glanz der Kugel = 1 an, ſo iſt $I = \pi \sin\alpha^2$, und man weis ſchon aus dem 53 §. daß dieſe Erleuchtung = 1 ſey, wenn $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, oder $\alpha = 34° \, 20\frac{3}{4}'$ iſt. Nun ſey a die Entfernung des erleuchteten Elements von der Kugel Mittelpunct, und der letztern Halbmeſſer = r, ſo iſt $\sin\alpha = \frac{r}{a}$, und die Erleuchtung = 1, wenn $\frac{r^2}{a^2} = \frac{1}{\pi}$ iſt. Dieſemnach läßt ſich jede Erleuchtung mit derjenigen ſenkrechten Erleuchtung vergleichen, welche eine überal gleich ſtark glänzende

Kugel

Kugel einer unendlich kleinen Ebene zuſchickt, wenn das Quadrat der Entfernung ihres Mittelpuncts von der erleuchteten Ebene ſich zum Quadrat ihres Halbmeſſers verhält, wie die Peripherie eines Kreiſes zum Durchmeſſer, oder wie die Fläche eines Kreiſes zum Quadrat ſeines Halbmeſſers. Fiele alſo auf alle Elemente einer Fläche, deren Quadrat-Inhalt $= 1^2$ geſetzt iſt, eine eben ſo groſſe Erleuchtung, ſo wäre die auffallende Strahlenmenge $= 1$.

Ueberhaupt aber iſt die von einer überal gleich ſtark glänzenden Kugel kommende ſenkrechte Erleuchtung $I = \pi . S . \sin\alpha^2$, mithin iſt ſie dem Quadrat vom Sinus des ſcheinbaren Halbmeſſers der leuchtenden Kugel, aus der erleuchteten unendlich kleinen Ebene geſehen proportional. Weil der Halbmeſſer der Kugelfläche, welche das Maaß der ſcheinbaren Gröſſe abgiebt, $= 1$ angenommen iſt, ſo iſt die Fläche ihres gröſten Kreiſes $= \pi . 1^2$, und die Fläche desjenigen Parallelkreiſes, welcher das der erleuchtenden Fläche gleichgültige Segment begränzt, $= \pi \sin\alpha^2$. Wird nun in der gefundenen Formul $I = \pi S \sin\alpha^2$ der ſcheinbare Halbmeſſer $\alpha = 90°$ angenommen, ſo hat man $I = \pi . S$, und das iſt die abſolute Erleuchtung der Kugel, (52. §.) dieſe verhält ſich alſo zu jeder andern von eben der Kugel herrührenden ſenkrechten Erleuchtung, wie der gröſte Kreis einer Kugel zur Fläche eines Parallelkreiſes, der von ſeinem Pol um das Maas des ſcheinbaren Halbmeſſers der leuchtenden Kugel entfernt iſt, allemahl das Auge in der unendlich kleinen Ebene

ſelbſt angenommen, welche die Erleuchtung auffangen ſoll. Eben das angezeigte Verhältniß iſt auch einerley mit dem Verhältniß vom Quadrat des ganzen Sinus zum Quadrat vom Sinus des ſcheinbaren Halbmeſſers der leuchtenden Kugel.

Wenn man den ſcheinbaren Halbmeſſer der Sonne in ihrer mittlern Entfernung 16′ 7″ groß annimmt, ſo iſt für die Sonne $\sin\alpha = 0,0046881$, und $\sin\alpha^2 = 0,0000220$, mithin die abſolute Erleuchtung der Sonne $\frac{10000000^2}{2200000000}$, oder 45454 mahl gröſſer als diejenige Erleuchtung, welche ſie einer ſolchen Stelle auf der Erdfläche zuſchickt, in deren Scheitellinie ſie ſtehet.

Das Maaß der ganzen Ausdehnung des ſcheinbaren Himmelsgewölbes in dem Verſtande des 51 §. iſt eine Halbkugel: wenn alſo der ganze nach allen Seiten ausgebreitete Himmel durchgängig ſo ſtark glänzte, als die Sonne glänzt, ſo würde jede Stelle der Erdfläche eben ſo ſtark erleuchtet werden, als wenn ſie ſich in der Oberfläche der Sonne ſelbſt befände. Dieſer Satz iſt eine richtige Folge aus dem bisherigen: nur wäre die fernere Folge unrichtig, wenn man daraus ſchlieſſen wollte, daß die abſolute Erleuchtung der Sonne ſich zu derjenigen Erleuchtung, die ſie einer Stelle auf der Erdfläche, in deren Scheitel ſie ſteht, zuſchickt, verhalte, wie die Fläche der ganzen Halbkugel zur Fläche des Segments, welches der ſcheinbare Sonnenteller faſſet. Es verhält ſich vielmehr jene Erleuchtung zu dieſer wie die Fläche des gröſten Kugelkreiſes zur Grundfläche des Segments, wel-

ches mit dem Sonnenteller einerley ſcheinbare Gröſſe hat. Weil dies Segment in Vergleichung mit der Halbkugel ſehr klein iſt, ſo iſt jenes zuerſt erwehnte Verhältniß beynahe nochmahl ſo groß, als das letzte richtige Verhältniß.

56. §.

Von der Aufgabe: die ſenkrechte Erleuchtung zu finden, welche eine überal gleich ſtark glänzende Kugel auf eine unendlich kleine Ebene wirft, hat Herr L. Euler in einer Abhandlung: Reflexions ſur les divers degrés de lumiere du ſoleil et des autres corps celeſtes, (Hiſtoire de l' Academie de Berlin A. 1750. Tom. VI. p. 280. ſqq.) eine Auflöſung gegeben, vermöge welcher ſich die geſuchte Erleuchtung ebenfals wie $\sin\alpha^2$ verhält: er findet aber $I = 2\pi S \sin\alpha^2$, ſtatt deſſen, daß hier $I = \pi S \sin\alpha^2$, mithin nur die Hälfte des Euleriſchen Reſultats gefunden iſt. Der Unterſcheid rührt daher, weil H. Euler die Verminderung der Erleuchtung, die vermöge des 34. §. von der Schiefe des Ausgehungswinkels herrührt, nicht in Rechnung gebracht, ſondern vorausgeſetzt hat, die Erleuchtung ſey bey jeder Schiefe des Ausgehungswinkels einerley. Verbindet man aber jene Regel des 34. §. mit H. Eulers Rechnung, ſo kommt man auf eben das Reſultat, was hier im 55. §. iſt gefunden worden. Es wird der Mühe werth ſeyn, dies umſtändlicher ins Licht zu ſetzen, um zugleich einen Begrif davon zu geben, wie H. Euler bey Auflöſung dieſer Aufgabe zu Werk gehet.

9 Fig. Es ſey AEBF die leuchtende Kugel, ihr Halbmeſſer AC $= a$, Oo die unendlich kleine Ebene, worauf die Erleuchtung ſenkrecht fällt, ihr Abſtand vom Mittelpunct der leuchtenden Kugel OC $= c$, FAE das erleuchtende Segment, deſſen Axe mit OC zuſammen fällt, der leuchtenden Kugel ſcheinbarer Halbmeſſer COE $=$ COF $= \vartheta$, ſo iſt OCE $=$ OCF $= 90° - \vartheta$. Ferner ſey MmnN eine unendlich kleine Zone zwiſchen zweenen zur Axe OC gehörigen Parallelkreiſen, deren Abſtand vom Pol ACM $= \varphi$ iſt, ſo iſt ihre Fläche $= 2\pi aad\varphi \sin\varphi$, und OM $= \sqrt{(a^2 + c^2 - 2ac\cos\varphi)}$. Ferner iſt oOM $=$ OMP der Einfallswinkel, ſein

$$\text{Sinus} = \frac{OP}{OM} = \frac{c - a\cos\varphi}{\sqrt{(a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\varphi)}},$$

$$\text{ſein Coſinus} = \frac{PM}{OM} =$$

$$\frac{a\sin\varphi}{\sqrt{(a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\varphi)}}.$$

Wofern nun die Erleuchtung nur der Fläche der Zone MmnN, dem Sinus des Einfallswinkels, und dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional iſt, ohne daß die Schiefe des Ausgehungswinkels OMT in Betrachtung kommen darf, ſo iſt die Erleuchtung, welche jede unendlich kleine Zone nach Oo ſchickt $=$

$$\frac{2 \cdot S \cdot \pi aad\varphi \sin\varphi}{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\varphi} \times \frac{c - a\cos\varphi}{\sqrt{(a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\varphi)}}$$

$$= \frac{2S \cdot \pi aa\,(c - a\cos\varphi)\,d\varphi \sin\varphi}{(a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

oder wenn man $\cos\varphi = u$, mithin $du = -d\varphi\sin\varphi$ ſetzt, ſo wird dieſe

Erleuch-

Erleuchtung $= - \frac{2S\pi aa(c - au)\,du}{(a^2 + c^2 - 2cau)^{\frac{3}{2}}}$.

Dieſe Formul nimmt H. Euler würklich dafür an, und weil $\frac{c - au}{a^2 + c^2 - 2cau} = \frac{1}{2c} + \frac{c^2 - a^2}{2(a^2 + c^2 - 2cau)}$ gefunden wird, ſo iſt eben die Formul auch $= -\pi Saa$

$$\left(\frac{du}{c\sqrt{(a^2 + c^2 - 2ac.u)}} + \frac{(c^2 - a^2)\,du}{c(a^2 + c^2 - 2acu)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Man ſetze $(a^2 + c^2 - 2acu = z)$ ſo iſt $du = -\frac{dz}{2ac}$, und die Formul verwandelt ſich in folgende: $\frac{\pi Sa}{2cc}\left(\frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}} + \frac{(c^2 - a^2)\,dz}{z^{\frac{3}{2}}}\right)$.

Davon iſt das Integral $= \frac{\pi Sa}{2cc}$

$$\left(2z^{\frac{1}{2}} - \frac{2(c^2 - a^2)}{z^{\frac{1}{2}}} + C\right) = \frac{\pi Sa}{cc}$$

$$\left(\frac{z - c^2 + a^2}{z^{\frac{1}{2}}} + C\right) = \frac{\pi Sa}{cc}$$

$\left(\frac{2(a^2 - acu)}{\sqrt{(a^2 + c^2 - 2acu)}} + C\right)$, oder wie man es auch ausdrucken kann, $= \frac{2\pi Saa}{cc}$

$\left(\frac{a - cu}{\sqrt{(a^2 + c^2 - 2acu)}} + E\right)$, nemlich E

ſtatt

ſtatt $\frac{C}{2a}$ geſchrieben. Dies Integral muß verſchwinden wenn $\varphi = o$, alſo $\cos\varphi = u = 1$ iſt, mithin wird $E = \frac{c - a}{\surd(a^2 - 2ac + cc)} = \lambda$. Nach der Integration, muß man $\varphi = OCE$, alſo $u = \cos\varphi = \cos OCE = \frac{a}{c}$ ſetzen, da dann $a - cu = o$, und die Erleuchtung $= \frac{2\pi Saa}{cc}$ gefunden wird, oder $= 2\pi S \sin\vartheta^2$, weil $COE = \vartheta$ angenommen, und $\frac{a}{c} = \sin\vartheta$ iſt.

Wenn dagegen die Regel des 34 §. angenommen wird, ſo muß die von der Zone $MmnN$ herkommende Erleuchtung noch in den Sinus des Ausgehungswinkels OMT multiplicirt werden. Weil nun $OMT = OMP - PMT$, alſo $\sin OMT = \sin OMP \cos PMT - \cos OMP \sin PMT$, und $PMT = \varphi$ iſt, ſo findet man $\sin OMT = \frac{(c - a\cos\varphi)\cos\varphi - a\sin\varphi^2}{\surd(a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\varphi)} = \frac{c \cdot \cos\varphi - a}{\surd(a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\varphi)}$: und wenn $\cos\varphi = u$ angenommen wird, ſo iſt die erwehnte Erleuchtung $= \frac{2S\pi aa(c - au)(a - cu)du}{(a^2 + c^2 - 2cau)^2}$ die ich $= dI$ annehmen will. Man findet aber $\frac{(c - au)(a - cu)}{(a^2 + c^2 - 2ac \cdot u)^2}$

$$= \frac{ac - (a^2 + c^2)u + acu^2}{(a^2 + c^2)^2 - 4ac(a^2 + c^2) + 4a^2c^2u^2}$$

und wenn man den Zähler durch den Nenner dividirt, ſo iſt der Quotient $= \frac{1}{4ac} + \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2)^2}{4ac(a^2 + c^2 - 2ac.u)^2} = \frac{1}{4ac} - \frac{(a^2 - c^2)^2}{4ac(a^2 + c^2 - 2ac.u)^2}$, mithin $dI = \frac{S\pi a}{2c}du - \frac{S\pi a(a^2 - c^2)^2 du}{2c(a^2 + c^2 - 2ac.u)^2}$ oder $dI = \frac{S\pi a}{2c}\left(du - \frac{(a^2 - c^2)^2 du}{(a^2 + c^2 - 2ac.u)^2}\right)$.

Man nehme $a^2 + c^2 - 2ac.u = z$ an, ſo iſt $du = -\frac{dz}{2ac}$, und $\frac{du}{(a^2 + c^2 - 2ac.u)^2} = -\frac{dz}{2ac.z^2}$. Hievon iſt das Integral $= \frac{1}{2ac.z} = \frac{1}{2ac(a^2 + c^2\ 2acu)}$, alſo wird $I = \frac{S\pi a}{2c}\left(u - \frac{(a^2 - c^2)^2}{2ac(a^2 + c^2 - 2acu)} + C\right)$ gefunden. Dies Integral muß verſchwinden, wenn $u = 1$ iſt, alſo wird $C = \frac{(a^2 - c^2)^2}{2ac(a - c)^2} - 1 = \frac{(a + c)^2}{2ac} - 1 = \frac{a^2 + c^2}{2ac}$ gefunden. Nach der Integration ſetzt man

$u =$

$u = \frac{4}{c}$ und das giebt $I = \frac{S\pi a}{2c}$

$$\left(\frac{a}{c} - \frac{(a^2 - c^2)^2}{2ac(c^2 - a^2)} + \frac{a^2 + c^2}{2ac}\right),$$

da dann der eingeſchloſſene Factor $= \frac{2a}{c}$,

und $I = \frac{S\pi aa}{cc}$, oder $I = S\pi \sin \vartheta^2$ gefunden wird, welches mit dem 55. §. übereinſtimmet.

57. §.

Aus dieſer Vergleichung der Euleriſchen Auflöſung der Aufgabe des 55. §. mit der hier vorgetragenen wird erhellen, wie nothwendig es ſey, ſich von der Richtigkeit oder Unrichtigkeit der Regel des 34. §. zu überzeugen, weil man auf ganz andre Geſetze der Photometrie kommen muß, wenn man mit Herrn Euler vorausſetzt, daß die Erleuchtung durch keine Schiefe des Ausgehungswinkels geſchwächt wird, als in dem Fall, wenn man der Regel des 34 §. gemäß annimmt, daß die Erleuchtung dem Sinus dieſes Winkels proportional ſey. Wer dafür hielte, daß die im 34 §. angeführten Gründe die dortige Regel noch nicht auſſer allem Zweifel ſetzten, der müſte ſie wenigſtens ſo lange als Hypotheſe gelten laſſen, bis durch Vergleichung der daraus flieſſenden Folgſätze mit der Erfahrung mehreres zu ihrer Beſtättigung geſagt werden kann. Die im 48 bis zum 52 §. aus der Regel des 34 §. geſchloſſenen Folgſätze haben übrigens etwas vorzüglich nettes, welches die Anwendung auf

auf beſondre Fälle gar ſehr erleichtert, und die Vergleichung der im 44. 50. und 55. §. vorgetragenen Auflöſung der bisher betrachteten Aufgabe mit der von eben der Aufgabe im 56. §. gegebenen Auflöſung kann zum Beyſpiel dienen, wie ſehr die Rechnung abgekürzt wird, wenn man ſie auf den Satz des 40. §. nach Anleitung des 48. 49. und 50. §. gründet. Dieſer Satz des 40 §., ſo wie die Regel des 34. §. iſt dem Herrn Lambert eigen, und ich finde nicht, daß andre Schriftſteller davon Gebrauch gemacht haben. Zwar hat Herr Bouguer im Traite d' Optique ſur la gradation de la lumiere auf der 90 u. f. S. ſchon Unterſuchungen darüber angeſtellet, ob das Licht wegen der Schiefe des Ausflußwinkels ſchwächer werde? auch ganz richtig bewieſen, daß ſolches ſeyn müſſe, weil wenn man mit H. Euler annimmt: daß das Licht ſich nach allen Seiten gleich ſtark ausbreite, Folgen daraus flieſſen, die der Erfahrung wiederſprechen, wovon ich weiter unten umſtändlicher handeln muß. Allein H. Bouguer meint aus einer angeſtellten Beobachtung, die ich allererſt unten vollſtändig beurtheilen kann, und der er ſelbſt auch nicht ſo ganz ſicher trauet, gefunden zu haben, daß das Licht wegen der Schiefe des Ausflußwinkels noch ſtärker abnehme, als im Verhältniß vom Sinus dieſes Winkels. Anwendungen hievon auf theoretiſche Unterſuchungen hat H. Bouguer davon weiter nicht gemacht, mithin bleibt der Satz, des 34. §. wie ich geſagt habe, dem H. Lambert eigen, obgleich H. Bouguer ſchon im allgemeinen bewieſen hat, daß das Licht wegen der Schiefe des Aus-

Bayerische
Staatsbibliothek
München

flußwinkels ſich nicht gleich ſtark nach allen Seiten ausbreite.

58. §.

9 Fig. Wenn eine unendlich kleine Ebene *Oo* von einer Kugel *AEBF* ſenkrecht erleuchtet wird; ſo verhält ſich die dieſer Ebene mitgetheilte Erleuchtung zur abſoluten Erleuchtung von eben der Kugel, wie das Quadrat des Halbmeſſers *AC* der leuchtenden Kugel zum Quadrat der Entfernung *OC* der erleuchteten Ebene vom Mittelpunct der Kugel.

Beweis. Wenn die Erleuchtung $= I$, der ſcheinbare Halbmeſſer $COE = \alpha$ geſetzt wird, ſo iſt $I = \pi . S . \sin\alpha^2$. (55. §.) und $\sin\alpha = \frac{CE}{OC} = \frac{AC}{OC}$, mithin $I = \frac{\pi . S . AC^2}{OC^2}$. Wenn alſo die abſolute Erleuchtung $\pi . S$ (28. §.) $= Y$ geſetzt wird, ſo hat man $I : Y = \frac{AC^2}{OC^2} : 1 = AC^2 : OC^2$.

In verſchiedenen Entfernungen OC alſo iſt die von einer Kugel herrührende ſenkrechte Erleuchtung dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional.

59. §.

Die Axe des Segments einer leuchtenden Kugel, welches eine unendlich kleine Ebene erleuchtet, trift dieſe Ebene unter einem ſchiefen Winkel: man ſucht die Gröſſe der Erleuchtung.

Aufl.

Bayerische Staatsbibliothek München

Aufl. Man ſtelle ſich die unendlich kleine Ebene 10 F.
Kk als horizontal liegend vor, weil es gleichviel iſt, in welcher Lage man ſie betrachten will. Um K als einen Mittelpunct ſtelle man ſich eine mit dem Halbmeſſer = 1 beſchriebene Kugelfläche vor, die von der erweiterten Ebene Kk in dem gröſten Kreiſe BAC geſchnitten wird. Ferner ſey KP die Axe des Kegels der in K zuſammen gehenden Strahlen, ſo wird P der Pol desjenigen hohlen Kugel-Segments ſeyn, welches die Ebene Kk eben ſo ſtark erleuchtet, als das erhabene Segment derjenigen leuchtenden Kugel, welche ihr Licht nach Kk wirft. Weiter ſey KZ eine Verticallinie, ſo iſt die Ebene PKZ vertical, ſie ſchneidet die Kugel um K in dem Vertical-Kreiſe BZCV, und CKP iſt die Neigung der Axe des auf K fallenden Lichtkegels gegen die Ebene Kk. Wenn nun die Ebene dieſes Verticalkreiſes die Fläche des auf K fallenden Lichtkegels in KD und KE ſchneidet, ſo iſt PKD = PKE der ſcheinbare Halbmeſſer der leuchtenden Kugel. Eben die Fläche des auffallenden Lichtkegels wird auch die Kugelfläche um K in dem zum Pol P gehörigen Parallelkreiſe DHE ſchneiden, und ſo iſt PDHE dasjenige hohle Kugel-Segment, welches wenn es mit der leuchtenden Kugel einerley Glanz hätte, die Ebene Kk eben ſo ſtark als die leuchtende Kugel ſelbſt erleuchten würde. (40. §.) Man ſucht alſo die Erleuchtung, welche die Ebene Kk von dem Segment PDHE empfangen würde, zu dem Ende ſey der ſcheinbare Halbmeſſer des Segments PKD = PKE = ϱ, der Abſtand des Pols P vom Scheitel Z, oder der Winkel PKZ = δ. Ferner ſey M ein unbeſtimmter Punct des

Segments, deſſen Abſtand vom Pol PM $= \varepsilon$, ſein Abſtand vom Scheitel ZM $= \zeta$, und der Winkel am Pol ZPM $= \varphi$. Durch M laufe ein zum Pol P gehöriger Parallelkreis XMY, und in der Vorausſetzung, daß PM um das Differential M*m* wachſe, ſtelle man ſich auch durch *m* den Parallelkreis *xmy* vor. Weiter wachſe der Winkel ZPM um das Differential MPμ, ſo giebt ſich ein Element der Kugelfläche Mμnm, und man kann die Erleuchtung, welche dies Element nach K*k* ſchickt dem 48. §. gemäß finden. Es iſt nemlich hier der Einfallswinkel MKF $= 90° - \zeta$; alſo ſin MKF $= \cos\zeta$, und dieſer Winkel MKF hies ϑ im 46 §. Was überdem, daſelbſt $d\mu$ war, das iſt hier das Element Mμnm, alſo iſt die Erleuchtung, welche K*k* von dem Element Mμnm empfängt, $=$ S . Mμnm . $\cos\zeta$. Der zum Bogen Mμ gehörige Halbmeſſer iſt $= \sin\varepsilon$, alſo M$\mu = d\varphi \sin\varepsilon$, ſo wie M*m* $= d\varepsilon$, mithin das Element M$\mu nm =$ $d\varphi d\varepsilon \sin\varepsilon$; und wenn die geſuchte Erleuchtung $=$ I geſetzt wird, ſo hat man $dI = S \,.\, d\varphi d\varepsilon \sin\varepsilon \cos\zeta$, wo man auch S $= 1$ annehmen, und $dI =$ $d\varphi d\varepsilon \sin\varepsilon \cos\zeta$ ſetzen kann. Im ſphäriſchen Dreyeck PZM aber ſind die Seiten PZ $= \delta$, PM $= \varepsilon$, und der eingeſchloſſene Winkel ZPM $= \varphi$, alſo hat man für die dritte Seite ZM $= \zeta$ aus dem 550 §. Geom. $\cos\zeta = \cos\varepsilon \cos\delta + \sin\varepsilon \sin\delta \cos\varphi$, und das giebt $dI = d\varphi d\varepsilon \sin\varepsilon \cos\varepsilon \cos\delta + d\varphi d\varepsilon \sin\varepsilon^2 \sin\delta \cos\varphi$. Um hieraus I zu finden, muß man zuerſt ſo integriren, daß ε und $d\varepsilon$ als beſtändige Gröſſen betrachtet werden, und φ allein veränderlich bleibt: das giebt die Erleuchtung welche K von dem unbeſtimmten Theil X*xm*M der unendlich kleinen Zone X*xy*Y

ein

empfängt. Hiernächſt integrirt man weiter ſo, daß allein ε als veränderlich betrachtet wird, und findet ſo die Erleuchtung, welche K von dem Ausſchnitt XPM der Fläche des Segments PXMY empfängt.

Die erſte Integration giebt $\int^{\varphi} dI = \varphi d\varepsilon \sin\varepsilon \cos\varepsilon \cos\delta + d\varepsilon \sin\varepsilon^2 \sin\delta \sin\varphi$, wo keine conſtans nöthig iſt, weil dies Integral mit φ zugleich verſchwinden muß. Ferner findet man $\int^{\varepsilon}\int^{\varphi} dI = \frac{1}{2}\varphi \sin\varepsilon^2 \cos\delta + \sin\delta \sin\varphi \int d\varepsilon \sin\varepsilon^2 + C = I$. Um das Integral $\int d\varepsilon \sin\varepsilon^2$ zu finden, nehme man $\sin\varepsilon = x$, $\cos\varepsilon = y$ an, ſo iſt $dx = d\varepsilon \cos\varepsilon$, $dy = - d\varepsilon \sin\varepsilon$, $d\varepsilon \sin\varepsilon^2 = - x dy$, und $\int d\varepsilon \sin\varepsilon^2 = - \int x dy$. Aber $d . xy = x dy + y dx$, alſo $x dy = d . xy - y dx$, und $\int x dy = xy - \int y dx$; mithin $\int d\varepsilon \sin\varepsilon^2 = \int y dx - xy$. Man ſtelle nun die Werthe von x und y wieder her, ſo wird $\int d\varepsilon \sin\varepsilon^2 = \int d\varepsilon \cos\varepsilon^2 - \sin\varepsilon \cos\varepsilon$, und wenn in dieſer Formul $1 - \sin\varepsilon^2$ ſtatt $\cos\varepsilon^2$, $\frac{1}{2}\sin 2\varepsilon$ ſtatt $\sin\varepsilon \cos\varepsilon$ geſetzt wird, ſo erhält man $\int d\varepsilon \sin\varepsilon^2 = \varepsilon - \int d\varepsilon \sin\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\sin 2\varepsilon$, und daraus folgt $\int d\varepsilon \sin\varepsilon^2 = \frac{1}{2}(\varepsilon - \frac{1}{2}\sin 2\varepsilon)$. Dieſer Werth in obiger Gleichung gebraucht giebt $I = \frac{1}{2}\varphi \sin\varepsilon^2 \cos\delta + \frac{1}{2}\sin\delta \sin\varphi (\varepsilon - \frac{1}{2}\sin 2\varepsilon)$. Die conſtans fällt weg, weil dies Integral mit ε zugleich verſchwinden muß. Für ein andres Segment, deſſen Glanz ſich zu dem hier angenommenen, wie S : 1 verhält, wird die gefundene Formul noch in dem Verhältniß 1 : S verändert, oder welches einerley iſt, mit S multiplicirt.

Will man die Erleuchtung haben, welche das ganze Segment PDHE nach K ſchickt, ſo ſetzt man

$\varphi = 2\pi$, und $\varepsilon = \varrho =$ PD, da dann $I = \pi \sin\varrho^2 \cos\delta$ gefunden wird.

60. §.

1) Wenn die Axe des auffallenden Lichtkegels die Ebene K*k* ſenkrecht trift, ſo fällt P in Z, und es iſt ZKP $= \delta = 0$, $\cos\delta = 1$, alſo wird nun $I = \pi \sin\varrho^2$, welches der Fall der ſenkrechten Erleuchtung im 44. §. war.

2) Wenn der Mittelpunct der Kugel, welche die Ebene K*k* erleuchtet, mithin auch die Axe des auffallenden Strahlenkegels, im Horizont ſelbſt liegt, ſo iſt $\delta = 90°$, $\cos\delta = 0$, $\sin\delta = 1$: alsdann aber kann nur noch die Hälfte der Kugel ihr Licht auf K*k* werfen, wie denn auch nun nur die Hälfte des Segments PDHE über dem Horizont liegt. Setzt man alſo um $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, und $\varepsilon = \varrho$, mithin $\sin\varphi = 1$; ſo hat man die Erleuchtung, welche der auf einer Seite der Verticalfläche ZKC liegende Quadrant des Segments PDHE nach K*k* ſchickt, $= \frac{1}{2}(\varrho - \frac{1}{2}\sin 2\varrho)$: die von beyden Quadranten, oder der völligen noch über dem Horizont befindlichen Halbkugel herrührende Erleuchtung aber $= \varrho - \frac{1}{2}\sin 2\varrho$. Man könnte ſie die horizontale Erleuchtung nennen.

3) Der allgemeine Ausdruck für die Erleuchtung war $I = \pi \sin\varrho^2 \cos\delta$ (59. §.) und es iſt $\pi \sin\varrho^2$ die Fläche desjenigen Kreiſes, der die leuchtende Kugel aus K geſehen zu begränzen ſcheint: mithin verhält ſich die Erleuchtung wie das Product aus der Fläche dieſer Kreisförmigen Gränze der leuchtenden Kugel in den Coſinus der Diſtanz ihres Mittelpuncts vom Scheitel, oder den Sinus der Höhe ihres Mit-

Mittelpuncts über dem Horizont. Bey einer weit von K entfernten Kugel iſt $\pi \sin \rho^2$ die Fläche der ſcheinbahren Scheibe, welche dieſe Kugel dem Auge in K darſtellet. (30. §. Opt.)

4) Die ſenkrechte Erleuchtung war $= \pi \sin \rho^2$, und in der Höhe des Mittelpuncts der leuchtenden Kugel von 30° über dem Horizont, iſt $\delta = 60°$, alſo $\cos \delta = \sin 30° = \frac{1}{2}$, mithin die Erleuchtung in der Höhe von 30° halb ſo groß als die ſenkrechte Erleuchtung.

5) Die ſenkrechte Erleuchtung verhält ſich zur horizontalen, wie $\pi \sin \rho^2 : \rho - \frac{1}{2}\sin 2\rho$. Wenn demnach ρ nur klein und beynahe $\rho = \sin \rho$ iſt, ſo iſt jenes Verhältniß $= \pi \sin \rho : 1 - \cos \rho = \pi \sin \rho : \sin v. \rho$. Wird alſo für die Sonne $\rho = 16'$ angenommen, ſo hat man $\sin \rho = 0{,}0046542$, $\pi \sin \rho = 0{,}0146275$, $\cos \rho = 0{,}9999892$, $1 - \cos \rho = 0{,}0000108$, mithin verhält ſich die verticale Erleuchtung der Sonne zur horizontalen, wie $146275 : 108 = 1354 : 1$.

61. §.

Es ſey *LMON* ein Kreis, deſſen Fläche 5 Fig.
von einer Kugel *BDGE* um den Mittelpunct *C* erleuchtet wird. Der Mittelpunct dieſer leuchtenden Kugel liegt in der graden auf der Fläche des Kreiſes *LMN* in ſeinem Mittelpunct *A* ſenkrechten Linie *AC*: man ſucht die Menge Lichts, welche der Kreis anffängt.

Aufl. Es ſey die Entfernung der Mittelpuncte $AC = c$, der Halbmeſſer $AM = z$, alſo die Entfernung des Elements $Mmn\mu$ vom Mittelpunct der leuchtenden Kugel, nemlich $CM = \sqrt{(c^2 + z^2)}$,

und ſin AMC $= \frac{c}{\surd(c^2 + z^2)}$. Dieſer Winkel iſt für alle Elemente, die um einerley Abſtand z vom Mittelpunct A entfernt ſind, mithin zuſammen genommen den Ring LMON $\lambda\mu\omega\nu$ ausmachen, einerley: er iſt für ſie der Einfallswinkel des auffallenden Strahlenkegels DME. Wenn alſo der ſcheinbare Halbmeſſer CMD $= \varrho$ geſetzt wird, ſo iſt für das Element $Mmn\mu$ die Erleuchtung $= \pi \sin\varrho^2 \sin$ AMC. (59. 60. §.) Weil ferner $\sin\varrho$ $= \frac{CD}{CM} = \frac{r}{\surd(c^2 + z^2)}$, $CD = r$ geſetzt: ſo wird die eben erwehnte Erleuchtung $=$

$\frac{\pi c r^2}{(c^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$. Dieſe Erleuchtung iſt für alle Elemente des Ringes LMON $\lambda\mu\omega\nu$ einerley, und die Fläche deſſelben iſt $= 2\pi z dz$, mithin die Menge aller auf dieſen Ring fallenden Lichtſtrahlen $dM = \frac{2\pi^2\, c\, r^2\, zdz}{(c^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$. (48. §.) Oben im 16 §. iſt ſchon das Integral $\int \frac{2c\, zdz}{(c^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$= 2 \left(1 - \frac{c}{\surd(c^2 + z^2)}\right)$ gefunden, in der Vorausſetzung daß es mit $z = 0$ zugleich verſchwinden müſſe: alſo hat man hier $M = 2\pi^2 r^2$ $\left(1 - \frac{c}{\surd(c^2 + z^2)}\right)$.

62. §.

62. §.

1) Weil $\frac{c}{\sqrt{(c^2 + z^2)}} = \sin AMC = \cos$ ACM war, ſo iſt auch $M = 2\pi^2 r^2 \sin v . ACM$, da dann ACM der ſcheinbare Halbmeſſer des erleuchteten Kreiſes iſt aus dem Mittelpunct der leuchtenden Kugel geſehen.

2) Zwiſchen der Fläche des graden Kegels MCN iſt ein Segment FBG der leuchtenden Kugel enthalten, deſſen Fläche $= 2\pi r^2 \sin v . ACM$ (621 §. Geom.) Wenn alſo die Fläche dieſes Segments $= k^2$ geſetzt wird, ſo hat man $M = \pi . k^2$.

3) Wäre der Halbmeſſer des erleuchteten Kreiſes unendlich groß, ſo hätte man $M = 2\pi^2 r^2$, und in dem Ausdruck $M = \pi . k^2$ würde nun k^2 die halbe leuchtende Kugelfläche bezeichnen.

4) Nimmt man den Halbmeſſer des erleuchteten Kreiſes $= a$, mithin $z = a$ an, ſo iſt die auf den erleuchteten Kreis fallende Strahlenmenge $M = 2\pi^2 r^2 \left(1 - \frac{c}{\sqrt{(c^2 + a^2)}}\right)$. Die Fläche des erleuchteten Kreiſes iſt $= \pi a^2$, alſo die mittlere Erleuchtung, welche dieſe Kreisfläche empfängt,

$$= \frac{2\pi r^2}{a^2} \left(1 - \frac{c}{\sqrt{(c^2 + a^2)}}\right). \text{ (15. §.)}$$

63. §.

Die Menge Lichts, welche eine ins unendliche ausgebreitete Ebene von einer leuchtenden Kugel auffängt, iſt ſo groß als ſie in dem Fall ſeyn würde, wenn die Erleuch-

tung aller Elemente eines der halben leuchtenden Kugelfläche gleichen Kreiſes, der abſoluten Erleuchtung gleich wäre.

Beweis. Die ins unendliche ausgebreite Ebene fängt eine Menge Licht auf, die $= 2\pi^2 r^2$ iſt, (62 §. n. 3.) Aber die abſolute Erleuchtung iſt $= \pi$, (52. §.) und ein Kreis ſo groß als die halbe leuchtende Kugelfläche wäre $= 2\pi r^2$. Wenn demnach die Erleuchtung aller Elemente deſſelben der abſoluten Erleuchtung gleich wäre, ſo wäre die Menge des über demſelben verbreiteten Lichts $= 2\pi^2 r^2$, mithin eben ſo groß, als die vorige Menge.

64. §.

Stellt man ſich die leuchtende Kugel zwiſchen zwoen parallelen, und ins unendliche ausgebreiteten ebenen Flächen vor; ſo fangen beyde zuſammen alles Licht auf, was die Kugel nach allen Seiten ausbreitet. Demnach iſt dieſe geſammte Menge Lichts $= 4\pi^2 r^2$, oder eben dieſe Menge Lichts iſt ſo groß, als diejenige ſeyn würde, welche über einem der ganzen Kugelfläche gleichen Kreiſe verbreitet wäre, wenn die Erleuchtung aller Elemente deſſelben der abſoluten Erleuchtung gleich wäre.

Wenn man annimmt, daß die leuchtende Kugel mit einer concentriſchen Kugelfläche umgeben ſey, und der Halbmeſſer dieſer Kugelfläche $= x$ geſetzt wird; ſo werden alle Elemente dieſer Kugelfläche ſenkrecht, und gleich ſtark erleuchtet: für jedes Element wäre die Erleuchtung $= \frac{\pi r^2}{x^2}$. (58. §.) Demnach wäre die geſammte Menge Lichts,

lichte, welche die Kugelfläche auffienge, $= \frac{\pi r^2}{x^2} \cdot 4\pi x^2 = 4\pi^2 r^2$, welches mit dem vorigen überein kommt.

65. §.

Wenn der Punct C, welcher bisher als der Mittelpunct einer leuchtenden Kugel $DBEG$ iſt betrachtet worden, ein ſo ſtark glänzender Punct wäre, daß die von ihm auf eine unendlich kleine Ebene in der Entfernung r ſenkrecht fallende Erleuchtung eben ſo groß wäre, als die abſolute Erleuchtung einer leuchtenden Kugel $DBEG$, wozu der Halbmeſſer $= r$ gehörte; ſo würde derſelbe die Kreisfläche $LMON$ in allen Stücken eben ſo, wie die Kugel $DBEG$ erleuchten.

Beweis. Die ſenkrechte Erleuchtung, welche eine unendlich kleine Ebene in der Entfernung r von dem leuchtenden Punct C empfängt, iſt vermöge der Vorausſetzung $= \pi$. Demnach empfängt das Element $Mmn\mu$ die Erleuchtung $=$

$$\frac{\pi r^2 \sin AMC}{CM^2} \text{ (9 §.) } = \frac{\pi r^2 AC}{CM^3} =$$

$\frac{\pi r^2 c}{(c^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ wenn $AC = c$, $AM = z$ geſetzt wird; und eben ſo groß iſt die Erleuchtung des Elements $Mmn\mu$, wenn es ſelbige von der Kugel DBEG empfängt, deren abſolute Erleuchtung $= \pi$ iſt. (61. §.) Dieſemnach fällt auf das Element $Mmn\mu$, ſo wie auf den Ring $LMON\lambda\mu\omega\nu$, und

auf

auf den ganzen Kreis LMON einerley Menge Lichts, es mag die Erleuchtung von dem Punct C, oder von der Kugel BDGE kommen.

Der V. Abſchnitt.

Allgemeinere Theorie der Erleuchtung auch wenn die ſcheinbare Gränze der leuchtenden Fläche nicht zwiſchen einer graden Kegelfläche liegt.

66. §.

Wenn die ſcheinbare Gränze des leuchtenden Körpers gradlinicht iſt, ſo iſt das Licht, ſo derſelbe jedem Element einer Ebene zuſendet, in dem Raum einer Pyramide enthalten, und dasjenige Stück einer hohlen Kugelfläche, welches der Ebene eben ſoviel Licht zuſchicken würde, iſt zwiſchen dreyen oder mehrern Bogen gröſter Kreiſe enthalten: mithin ein ſolches Stück der Kugelfläche, das ſich in Kugeldreyecke eintheilen läßt, ſo wie man jede gradlinichte Figur in Dreyecke theilen kann. Um den Vortrag im folgenden abzukürzen, werde ich ſo reden, als wenn ich nur Erleuchtungen betrachtete, die von dergleichen hohlen Kugelflächen herrühren, da dann allemahl von ſelbſt klar ſeyn wird, was die ſichtbare Gränze andrer leuchtender Flächen für eine Geſtalt haben muß, wenn ihre Erleuchtung bey einerley Glanz mit der Erleuchtung der betrachteten Kugelfläche einer-

einerley ſeyn ſoll. Auch werde ich vorausſetzen, daß alle Elemente der leuchtenden Fläche einerley Glanz haben, und daß dieſer Glanz S = 1 ſey.

67. §.

Die Erleuchtung zu finden, welche von einem rechtwinklichten Kugeldreyeck *ZRM* herrührt, deſſen eine Perpendiculärſeite zugleich vertical ſteht, und mit der Hypothenuſe im Scheitelpunct zuſammen ſtößt: die unendlich kleine erleuchtete Ebene *Kk* horizontal angenommen. 11. F.

Aufl. Die unendlich kleine Ebene K*k* ſtelle man ſich wiederum nach allen Seiten erweitert vor, ſo giebt ſie den horizontalen gröſten Kreis APB. Nun ſey Z der Scheitelpunct ZRM das bey R rechtwinklichte Kugeldreyeck, die vertical ſtehende Perpendicular-Seite ZR, ſo iſt auch die Hypothenuſe ZM vertical, die andre Perpendiculär-Seite RM ſtoße mit dem Horizont in P zuſammen, ſo iſt P der zum Bogen ZR gehörige Pol: (496. §. Geom.) und wenn ZR, ZM in B und S den Horizont treffen, ſo iſt BS das Maaß des Winkels RZM am Scheitelpunct. Es wachſe nun ZR um das Differential R*r*, und durch *r* ſey ein gröſter Kreisbogen von neuen auf Z*r* ſenkrecht geſetzt, ſo geht derſelbe ebenfals durch P, und PR iſt in die Lage P*r* gerückt, ſo wie das Dreyeck ZRM und das Differential MR*rm* angewachſen iſt, und die Hypothenuſe ZM um das Differential M*m*. Wenn ferner Mμ und *mn* ein paar Bogen zweener zum Pol P gehöriger Parallelkreiſe ſind, ſo iſt das Element Mμ*mn* als ein Rechteck zu betrachten, deſſen

Sei-

Seitenlinien $M\mu$ und Mn ſind. Man ſetze alſo $ZR = u$, $RM = w$, ſo iſt $Rr = du$, $Mn = dw$, $M\mu = Kr \,.\, \sin PM = du\cos w$, mithin das Element $M\mu mn = du dw \cos w$. Ferner ſind u und w ſo zu betrachten, wie auf einer Ebene die Abſciſſe und Ordinate, in der Gleichung für eine krumme Linie: wenn nemlich der Winkel $RZM = \alpha$ geſetzt wird, ſo hat man $\sin . u = \cot\alpha \tan . w$, (538. n. II. Geom.) und dieſe Gleichung ergiebt, wie w von u abhängt, wenn α einerley bleibt. Das Maaß des Winkels unter welchem die Strahlen-Pyramide $Mnm\mu K$ das Element Kk trift, iſt der Bogen SM oder die Höhe des Elements $M\mu mn$ über dem Horizont, mithin iſt die davon auf Kk fallende Erleuchtung $= du dw \cos w \sin SM$. Ferner hat man $\sin SM = \cos ZM = \cos . u \cos . w$ (538 §. n. III. Geom.); wenn alſo die geſuchte Erleuchtung $= I$ geſetzt wird, ſo iſt $dI = du dw \cos w^2 \cos . u$.

Um nun die Integration zu bewerkſtelligen, ſetze man $1 - \sin w^2$ ſtatt $\cos w^2$, ſo hat man $dI = du \cos u \,(dw - dw \sin w^2)$. Wenn ferner zuerſt allein w veränderlich angenommen, u aber als beſtändig betrachtet wird, ſo giebt das Integral $\int^{w} dI$ die Erleuchtung, welche das Element $RMmr$ nach Kk ſchickt: und weil $\int dw \sin w^2 = \frac{1}{2}(w - \frac{1}{2}\sin 2w)$ gefunden wird, ſo erhält man $\int^{w} dI = \frac{1}{2} du \cos u \,(w + \frac{1}{2}\sin 2w)$. Integrirt man dieſe Formul von neuen in der Vorausſetzung, daß ſich u, und mit u zugleich w ändere, ſo findet man die geſammte Erleuchtung, welche das Dreyeck ZRM nach Kk ſchickt. Bevor dieſe zweyte Integration

vorge-

vorgenommen werden kann, muß eine von den veränderlichen Gröſſen u oder w vermittelſt der Gleichung $\sin u = \cot\alpha \tan w$ weggeſchaft werden, und man nimmt leicht wahr, daß hier am leichteſten u weggeſchaft werde, weil man aus der zuletzt angeführten Gleichung $du \cos u = \cot\alpha \,.\, d\tan w$ erhält, und dies mit der Gleichung, welche vermittelſt der erſten Integration gefunden ward, verglichen, giebt $\int^{w} dI = \frac{1}{2}\cot\alpha \; (w \,.\, d\tan w + \sin w \cos w \,.\, d\tan w)$. Es iſt aber $d\tan w = \dfrac{dw}{\cos w^2}$ (457. §. Hydraul.) alſo $\sin w \cos w \,.\, d\tan w = dw \,.\, \tan w$, mithin wird $\int^{w} dI = \frac{1}{2}\cot\alpha \,(w \,.\, d\tan w + dw \,.\, \tan w)$, folglich $I = \frac{1}{2} w \cot\alpha \tan w$ gefunden: und weil $\cot\alpha \tan w = \sin . u$ war, ſo hat man auch $I = \frac{1}{2} w \,.\, \sin . u$.

Wenn der Bogen BR $= \eta$ geſetzt wird, ſo iſt $u + \eta = 90°$, mithin $I = \frac{1}{2} w \cos\eta$, und η iſt das Maaß des Winkels BPR unter welchem die Seite RM $= w$ gegen den Horizont geneigt iſt. Die beyden übrigen Seiten des ſphäriſchen Dreyecks RZM ſind auf dem Horizont ſenkrecht angenommen. Wenn alſo das Maaß der ſcheinbaren Gröſſe eines leuchtenden Körpers ein rechtwinklichtes ſphäriſches Dreyeck dieſer Art iſt, wovon zwo Seiten, die Hypothenuſe und eine Perpendiculärſeite, auf dem Horizont ſenkrecht ſind, die dritte aber, nemlich die zweyte Perpendiculärſeite gegen den Horizont geneigt iſt; ſo iſt die Erleuchtung das halbe Product der gegen den Horizont geneigten Seite in den Coſinus ihres Neigungswinkels gegen den Horizont.

68. §.

Weil w unbeſtimmt jeden Bogen wie RM bezeichnet, ſo iſt die dem Dreyeck ZRN zugehörige Erleuchtung $= \frac{1}{2}$ RN . coſη, ſo wie die dem Dreyeck ZRM zugehörige $= \frac{1}{2}$ RM . coſη. Demnach iſt ferner die dem Dreyeck MZN zugehörige Erleuchtung $= \frac{1}{2}$ coſη (RN — RM) $= \frac{1}{2}$ MN . coſη, und daraus erhellet, daß der im vor. §. zuletzt bemerkte Satz von jedem Dreyeck gelte, wenn zwey Schenkel deſſelben vertical ſtehen. Denn letztere können nur im Scheitel Z zuſammen laufen, und durch Z kann allemahl ein dritter Bogen ZR auf MN ſenkrecht gezogen werden, da dann der eben angeführte Beweis ſeine Anwendung findet.

Wenn die Bogen ZM, ZN, bis an den Horizont in S und T verlängert werden, ſo ergiebt die Betrachtung der Figur in Rückſicht auf den eben bewieſenenen Satz: es ſey die auf K fallende Erleuchtung

vom Dreyeck PZM $= \frac{1}{2}$ PM coſη

vom Dreyeck PZN $= \frac{1}{2}$ PN coſη,

alſo

vom Dreyeck PZS $= \frac{1}{2}$ PS

vom Dreyeck PZT $= \frac{1}{2}$ PT,

mithin

vom Dreyeck PSM $= \frac{1}{2}$ (PS — PM coſη)

vom Dreyeck PTN $= \frac{1}{2}$ (PT — PN coſη)

folglich auch

vom Dreyeck PBR $= \frac{1}{4}\pi$ (1 — coſη) $= \frac{1}{4}\pi$ ſinv. η.

vom Dreyeck PBZ $= \frac{1}{4}\pi$,

Das letztere Dreyeck iſt der vierte Theil von der Halbkugel, mithin wäre die Erleuchtung, welche

die

die völlige Halbkugel nach K*k* ſchickt, $= \pi$, und das iſt, wie bekannt, die abſolute Erleuchtung.

Noch findet man die auf K*k* fallende Erleuchtung
vom Dreyeck MZN $= \frac{1}{2}$ MN coſ SPM
vom Dreyeck CZL $= \frac{1}{2}$ CL coſ SGL,
alſo
vom Viereck LMNC $= \frac{1}{2}$ (MN coſ SPM – CL coſ SGL)
mithin
vom Viereck STCL $= \frac{1}{2}$ (ST – CL coſ SGL):
und eben ſo
vom Viereck STMN $= \frac{1}{2}$ (ST – MN coſ SPM).

69. §.

Die ſcheinbare Gränze eines leuchtenden Körpers, der auf die unendlich kleine Ebene *Kk* eine Strahlen-Pyramide wirft, iſt ein ſphäriſches Dreyeck *CDE* von willkührlicher Geſtalt und Lage: man ſoll die Erleuchtung finden, welche die Ebene *Kk* empfängt. 11. 12 F.

Aufl. Zur Erleichterung der Vorſtellung betrachte man die Ebene K*k* als horizontal liegend, und nehme wiederum an, daß dieſe Ebene nach allen Seiten erweitert den horizontalen Kugelſchnitt AHGB gebe. Das zu dieſem Horizont gehörige Zenith ſey Z, alſo KZ die Scheitellinie. Wenn man durch dieſe Scheitellinie und jeden Winkelpunct des Dreyecks CDE eine Ebene legt; ſo ergeben ſich drey gröſte Kreisbogen ZC, ZD, ZE, zwiſchen dem Zenith und jedem Winkelpunct des Dreyecks, die mit den dreyen Seitenlinien des letztern drey andre Dreyecke einſchlieſſen, da dann jedes dieſer neuen Dreyecke zwo verticale Seiten hat.

Uebrigens wird das Zenith entweder innerhalb der Gränzen des Kugeldreyecks, oder im Umfange deſſelben, oder auſſerhalb ſeiner Gränzen liegen.

11 F. 1) Im erſten Fall, den die 11 Fig. vorſtellt, iſt CDE die Summe der Dreyecke ZCD, ZCE, ZDE, und die von CDE kommende Erleuchtung iſt die Summe der Erleuchtungen, welche jene drey im Scheitel zuſammen laufende Dreyecke der Ebene K*k* mittheilen. Es ſind aber nach dem 41. §. dieſe Erleuchtungen

vom Dreyeck ZCD $= \frac{1}{2}$ CD coſ CFG,

vom Dreyeck ZCE $= \frac{1}{2}$ CE coſ CGF,

vom Dreyeck ZDE $= \frac{1}{2}$ DE coſ DHF,

alſo die geſuchte Erleuchtung

$= \frac{1}{2}$ (CD coſ CFG + CE coſ CGF + DE coſ DHF.)

11 F. 2) Liegt das Zenith in einer Seitenlinie des Dreyecks, wie wenn es COE wäre, (11. Fig.) wo Z in der Seitenlinie OE liegt; ſo wäre daſſelbe vermittelſt des Bogens ZC ſchon in zwey andre getheilt, und die geſuchte Erleuchtung wäre $= \frac{1}{2}$ (CE coſ CGF + CO coſ CFG)

12 F. 3) Liegt aber das Zenith auſſerhalb der Gränzen des Dreyecks CDE, wie es die 12 Fig. vorſtellt; ſo iſt dies Dreyeck nicht mehr die Summe der dreyen im Scheitel zuſammen laufenden Dreyecke, ſondern nach Verſchiedenheit der Lage der Seitenlinien entweder die Summe zwoer um das dritte vermindert, oder auch wohl der Ueberſchuß eines dieſer Dreyecke über die Summe der übrigen beyden. In der 12 Fig. iſt CDE = ZCD + ZCE − ZED: wenn aber CE in CE′ fiele, ſo wäre CDE′ = ZCD

$= ZCD - (ZCE' + ZE'D)$. Mithin iſt die Erleuchtung

des △. CDE $= \frac{1}{2}$ (CD coſ CFG' + CE coſ CGF − DE coſ DHG.)

des △. CDE' $= \frac{1}{2}$ (CD coſ CFG − CE' coſ CG'F − DE' coſ DHG.)

70. §.

Die ſcheinbare Gränze des leuchtenden Körpers iſt von ſovielen Bogen gröſter Kreiſe, wie man will eingeſchloſſen, oder ein ſphäriſches Polygon, wie *CDEFG*: man ſoll die Gröſſe der Erleuchtung finden, welche die Ebene *Kk* empfängt. 3 F.

Aufl. Wenn man durch jeden Winkelpunct, wie beym Dreyeck (69. §.) einen Verticalkreis legt, ſo erhält man ſoviele im Scheitel zuſammen laufende Dreyecke, als das ſphäriſche Polygon Seitenlinien hat, und man kann, die von jedem derſelben abhangende Erleuchtung dem 68 §. gemäß finden. Wenn der Scheitelpunct Z innerhalb der Gränzen des Polygons liegt, ſo iſt letzteres die Summe der in Z zuſammen laufenden Dreyecke, und die von dem Polygon kommende Erleuchtung die Summe der Erlenchtungen, welche die Dreyecke nach K*k* ſchicken. Läge Z im Umfange des Polygons, ſo behielte dies alles noch ſeine Richtigkeit; nur würde man ein Dreyeck weniger erhalten, wenn eine Seitenlinie des Polygons durch Z liefe, und zwey Dreyecke weniger, wenn ein Winkelpunct des Polygons mit Z zuſammen fiele.

Wenn dagegen Z auſſerhalb der Gränzen des Polygons liegt, ſo iſt die Fläche des letztern nicht

mehr die Summe der in Z zuſammen laufenden Dreyecke, ſondern der Ueberſchuß der Summe einiger dieſer Dreyecke, oder auch wohl nur eines derſelben, über die Summe der übrigen: mithin iſt alsdenn auch die Erleuchtung welche das Polygon nach K*k* ſchickt, der Ueberſchuß der Summe der Erleuchtungen einiger dieſer Dreyecke, oder eines derſelben, über die Summe der Erleuchtungen, welche von allen übrigen der Ebene K*k* zugeſchickt wird. Ein Beyſpiel hievon giebt die 13. Figur: daſelbſt iſt das Polygon CDEFG = ZCD + ZCG + ZGF — (ZEF + ZED), und die Erleuchtung des Polygons wird gefunden, wenn man die Summe der Erleuchtungen der Dreyecke ZEF und ZED von der Summe der Erleuchtungen der Dreyecke ZCD, ZCG, ZGF abziehet.

71. §.

14 F. Die ſcheinbare Geſtalt LMN des leuchtenden Körpers ſey nun welche ſie wolle, ſo kann ihre Gränze allemahl als eine auf der Oberfläche der Kugel verzeichnete Linie betrachtet werden. Innerhalb dieſer Gränze ſey C ein bekannter Punct, M ein Punct im Umfang derſelben, CM ein gröſter Kreisbogen, und ZCV ein Verticalkreis durch C. Hat man nun eine Gleichung zwiſchen dem Winkel ZCM = φ und dem Bogen CM = ψ, ſo drückt ſelbige die Natur der Linie aus, welche die ſcheinbare Gränze des leuchtenden Körpers abgiebt. Der Winkel ZCM = φ wachſe um das Differential MC*m* = $d\varphi$, ſo wächſt CM = ψ, um das Differential $d\psi$. Durch M und *m* ſtelle man ſich nemlich ein paar Bogen Mμ, *mn* zum Pol C gehöriger

höriger Parallelkreiſe vor, ſo iſt $\mu m = d\psi$, ſo wie $M\mu = d\varphi \sin\psi$, mithin das Element $M\mu mn = d\varphi d\psi \sin\psi$. Noch ſey ZMV ein Verticalkreis durch M, ſo hat man $ZM = \zeta$ aus dem Winkel $ZCM = \varphi$ und den anliegenden Seiten $CM = \psi$ und $CZ = \delta$ geſetzt. Es iſt nemlich $\cos\zeta = \cos\delta \cos\psi + \cos\varphi \sin\delta \sin\psi = \sin FM$, und FKM iſt der Einfallswinkel für die Strahlenpyramide $M\mu mnK$, folglich die Erleuchtung, welche das Element $M\mu mn$ nach K ſchickt $= d\varphi\, d\psi\, (\sin\psi \cos\psi \cos\delta + \sin\delta \cos\varphi \sin\psi^2) = dI$.

Wenn dieſer Ausdruck ſo integrirt wird, daß man allein ψ veränderlich annimmt, ſo findet man $\int d\psi \sin\psi \cos\psi = \frac{1}{2} \sin\psi^2$, und $\int d\psi \sin\psi^2 = \frac{1}{2}$

ψ

$(\psi - \frac{1}{2} \sin 2\psi)$; (59. §.) mithin $\int dI = \frac{1}{2} d\varphi\, (\cos\delta \sin\psi^2 + \sin\delta \cos\varphi\, (\psi - \frac{1}{2} \sin 2\psi))$. Vermittelſt der zwiſchen φ und ψ als bekannt angenommenen Gleichung muß nun ferner ψ und $d\psi$ oder ſtatt deſſen φ und $d\varphi$ aus der Gleichung weggeſchaft, und hiernächſt von neuen integrirt werden, ſo erhält man die Erleuchtung $= I$, welche das Stück der Kugelfläche DCM der Ebene Kk zuſchickt.

Wenn die Figur LMN ein Kreis iſt, ſo iſt ψ unveränderlich, wenn ſich gleich φ ändert, alſo findet man in dieſem beſondern Fall $I = \frac{1}{2}\varphi \cos\delta \sin\psi^2 + \frac{1}{2} \sin\delta \sin\varphi\, (\psi - \frac{1}{2} \sin 2\psi)$; welches die im 59. §. ſchon gefundene Auflöſung iſt.

Der VI. Abſchnitt.

Anwendung
dieſer Theorie auf einige merkwürdige beſondre Fälle.

72. §.

15 F. Ueber der horizontalen Ebene *ABCD* ſtehet ein leuchtendes Rechteck *ABEF* ſenkrecht, und zwar ſo, daß eine Seitenlinie *AB* des letztern im Horizont *ABCD* liegt, oder wenigſtens damit parallel iſt; im Horizont iſt die Stelle eines Elements *Mmnμ* durch die Entfernungen *AP* und *PM* gegeben; man ſucht die Gröſſe der Erleuchtung dieſes Elements.

Aufl. Alle Strahlen, welche das Rechteck ABEF auf M wirft, ſind in dem Raum einer Pyramide MABEF enthalten, wovon M die Spitze und ABEF die Grundfläche wäre. Die Seitenfläche MFE ſchneide ABCD in KL, ſo iſt KL ♯ FE, weil beyde horizontal ſind, mithin auch KL = AB, ferner ſey MQ auf FE mithin auch auf KL ſenkrecht, ſo wie MP auf AB und KL ſenkrecht iſt; ſo iſt zugleich KL auf der Ebene PMQ ſenkrecht, letztere iſt die Ebene des Neigungswinkels der Ebene FME gegen den Horizont, und PMQ dieſer Neigungswinkel. Um den Mittelpunct M ſtelle man ſich eine mit dem Halbmeſſer = 1 beſchriebene Kugel-

gelfläche vor, ſo geben die Ebenen AMF, BME ein paar Verticalkreiſe, die im Zenith des Puncts M zuſammen ſtoſſen. Wenn nun die Höhe des leuchtenden Rechtecks ABEF unendlich groß wäre, oder die verticalen Seitenlinien AF, BE, nach Y und Z aufwärts ins unendliche fortliefen; ſo wäre zwiſchen den Gränzen des Pyramidenförmigen Raums ABZY ein Stück der um M beſchriebenen Kugelfläche enthalten, das die Geſtalt eines ſolchen ſphäriſchen Dreyecks hätte, wie BZS, SZT in der 11 Fig. ſind; ſtatt ABEF aber hätte man auf der Kugelfläche ein ſphäriſches Viereck, wie BRMS, SMNT, oder auch BSLE, STCL, in der 11 Fig. ſind. Dieſemnach kann man ſich AF, BE als verticale gröſte Kreisbogen, AB als einen Bogen des Horizonts und EF als einen gröſten Kreisbogen vorſtellen, deſſen Neigung gegen den Horizont = RMQ iſt: mithin wird die Erleuchtung, welche ABEF nach $Mmn\mu$ ſchickt = $\frac{1}{2}$ (AMB − FME coſ PMQ), (68 §.) die Erleuchtung aber, welche EFGH nach $Mmn\mu$ ſchickt, wäre = $\frac{1}{2}$ (FME coſ PMQ − GMH coſ PMR).

Wenn nun die Höhen AF = a, AG = c, nebſt der Breite AB = b des leuchtenden Rechtecks gegeben ſind, wie auch AP = x, PM = y; ſo ſind zugleich die Winkel AMB, FME, GMH, PMQ, PMR, gegeben. Es iſt nemlich AMB = PMA + PMB, und tang PMA = $\frac{x}{y}$, tang PMB = $\frac{b-x}{y}$, alſo tang AMB = $\frac{by}{y^2 + x^2 - bx}$. (455. §. Geom.) Ferner iſt tang QMF =

$= \frac{x}{\sqrt{(a^2+y^2)}}$, tang QME $= \frac{b-x}{\sqrt{(a^2+y^2)}}$, und FME = QMF + QME, alſo tang FME $=$ $\frac{b\sqrt{(a^2+y^2)}}{a^2+y^2+x^2-bx}$, und eben ſo, tang GMH $= \frac{b\sqrt{(c^2+y^2)}}{c^2+y^2+x^2-bx}$. Ueberdem hat man

tang PMQ $= \frac{a}{y}$, tang PMR $= \frac{c}{y}$,

alſo coſ PMQ $= \frac{y}{\sqrt{(a^2+y^2)}}$, und coſ PMR $=$

$\frac{y}{\sqrt{(c^2+y^2)}}$. Braucht man dieſe Werthe in den gefundenen Formuln, ſo giebt ſich die Erleuchtung, welche ABEF nach $Mmn\mu$ ſchickt $= \frac{1}{2}$

$$\left(\text{Arc . tang } \frac{by}{y^2+x^2-bx} - \frac{y}{\sqrt{(a^2+y^2)}} \cdot \text{Arc . tang . } \frac{b\sqrt{(a^2+y^2)}}{a^2+y^2+x^2-bx}\right),$$

diejenige aber, welche EFGH nach $Mmn\mu$ ſchickt,

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sqrt{a^2+y^2)}} \text{Arc . tg . } \frac{b\sqrt{(a^2+y^2)}}{a^2+y^2+x^2-bx} - \frac{y}{\sqrt{(c^2+y^2)}} \text{Arc . tg . } \frac{b\sqrt{(c^2+y^2)}}{c^2+y^2+x^2-bx}\right).$$

Könnte man vorausſetzen, daß das ſcheinbare Himmels-Gewölbe durchaus einerley Glanz hätte; ſo würde die Aufgabe dienen, die Erleuchtung zu finden, welche auf eine gegebene Stelle des horizontalen Bodens fällt, wenn das Tageslicht durch eine

eine rechteckigte Thür- oder Fenſter-Oefnung in ein Zimmer hinein ſcheint.

Nimmt man PR = c unendlich groß an, ſo findet ſich die Erleuchtung, welche die von EF nach Y und Z ſich ins unendliche fort erſtreckende Ebene EFYZ nach $Mmn\mu$ ſchickt, $= \frac{\frac{1}{2}y}{\sqrt{(a^2+y^2)}}$

$$. \text{Arc. tg.} \frac{b\sqrt{(a^2+y^2)}}{a^2+y^2+x^2-bx},$$ oder welches einerley iſt, eben dieſe Erleuchtung = ½ FME . coſ. PMQ.

73. §.

Die geſammte Lichtmenge zu finden, wel- 15 F.
che die leuchtende Fläche *ABEF* auf *AKLB* wirft, wenn eben die Stücke, welche im vor. §. gegeben waren, auch hier als gegeben angenommen werden.

Aufl. Wenn man die Fläche des Elements $Mmn\mu = dxdy$ in die Erleuchtung multiplicirt, welche daſſelbe von ABEF empfängt, ſo hat man die auf dies Element fallende Lichtmenge; würde dieſes Product hiernächſt ſo integrirt, daß man zuerſt y allein, hiernächſt aber auch x veränderlich annähme, ſo würde die geſuchte Lichtmenge gefunden werden. Die erwehnte Erleuchtung iſt im vor. §. zwar gefunden; allein wenn man die dortige Formul in das Element $dydx$ multiplicirt, ſo erhält man eine ſehr verwickelte Differential-Formul, die ſich nicht wohl ohne groſſe Umwege integriren läßt. Dieſen Schwürigkeiten kann man ausweichen, wenn man folgendes in Erwägung ziehet.

Die Erleuchtung, welche das Element $dydx$ von der Ebene EFYZ empfängt, die ſich von EF aus nach Y und Z ins unendliche fort erſtreckt, war $= \frac{1}{2}$ FME coſ PMQ, alſo iſt die von der erwehnten Ebene auf $Mmn\mu$ fallende Strahlenmenge $= \frac{1}{2} dydx$. FME . coſ PMQ. Die Winkel FME PMQ hängen auſſer x, y, b, nur von a ab, und nach Integration der eben angeführten Differential-Formul wird die Strahlenmenge, welche EFYZ auf ABCD wirft, eine Function von a, welche wenn $a = 0$ geſetzt wird, die Strahlenmenge geben muß, welche ABCD von BAYZ empfängt. Jene Strahlenmenge von dieſer ſubtrahirt muß die Strahlenmenge geben, welche AFEB auf ABCD wirft. Dieſemnach kommt die Auflöſung der Aufgabe darauf an, ob man die Formul $\frac{1}{2} dydx$. FME . coſ PMQ gehörig integriren kann. Man ſetze dies Differential $= dM$, ſo iſt auch $dM = \frac{1}{2} dydx$. QMF . coſ PMQ + $\frac{1}{2} dydx$. QME . coſ PMQ, weil FME = QMF + QME iſt. Ferner iſt coſ PMQ $= \frac{y}{\sqrt{(a^2+y^2)}}$, wenn alſo QMF $= \varphi$, QME $= \psi$ geſetzt wird, ſo erhält man $dM = \frac{\frac{1}{2}ydy}{\sqrt{(a^2+y^2)}} . \varphi\, dx + \frac{\frac{1}{2}ydy}{\sqrt{(a^2+y^2)}} . \psi\, dx$. Noch hat man $\text{tg}\varphi = \frac{x}{\sqrt{(a^2+y^2)}}$, $\text{tang}\psi = \frac{b-x}{\sqrt{(a^2+y^2)}}$, oder $\cot\varphi = \frac{\sqrt{(a^2+y^2)}}{x}$, $\cot\psi = \frac{\sqrt{(a^2+y^2)}}{b-x}$,

mit-

mithin $x^2 \cot\varphi^2 = a^2 + y^2$, und $(b-x)^2 \cot\psi^2 = a^2 + y^2$. Man nehme allein y als veränderlich an, und differentiire, ſo findet man $x^2 \cot\varphi . d \cot\varphi = ydy$, und $(b-x)^2 \cot\psi . d \cot\psi = ydy$; oder wenn hier wieder $\frac{\sqrt{(a^2+y^2)}}{x}$ ſtatt $\cot\varphi$, und $\frac{\sqrt{(a^2+y^2)}}{b-x}$ ſtatt $\cot\psi$ geſetzt wird, ſo iſt

$$d \cot\varphi . x . \sqrt{(a^2+y^2)} = ydy$$

und $d \cot\psi . (b-x) . \sqrt{(a^2+y^2)} = ydy$, alſo $dM = \frac{1}{2}\varphi d \cot\varphi . xdx + \frac{1}{2}\psi . d\cot\psi . (b-x)\, dx$, und das giebt

$$\int^{y} dM = \tfrac{1}{2} xdx \int \varphi d \cot\varphi + \tfrac{1}{2}(b-x)\, dx \int \psi\, d\cot\psi + C.$$

Weiter findet man $\int \varphi . d\cot\varphi = \varphi \cot\varphi - \int d\varphi \cot\varphi$, und $d\varphi \cot\varphi = \frac{d\varphi \cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{d . \sin\varphi}{\sin\varphi} = d . l \sin\varphi$, (315 §. Mech.) alſo $\int\varphi . d\cot\varphi = \varphi\cot\varphi - l\sin\varphi$; mithin auch $\int\psi d\cot\psi = \psi\cot\psi - l\sin\psi$. Dieſe Werthe alſo geben $\int^{y} dM = \frac{1}{2} xdx\, (\varphi\cot\varphi - l\sin\varphi) + \frac{1}{2}(b-x)\, dx\, (\psi\cot\psi - l\sin\psi) + C$, und vermittelſt dieſer Formul findet man die Strahlenmenge, welche auf das Element $PM\mu p$ fällt. Wenn $y = 0$ iſt, ſo muß dies Integral verſchwinden, zugleich verwandelt ſich der Winkel QMF in QPF, und QME in QPE. Man ſetze alſo $QPF = \eta$, $QPE = \vartheta$, ſo muß $\int^{y} dM = 0$ ſeyn, wenn $\varphi = \eta$, $\psi = \vartheta$ iſt, mithin wird $C = \frac{1}{2} xdx\, (l\sin\eta - \eta\cot\eta)$

+

$+\frac{1}{2}(b-x)\,dx\,(l\sin\vartheta - \vartheta\cot\vartheta)$, und

$$\int^{y} dM = \tfrac{1}{2}\,x dx\,(\varphi\cot\varphi - \log.\sin\varphi + l\sin\eta - \eta\cot\eta)$$
$$+\tfrac{1}{2}(b-x)dx(\psi\cot\psi - l\sin\psi + l\sin\vartheta - \vartheta\cot\vartheta).$$

Dieſe Formul muß noch mahl integrirt, und zugleich x, mithin auſſer φ und ψ auch η und ϑ veränderlich genommen werden. Hätte die erleuchtete Fläche eine ſolche Geſtalt, daß y von x abhienge, ſo müſte man x und dx durch y und dy, oder umgekehrt y durch x ausdrucken. Hier aber ſoll ABCD ein Rechteck ſeyn, deſſen Höhe AD, die ich $= c$ nehmen will, und deſſen Grundlinie AB $= b$ iſt. Dieſemnach bleibt PN $=$ AD einerley, wenn ſich auch x ändert, und wenn in der Formul, die für $\int^{y} dM$ gefunden iſt, $y = c$ geſetzt wird, ſo hat man die Strahlenmenge, welche PNyp auffängt. Man kann auch y in der Rechnung behalten, und als eine beſtändige Linie betrachten, ſo giebt die zweyte Integration die Strahlenmenge, welche das Rechteck AKLB auffängt.

Oben war nun $x^2 = (a^2 + y^2)\tan g\varphi^2$, ſo wie auch $x^2 = a^2 \tan g\eta^2$, mithin iſt $xdx = (a^2 + y^2)$ $\text{tg}\varphi\, d\text{tg}\varphi = a^2\, \text{tg}\eta\, d\text{tg}\eta$. Ferner war $(b-x)^2 =$ $(a^2 + y^2)\tan g\psi^2$, ſo wie auch $(b-x)^2 = a^2\text{tg}\vartheta^2$, mithin iſt $(b-x)\,dx = -(a^2+y^2)\,\text{tg}\psi\, d\text{tg}\psi$ $= -a^2\,\text{tg}\vartheta\, d\text{tg}\vartheta$. Dieſe Werthe geben

$$\int^{y} dM = \tfrac{1}{2}(a^2+y^2)\,(\varphi\, d\text{tg}\varphi - \tan g\varphi\; l\sin\varphi\, d\text{tg}\varphi$$
$$- \psi\, d\text{tg}\psi + \text{tg}\psi\; l\sin\psi\, d\text{tg}\psi)$$
$$- \tfrac{1}{2}\,a^2\,(\eta\, d\text{tg}\eta - \text{tg}\eta\; l\sin\eta\, d\text{tg}\eta$$
$$- \vartheta\, d\text{tg}\vartheta + \text{tg}\vartheta\; l\sin\vartheta\, d\text{tg}\vartheta).$$

Uebrigens findet man $\int\varphi\, d\text{tg}\varphi = \varphi\tan g\varphi - \int\text{tg}\varphi\, d\varphi$,
und

und $\mathrm{tg}\varphi\, d\varphi = \frac{d\varphi \sin\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{d.\cos\varphi}{\cos\varphi} = -d.l\cos\varphi$, alſo $\int\varphi\, d\,\mathrm{tg}\varphi = \varphi\,\mathrm{tg}\varphi + l\cos\varphi$. Ferner wird $\int \mathrm{tg}\varphi\, l\sin\varphi\, d\,\mathrm{tg}\varphi = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\varphi^2\, l\sin\varphi - \int\frac{1}{2}\mathrm{tg}\varphi^2\, d.l\sin\varphi$ gefunden, und $\frac{1}{2}\mathrm{tg}\varphi^2\, d\,l\sin\varphi = \frac{1}{2}\frac{\sin\varphi^2}{\cos\varphi^2}\cdot\frac{d\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{2}\frac{d\varphi\sin\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{1}{2}d.l\cos\varphi$; mithin iſt $\int\mathrm{tg}\varphi\, l\sin\varphi\, d\,\mathrm{tg}\varphi = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\varphi^2\, l\sin\varphi + \frac{1}{2}l\cos\varphi$, und dieſer Ausdruck von dem vorigen abgezogen giebt $\int\varphi\, d\,\mathrm{tg}\varphi - \int\mathrm{tg}\varphi\, l\sin\varphi\, d\,\mathrm{tang}\varphi = \varphi\,\mathrm{tg}\varphi + \frac{1}{2}l\cos\varphi - \frac{1}{2}\mathrm{tg}\varphi^2\, l\sin\varphi$. Dieſemnach giebt die zweyte Integration

$$M = \tfrac{1}{2}(a^2+y^2).\begin{Bmatrix}\varphi\,\mathrm{tang}\varphi + \frac{1}{2}l\cos\varphi - \frac{1}{2}\mathrm{tg}\varphi^2\, l\sin\varphi \\ -\psi\,\mathrm{tg}\psi - \frac{1}{2}l\cos\psi + \frac{1}{2}\mathrm{tg}\psi^2\, l\sin\psi\end{Bmatrix}$$
$$+ \tfrac{1}{2}a^2.\begin{Bmatrix}\eta\,\mathrm{tang}\eta + \frac{1}{2}l\cos\eta - \frac{1}{2}\mathrm{tg}\eta^2\, l\sin\eta \\ -\vartheta\,\mathrm{tang}\vartheta - \frac{1}{2}l\cos\vartheta + \frac{1}{2}\mathrm{tg}\vartheta^2\, l\sin\vartheta\end{Bmatrix}$$
$$+ \text{Conſt.}$$

Mit x verſchwindet zugleich φ und η, ſo wie M, es wird aber $\psi = \text{FKE}$, und $\vartheta = \text{FAE}$. Man ſetze alſo $\text{FKE} = \alpha$, $\text{FAE} = \beta$, ſo wird Conſt. =

$$\tfrac{1}{2}(a^2+y^2)(\alpha\,\mathrm{tg}\alpha + \tfrac{1}{2}l\cos\alpha - \tfrac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha^2\, l\sin\alpha)$$
$$+ \tfrac{1}{2}a^2(\beta\,\mathrm{tg}\beta + \tfrac{1}{2}l\cos\beta - \tfrac{1}{2}\mathrm{tg}\beta^2\, l\sin\beta),$$

und man erhält

$$M = \tfrac{1}{2}(a^2+y^2).\begin{Bmatrix}\varphi\,\mathrm{tg}\varphi + \frac{1}{2}l\cos\varphi - \frac{1}{2}\mathrm{tg}\varphi^2\, l\sin\varphi \\ +\alpha\,\mathrm{tg}\alpha + \frac{1}{2}l\cos\alpha - \frac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha^2\, l\sin\alpha \\ -\psi\,\mathrm{tg}\psi - \frac{1}{2}l\cos\psi + \frac{1}{2}\mathrm{tg}\psi^2\, l\sin\psi\end{Bmatrix}$$
$$+ \tfrac{1}{2}a^2.\begin{Bmatrix}\eta\,\mathrm{tg}\eta + \frac{1}{2}l\cos\eta - \frac{1}{2}\mathrm{tg}\eta^2\, l\sin\eta \\ +\beta\,\mathrm{tg}\beta + \frac{1}{2}l\cos\beta - \frac{1}{2}\mathrm{tg}\beta^2\, l\sin\beta \\ -\vartheta\,\mathrm{tg}\vartheta - \frac{1}{2}l\cos\vartheta + \frac{1}{2}\mathrm{tg}\vartheta^2\, l\sin\vartheta\end{Bmatrix}.$$

Dieſer allgemeine Ausdruck giebt die Menge Lichts, welche auf das Rechteck APMK fällt; um

ſie für das ganze Rechteck ABLK zu haben, muß man $x = AB = b$ ſetzen. Alsdann iſt $\varphi = FLE = FKE = \alpha$, $\psi = 0$, $\eta = EBF = FAE = \beta$, $\vartheta = 0$; demnach erhält man für das Rechteck AKLB die Strahlenmenge M =

$$(a^2 + y^2)(\alpha \mathrm{tg}\alpha + \tfrac{1}{2} l \cos\alpha - \tfrac{1}{2} \mathrm{tg}\alpha^2 \, l \sin\alpha)$$
$$- a^2 (\beta \mathrm{tg}\beta + \tfrac{1}{2} l \cos\beta - \tfrac{1}{2} \mathrm{tg}\beta^2 \, l \sin\beta).$$

Dieſe Strahlenmenge wirft die von EF nach Y und Z ins unendliche fortlaufende Fläche EFYZ auf AKLB, und es iſt dabey zu bemerken, daß die Winkel $\alpha = FKE$ und $\beta = FAE$ von $a = AF$ abhängen. Man hat nemlich $\mathrm{tang}\alpha = \frac{b}{\sqrt{(a^2 + y^2)}}$, und $\mathrm{tang}\beta = \frac{b}{a}$, und wenn $a = 0$ genommen wird, ſo iſt $\alpha = AKB$, $\beta = 90°$. Weil nun allemahl $a \mathrm{tg}\beta = b$ bleibt, ſo iſt auch in dem Fall $a = 0$, zugleich $a^2 \mathrm{tg}\beta = \frac{b^2}{\infty} = 0$, ferner wäre zwar $l \cos\beta = l.0 = -\infty$, allein es iſt $a^2 l \cos\beta = 0$, ſo wie $l \sin\beta = l1 = 0$ wird. Man ſetze nun $AKB = \gamma$, ſo findet ſich die geſammte Strahlenmenge, welche AYZB nach AKLB wirft, $= y^2 (\gamma \mathrm{tg}\gamma + \frac{1}{2} l \cos\gamma - \frac{1}{2} \mathrm{tg}\gamma^2 \, l \sin\gamma)$ und man hat $\mathrm{tg}\gamma = \frac{b}{y}$, $\cos\gamma = \frac{y}{\sqrt{(y^2 + b^2)}}$, $\sin\gamma = \frac{b}{\sqrt{(y^2 + b^2)}}$.

Man ſetze dieſe zuletzt gefundene Strahlenmenge = M′ ſo hat man diejenige Strahlenmenge, welche AFEB nach AKLB wirft, =

$$M'-M = y^2 \left(\gamma \operatorname{tg}\gamma + \tfrac{1}{2} l \cos\gamma - \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}\gamma^2 l \sin\gamma\right)$$
$$+ a^2 \left(\beta \operatorname{tg}\beta + \tfrac{1}{2} l \cos\beta - \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}\beta^2 l \sin\beta\right)$$
$$-(a^2+y^2) \left(\alpha \operatorname{tg}\alpha + \tfrac{1}{2} l \cos\alpha - \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}\alpha^2 l \sin\alpha\right).$$

Für die ganze Fläche ABCD wird alsdenn $y =$ AD genommen.

74. §.

Weil $\operatorname{tang}\alpha = \frac{b}{\sqrt{(a^2+y^2)}}$, $\operatorname{tang}\beta = \frac{b}{a}$, und $\operatorname{tang}\gamma = \frac{b}{y}$, ſo ändern ſich nur α und γ mit y. Wird y unendlich groß genommen, ſo werden α und $\gamma = 0$. Wird alſo die Strahlenmenge $=$ L geſetzt, welche auf die nach C und D ins unendliche fortlaufende Ebene ABCD fallen würde, ſo hat man $L = a^2 (\beta \operatorname{tg}\beta + \tfrac{1}{2} l \cos\beta - \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}\beta^2 l \sin\beta)$. Stellt man ſich durch EF eben ſo eine Ebene EFOS mit ABCD parallel vor; ſo fällt auf ſelbige eben ſo viel Licht, mithin auf beyde zuſammen eine Menge Licht $= 2L$.

Es ſey FO mit AD parallel, und man ſtelle ſich die Ebene DAFO ebenfals nach D und O ins unendliche fort erweitert vor; ſo iſt BAE für dieſe Ebene, was $\beta =$ FAE für die Ebene ABCD war, und es iſt tang BAE $= \frac{a}{b} = \cot\beta$. Wird alſo die Strahlenmenge, welche AFOD auffienge, $= \lambda$ geſetzt, ſo iſt $\lambda = b^2 (\tfrac{1}{2}\pi - \beta) \cot\beta + \tfrac{1}{2} \sin\beta - \tfrac{1}{2} \cot\beta^2 l \cos\beta)$; und wenn EBCS eben ſo eine Ebene durch BE mit der vorigen parallel iſt, ſo fällt auf beyde zuſammen die Lichtmenge $= 2\lambda$.

Alle

Alle vier Ebenen durch die Seitenlinien des Rechtecks ABEF fangen alles Licht auf, welches von dieſem Rechteck nach allen Seiten ausgehet, und die geſammte Menge deſſelben iſt =

$$2L+2\lambda=2a^2\ (\beta \mathrm{tg}\beta+\tfrac{1}{2}\,l\cos\beta-\tfrac{1}{2}\mathrm{tg}\beta^2\,l\sin\beta)$$
$$+2b^2\,((\tfrac{1}{2}\pi-\beta)\cot\beta+\tfrac{1}{2}l\sin\beta-\tfrac{1}{2}\cot\beta^2\,l\cos\beta).$$

Es war aber $\mathrm{tg}\beta=\dfrac{b}{a}$, alſo $a=\dfrac{b}{\mathrm{tg}\beta}$ $=b\cot\beta$, und dieſer Werth ſtatt a geſetzt giebt

$$2L+2\lambda=2b^2\ (\beta\cot\beta+\tfrac{1}{2}\cot\beta^2\,l\cos\beta-\tfrac{1}{2}l\sin\beta)$$
$$+2b^2(\tfrac{1}{2}\pi\cot\beta-\beta\cot\beta+\tfrac{1}{2}l\sin\beta-\tfrac{1}{2}\cot\beta^2\,l\cos\beta),$$

oder $2L+2\lambda=\pi b^2\cot\beta=\pi ab$.

Dieſemnach iſt die geſammte Menge Licht, welche das Rechteck ABEF nach allen Seiten um ſich her verbreitet, ſo groß als diejenige, welche ein eben ſo groſſes Rechteck auffienge, wenn die Erleuchtung eines jeden Elements deſſelben der abſoluten Erleuchtung gleich wäre.

75. §.

16 F. **Ein leuchtender Kreis *ADBE* wirft ſein Licht auf die mit ihm parallele Ebene *RS*: man ſucht, wie groß die Erleuchtung eines Elements *Mm* dieſer Ebene ſey, wenn deſſen Stelle in dieſer Ebene gegeben iſt.**

Aufl. Es ſey CK auf RS ſenkrecht, ſo fällt auf K ein grader Strahlenkegel, deſſen Axe CK iſt, und die Erleuchtung des Elements Kk iſt die im 50. §. n. 1. ſo genannte ſenkrechte Erleuchtung. Dieſemnach iſt die Erleuchtung des Elements Kk $=\pi\sin\alpha^2$, wenn der Glanz der leuchtenden Fläche = 1 und der ſcheinbare Halbmeſſer CKA = CKB

CKB $= \alpha$ geſetzt wird. Ferner ſey Mm ein anderes Element, das von K um den Abſtand KM $= b$ entfernt iſt, die Höhe KC ſey $= a$, ſo iſt der auf M fallende Strahlenkegel ſchief, und ſeine Axe CM iſt gegen die Grundfläche ADBE, mithin auch gegen die ihr parallele Ebene RS unter dem Winkel KMC geneigt, deſſen Tangente $= \frac{a}{b}$ iſt. Die Neigungs-Ebene CKM der Axe CM ſchneide die Ebene des leuchtenden Kreiſes in CA, durch M ſey MF mit KC parallel, und ſchneide CA in F, ſo iſt auch MF auf beyde Ebenen ſenkrecht, und CF $=$ KM $= b$, ferner nehme man in N ein Element der Kreisfläche an, deſſen Lage durch den Winkel ACN $= \zeta$, und den Abſtand CN $= x$, gegeben iſt, und ſetze FN $= z$, CFN $= \zeta$, ſo iſt $z = \surd\,(b^2 - 2bx\cos\zeta + x^2)$ und $\sin\zeta = \frac{x \sin\zeta}{z}$

$$= \frac{x \sin\zeta}{\surd\,(b^2 - 2bx\cos\zeta + x^2)},$$ da dann x nicht gröſſer als r ſeyn kann, wenn r den Halbmeſſer des Kreiſes bezeichnet. Eben die Stelle des Elements N könnte auch durch den Winkel CFN $= \zeta$ und den Abſtand CN $= x$ vom Mittelpunct gegeben ſeyn, da dann die Gleichung $x^2 = b^2 - 2bz \cos\zeta + z^2$ den Abſtand FN $= z$ beſtimmt. Dieſe giebt $z = b\cos\zeta \pm \surd\,(x^2 - b^2 \sin\zeta^2)$, und es muß $\sin\zeta$ nicht gröſſer, als $\frac{x}{b}$ ſeyn, dafern z möglich bleiben ſoll. Es kann aber x nie gröſſer

als r ſeyn, mithin ſinζ nie gröſſer als $\frac{r}{b}$. Die Ebene FMN ſchneide RS in MG, ſo iſt FNM der Ausflußwinkel, und GMN der Einfallswinkel für die Strahlen, welche das in N befindliche Element nach M ſchickt, und beyde Winkel ſind gleich groß. Wird nun FNM = GMN = φ geſetzt, ſo iſt tang$\varphi = \frac{a}{z}$, cot$\varphi = \frac{z}{a}$ ſin$\varphi =$ $\frac{a}{\surd(a^2+z^2)}$, und MN $= \surd(a^2+z^2) = z$ ſecφ $= a$ coſecφ. Der Flächen-Inhalt des Elements in N ſey $= \omega^2$, ſo iſt die Erleuchtung, welche dies Element nach Mm ſchickt $= \frac{\omega^2 \,.\, \text{ſin}\varphi^2}{\text{MN}^2} =$ $\frac{\omega^2 \,.\, \text{ſin}\varphi^2}{z^2 \text{ ſec}\varphi^2} = \frac{\omega^2 \text{ ſin}\varphi^2 \text{ coſ}\varphi^2}{z^2}$. Für alle Elemente von gleicher Gröſſe, die um einerley Abſtand z von F entfernt ſind, iſt dieſe Erleuchtung einerley: man beſchreibe alſo mit dem Halbmeſſer FN $= z$ einen Kreisbogen PNQ, und mit dem Halbmeſſer F$n = z + dz$, einen andern Bogen pnq, ſo iſt zwiſchen beyden ein Stück eines ringförmigen Elements PQqp enthalten, wovon alle Strahlen nach M unter einerley Winkel ausgehen, und einfallen, auch iſt MN für dies ganze Element PQqp einerley. Es wachſe ζ um das Element NF$\nu = d\zeta$, ſo iſt der unendlich kleine Bogen N$\nu = zd\zeta$, und N$n = dz$, alſo das Element N$nm\nu = zdzd\zeta = \omega^2$, und die Erleuchtung, welche

welche dies Element nach M*m* ſchickt = $\frac{dz \sin\varphi^2 \cos\varphi^2}{z} . d\zeta$. Dieſe Formul ſo integrirt, daß ζ allein als veränderlich angenommen wird, giebt die Erleuchtung, welche das Element HN*nh* nach M*m* ſchickt, = $\frac{\zeta dz \sin\varphi^2 \cos\varphi^2}{z}$, und wenn man ζ = CFP ſetzt, ſo hat man die dem Element H*hp*P zugehörige Erleuchtung, da dann diejenige, welche dem ganzen Element PQ*qp* zugehört, doppelt ſo groß iſt. Man ſetze alſo nun CFP = η, FCP = ϑ, CP = CA = r, ſo empfängt M*m* von dem Element PQ*qp* die Erleuchtung = $\frac{2\eta\, dz \sin\varphi^2 \cos\varphi^2}{z}$. Es iſt aber z = $a \cot\varphi$, alſo $dz = -\frac{a d\varphi}{\sin\varphi^2}$, $\frac{dz}{z} = -\frac{d\varphi}{\sin\varphi \cos\varphi}$; wird alſo die erwehnte Erleuchtung $= dI$ geſetzt, ſo erhält man $dI = -2\eta\, d\varphi \sin\varphi \cos\varphi$, oder $d.I = 2\eta \cos\varphi . d\cos\varphi$.

Wenn man dieſe Differential-Formul integrirt, ſo findet man das Integral $I = \eta . \cos\varphi^2 - \int d\eta \cos\varphi^2 + C$, und das wäre die Erleuchtung, welche das Stück APHQ des leuchtenden Kreiſes auf M*m* wirft: man muß aber noch das Integral $\int d\eta \cos\varphi^2$ ſuchen, und in ſolcher Abſicht muß man η durch φ oder z ausdrücken, da dann im letzten Fall auch φ durch z ausgedrückt werden kann. Hinzu dient die Gleichung $r^2 = b^2 - 2bz \cos\eta + z^2$, oder $2bz \cos\eta = b^2 - r^2 + z^2$. Man ſetze

Kürze halber $b^2 - r^2 = c^2$, ſo giebt die Differentiation $bdz\cos\eta - bzd\eta\sin\eta = zdz$, jene Gleichung ſelbſt aber giebt $\cos\eta = \frac{c^2 + z^2}{2bz}$ und $\sin\eta = \frac{\sqrt{(4b^2 z^2 - (c^2 + z^2)^2)}}{2bz}$; dieſe Werthe ſetze man in die Differentialgleichung, ſo findet man $\frac{(c^2 + z^2)}{2bz} dz - \frac{1}{2} d\eta \sqrt{(4b^2 z^2 - (c^2 + z^2)^2)} = zdz$, oder $(c^2 + z^2)\, dz - zd\eta \sqrt{(4b^2 z^2 - (c^2 + z^2)^2)} = 2z^2 dz$, und $zd\eta \sqrt{(4b^2 z^2 - (c^2 + z^2)^2)} = (c^2 - z^2)\, dz$, alſo $d\eta = \frac{(c^2 - z^2)\, dz}{z\sqrt{(4b^2 z^2 - (c^2 + z^2)^2)}}$. Weiter iſt $\cos\varphi^2 = \frac{z^2}{a^2 + z^2}$, folglich erhält man $d\eta \cos\varphi^2 = \frac{(c^2 - z^2)\, zdz}{(a^2 + z^2)\sqrt{(4b^2 z^2 - (c^2 + z^2)^2)}}$. Man nehme nunmehro $c^2 + z^2 = 2ay + 2bb$ an, ſo iſt $z^2 = 2ay + 2bb - c^2$, oder $z^2 = 2ay + b^2 + r^2$. Das giebt $zdz = ady$,

$$4b^2 z^2 = 8\, ab^2 y + 4b^4 + 4b^2 r^2$$

$$(c^2 + z^2)^2 = 4\, a^2 y^2 + 8\, ab^2 y + 4b^4,$$

mithin $4b^2 z^2 - (c^2 + z^2)^2 = 4\,(b^2 r^2 - a^2 y^2)$, ferner wird $c^2 - z^2 = b^2 - r^2 - z^2 = b^2 - r^2 - 2ay - b^2 - r^2$, oder $c^2 - z^2 = -2\,(r^2 + ay)$. Man ſetze dieſe Werthe in die letzte Differentialgleichung, ſo hat man $d\eta \cos\varphi^2 = - \frac{(r^2 + ay)\, ady}{(a^2 + b^2 + r^2 + 2ay)\sqrt{(b^2 r^2 - a^2 y^2)}} =$

2 $(r^2$

$$\frac{2(r^2+ay)}{a^2+c^2+2r^2+2ay} \times \frac{-\frac{1}{2}ady}{\surd(b^2r^2-a^2y^2)}.$$

Wenn man den Zähler des erſten Factors durch ſeinen Nenner dividirt, ſo wird derſelbe $= 1 - \frac{a^2+c^2}{a^2+b^2+r^2+2ay}$ gefunden, alſo

$$d\eta \operatorname{coſ}\varphi^2 = \frac{-\frac{1}{2}ady}{\surd(b^2r^2-a^2y^2)} + \frac{\frac{1}{2}(a^2+c^2)ady}{(a^2+b^2+r^2+2ay)\surd(b^2r^2-a^2y^2)}.$$

Man nehme ferner an

$$a^2+c^2 = 2mbr,\ \text{alſo}\ m = \frac{a^2+c^2}{2br},$$

$$a^2+b^2+r^2 = 2nbr,\ \text{alſo}\ n = \frac{a^2+b^2+r^2}{2br},$$

$$ay = br\,.\,s,\ \text{alſo}\ s = \frac{y}{br} = \frac{z^2-b^2-r^2}{2br},$$

und ſubſtituire dieſe Werthe, ſo findet man $d\eta$ $\operatorname{coſ}\varphi^2 = \frac{-\frac{1}{2}ds}{\surd(1-ss)} + \frac{\frac{1}{2}m\,ds}{(n+s)\surd(1-ss)}$.

Nimmt man nun den Winkel FCP $=$ FCQ $= \vartheta$ an, ſo hat man $z^2 = b^2 - 2br\operatorname{coſ}\vartheta + r^2$, alſo $\operatorname{coſ}\vartheta = \frac{b^2+r^2-z^2}{2br} = -s$, und $s = -\operatorname{coſ}\vartheta$ oder $s = \operatorname{coſ}(180^\circ - \vartheta)$. Es ſey demnach $\varepsilon = 180^\circ - \vartheta$, ſo iſt $s = \operatorname{coſ}\varepsilon$, und $\varepsilon = \text{A}\operatorname{coſ} s$. Weil ferner $\frac{-ds}{\surd(1-ss)} = d\,.\,\text{A}\operatorname{coſ} s = d\varepsilon$, ſo er-

 hält

hält man $d\eta \cos\varphi^2 = \frac{1}{2} d\varepsilon - \frac{\frac{1}{2} m d\varepsilon}{n + \cos\varepsilon}$, und dieſer Werth in der für I gefundenen Gleichung gebraucht giebt $I = \eta \cdot \cos\varphi^2 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2} m \int \frac{d\varepsilon}{n + \cos\varepsilon} + C.$

Um endlich noch das Integral $\int \frac{d\varepsilon}{n + \cos\varepsilon}$ zu finden, ſetze man $\tan \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{\sin\varepsilon}{1 + \cos\varepsilon}$ (459 §. Geom.) $= t$, ſo iſt $\sin\varepsilon = t + t\sqrt{(1 - \sin\varepsilon^2)}$, alſo $t^2 (1 - \sin\varepsilon^2) = (\sin\varepsilon - t)^2 = \sin\varepsilon^2 - 2t\sin\varepsilon + t^2$, und $2t \sin\varepsilon = \sin\varepsilon^2 (1 + t^2)$, oder $\sin\varepsilon = \frac{2t}{1 + t^2}$: mithin $\cos\varepsilon = \sqrt{\left(1 - \frac{4t^2}{(1 + t^2)^2}\right)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$. Weil nun $d \sin\varepsilon = d\varepsilon \cos\varepsilon$, ſo iſt $d\varepsilon = \frac{d \sin\varepsilon}{\cos\varepsilon}$, und man findet $d \sin\varepsilon = \frac{2(1 + t^2) dt - 4t^2 dt}{(1 + t^2)^2} = \frac{2(1 - t^2) dt}{(1 + t^2)^2}$, alſo $d\varepsilon = \frac{2dt}{1 + t^2}$. Dieſe Werthe geben $\frac{d\varepsilon}{n + \cos\varepsilon} = \frac{2dt}{1 + t^2} : \left(n + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)$, oder $\frac{d\varepsilon}{n + \cos\varepsilon} = \frac{2dt}{n + 1 + (n - 1)t^2} = \frac{2}{n + 1} \cdot \frac{dt}{1 + (n - 1)t^2 : (n + 1)}$, und wenn

man

man $\frac{t\sqrt{(n-1)}}{\sqrt{n+1}} = x$ ſetzt, ſo hat man $\frac{dt\sqrt{(n-1)}}{\sqrt{(n+1)}} = dx$, oder $dt = \frac{dx\sqrt{(n+1)}}{\sqrt{(n-1)}}$, mithin $\frac{d\varepsilon}{n+\cos\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{(n+1)}\sqrt{(n-1)}} \cdot \frac{dx}{1+xx}$, und man findet $\int \frac{d\varepsilon}{n+\cos\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{(n+1)}\sqrt{(n-1)}} \cdot$ A . tg. $\frac{t\sqrt{(n-1)}}{\sqrt{(n+1)}}$, mithin $I = \eta \cdot \cos\varphi^2 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{m}{\sqrt{(n^2-1)}}$ A . tg. $\frac{t\sqrt{(n-1)}}{\sqrt{(n+1)}} + C$.

Dies Integral muß verſchwinden, wenn $z = FA = b - r$ iſt, alsdenn iſt zugleich $\vartheta = 0$, $\varepsilon = 180^\circ = \pi$, $\eta = 0$, $\cos\varphi^2 = \frac{z^2}{\sqrt{(a^2+z^2)}} = \frac{(b-r)^2}{a^2+(b-r)^2}$, $t = \tang \frac{1}{2}\pi = \infty$, alſo A . tg. $\frac{t\sqrt{(n-1)}}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{2}\pi$, und man findet $C = \frac{1}{2}\pi \left(1 - \frac{m}{\sqrt{(n^2-1)}}\right)$. Um nun die Erleuchtung zu haben, welche M*m* von dem ganzen Kreiſe empfängt, muß $z = FB = b + r$ genommen werden, da dann zugleich $\eta = 0$, $\vartheta = 180^\circ = \pi$, alſo $\varepsilon = 0$, $t = \tang \frac{1}{2}\varepsilon = 0$ wird, und man findet für den ganzen Kreis $I = C$

 =

$= \frac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{m}{\sqrt{(n^2 - 1)}}\right)$. Es war aber $m = \frac{a^2 + c^2}{2br} = \frac{a^2 + b^2 - r^2}{2br}$, $n = \frac{a^2 + b^2 + r^2}{2br}$, alſo $\sqrt{(n^2 - 1)} = \frac{\sqrt{((a^2 + b^2 + r^2)^2 - 4b^2 r^2)}}{2br}$: weil ferner $(a^2 + b^2 + r^2)^2 - 4b^2 r^2 = (a^2 + b^2)^2 + 2a^2 r^2 - 2b^2 r^2 + r^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2(a^2 + b^2) r^2 + r^4 + 4a^2 r^2$, ſo iſt auch $\sqrt{(n^2 - 1)} = \frac{\sqrt{((a^2 + b^2 - r^2) + 4a^2 r^2)}}{2br}$, und man erhält

$$I = \frac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{a^2 + b^2 - r^2}{\sqrt{((a^2+b^2-r^2)^2 + 4a^2 r^2)}}\right).$$

76. §.

1) Wenn FE den leuchtenden Kreis in E berührt, und man den Halbmeſſer CE ziehet, ſo iſt CFE der gröſte Werth des Winkels η. Es ſey derſelbe $= \mu$ und FME $= \lambda$, ſo iſt $FE^2 = b^2 - r^2 = a^2 \text{ tg. } \lambda^2$ $ME^2 = a^2 + b^2 - r^2 = a^2 \sec\lambda^2$, $CE = r = a \text{ tang } \lambda \text{ tang } \mu$. Das giebt

$$\frac{(a^2 + b^2 - r^2)^2}{(a^2 + b^2 - r^2)^2 + 4a^2 r^2} = \frac{a^4 \sec\lambda^4}{a^4 \sec\lambda^4 + 4a^4 \text{ tg. } \lambda^2 \text{ tg. } \mu^2} = \frac{1}{1 + 4\sin\lambda^2 \cos\lambda^2 \text{ tg. } \mu^2} = \frac{1}{1 + \sin 2\lambda^2 \text{ tg. } \mu^2},$$

und

und es wird $I = \frac{1}{2}\pi \left(1 - \frac{1}{\surd(1 + \sin 2\lambda^2 \, tg. \mu^2)}\right)$. Man ziehe EL ſo, daß FLE = 2FME = 2λ wird, ſo iſt FE = EL . ſin 2λ. Weil ferner die Ebene FME auf der Kreisfläche ſenkrecht, und FE beyder Durchſchnittslinie iſt, ſo iſt CE auf der Ebene FME, (318. §. Geom.) mithin auf EL ſenkrecht, und man hat $EC = FE \, tg. \mu = EL . \sin 2\lambda . tg. \mu = EL . tg. ELC$, folglich $\sin 2\lambda \, tg. \mu = tg. ELC$, und $\surd(1 + \sin 2\lambda^2 . tg. \mu^2) = \sec . ELC$. Dieſemnach iſt auch $I = \frac{1}{2}\pi (1 - \cos ELC) = \frac{1}{2}\pi \, \sin v. \, ELC$, oder $I = \pi . \sin \frac{1}{2} ELC^2$. (434. §. Geom.)

2) Setzt man $b = 0$, ſo hat man $I = \frac{1}{2}\pi \left(1 - \frac{a^2 - r^2)}{\surd((a^2 - r^2)^2 + 4a^2 r^2)}\right) = \frac{1}{2}\pi \left(1 - \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2}\right)$, oder $I = \pi . \frac{r^2}{a^2 + r^2} = \pi \sin CKA^2$, und das iſt die ſenkrechte Erleuchtung, welche K*k* empfängt, wie ſchon im Anfang der Auflöſung des vor. §. bemerkt iſt.

3) Wenn eine veränderliche Gröſſe y um ihr Differential dy wächſt, ſo iſt $d . \surd y = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} dy = \frac{dy}{2\surd y}$, alſo $\surd(y + dy) = \surd y + \frac{dy}{2\surd y}$. Eben ſo iſt allemahl $\surd(h + e) = \surd h + \frac{e}{2\surd h}$, wenn e in Vergleichung mit h unend-

 lich

lich klein iſt. Nimmt man nun den Halbmeſſer r des leuchtenden Kreiſes unendlich klein an; ſo iſt $I = \frac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2 + 4a^2 r^2}}\right)$, und $\sqrt{((a^2 b^2)^2 + 4a^2 r^2)} = a^2 + b^2 + \frac{2a^2 r^2}{a^2 + b^2}$, mithin $I = \frac{\pi a^2 r^2}{(a^2 + b^2)^2}$. Es iſt aber um πr^2 der Inhalt der Kreisfläche, $\frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$ der Sinus ſowohl des Ausfluß= als auch des Einfallswinkels FCM = CMK, und $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ = CM, mithin $I = \frac{\pi r^2 . \sin FCM . \sin CMK}{CM^2}$, welches mit dem 36. und 38. §. übereinſtimmet.

4) Alle Elemente der Ebene RS, die von K um einerley Abſtand KM = b entfernt ſind, empfangen einerley Erleuchtung, weil a, b, r, mithin auch $I = \frac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{a^2 + b^2 - r^2}{\sqrt{((a^2 + b^2 - r^2)^2 + 4a^2 r^2)}}\right)$, für alle einerley iſt. Dies iſt auch für ſich ſchon daher klar, weil der auffallende Strahlenkegel MADBE für alle ſolche Elemente einerley Geſtalt und Gröſſe hat.

77. §.

17 F. Der leuchtende Kreis *ADBE* wirft ſein Licht auf einen andern Kreis *FGHI*, und beyde Kreiſe ſind nicht allein parallel, ſondern zugleich auf der graden Linie *CK* durch beyder Mittelpuncte ſenkrecht: man ſucht die

die Menge Lichts, welche der Kreis *FGHI* auffängt.

Aufl. Mit dem unbeſtimmten Halbmeſſer KM $= x$ ſey aus K der Ebene FGHI ein Kreis beſchrieben, und mit dem Halbmeſſer $Km = x + dx$ ein andrer concentriſcher Kreis; ſo empfängt das ringförmige Element zwiſchen beyden Kreiſen, deſſen Inhalt $= 2\pi x dx$, durchaus einerley Erleuchtung. (76 §. n. 4.) Um dieſe Erleuchtung zu finden, erwäge man, daß im 75 §. das b hieſſe, was hier x iſt. Mithin iſt die Erleuchtung des Ringes I $= \frac{1}{2}\pi \left(1 - \frac{a^2 - r^2 + x^2}{\sqrt{(4a^2 r^2 + (a^2 - r^2 + x^2)^2}}\right)$, wenn KC $= a$, und der Halbmeſſer des leuchtenden Kreiſes $= r$ geſetzt wird; und die auf den Ring fallende Strahlenmenge $dM = \pi^2 \left(xdx - \frac{(a^2 - r^2 + x^2)\, xdx}{\sqrt{(4a^2 r^2 + (a^2 - r^2 + x^2)^2}}\right)$. Man ſetze $4a^2 r^2 + (a^2 - r^2 + x^2)^2 = y$, ſo iſt $4(a^2 - r^2 + x^2)\, xdx = dy$, und $dM = \pi^2 (xdx - \frac{1}{4} y^{-\frac{1}{2}} dy)$; mithin giebt die Integration $M = \pi^2 (\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}} + C$, oder

$$M = \tfrac{1}{2}\pi^2 (x^2 - \sqrt{(4a^2 r^2 + (a^2 - r^2 + x^2)^2)} + E),$$

wo E ſtatt $\frac{1}{2}$ C geſchrieben iſt. Mit x muß M zugleich verſchwinden, alſo wird $E = \sqrt{(4a^2 r^2 + (a^2 - r^2)^2)} = a^2 + r^2$, und man findet

$$M = \tfrac{1}{2}\pi^2 (a^2 + r^2 + x^2 - \sqrt{(4a^2 r^2 + (a^2 + r^2 + x^2)^2)}).$$

Es iſt aber die Gröſſe unter dem Wurzelzeichen

$$= 4a^2 r^2 + a^4 - 2a^2 r^2 + r^4 + 2(a^2 - r^2) x^2 + x^4$$
$$= a^4 + 2a^2 r^2 + r^4 + 2(a^2 + r^2) x^2 + x^4 - 4r^2 x^2$$

=

$= (a^2 + r^2 + x^2)^2 - 4r^2 x^2$;
alſo auch $M = \frac{1}{2}\pi^2 (a^2 + r^2 + x^2 - \sqrt{((a^2 + r^2 + x^2)^2 - 4r^2 x^2)})$.

Die Formul giebt die Erleuchtung desjenigen Kreiſes, wozu der unbeſtimmte Halbmeſſer KM $= x$ gehört: wenn alſo der gegebene Kreis den Halbmeſſer KF $= \varrho$ hat, ſo ſetzt man nach der Integration $x = \varrho$. Es ſey FABH eine Ebene durch KC, ſo iſt AFB ein Schnitt durch die Axe CF eines derjenigen Strahlenkegel, die auf den äuſſern Umfang des erleuchteten Kreiſes fallen, und zugleich iſt dies die Neigungsebene der Axe CF gegen die leuchtende Kreisfläche ADBE. Ueberdem iſt $AF^2 = a^2 + (\varrho - r)^2$, $BF^2 = a^2 + (\varrho + r)^2$, alſo

$$AF^2 = a^2 + r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho,$$
$$BF^2 = a^2 + r^2 + \varrho^2 + 2r\varrho,$$
$$\frac{1}{2}(AF^2 + BF^2) = a^2 + r^2 + \varrho^2,$$
$$AF^2 . BF^2 = (a^2 + r^2 + \varrho^2)^2 - 4r^2 \varrho^2$$

Es iſt aber für den Kreis FGHI die Strahlenmenge

$$M = \frac{1}{2}\pi^2 (a^2 + r^2 + \varrho^2 - \sqrt{((a^2 + r^2 + \varrho^2)^2 - 4r^2 \varrho^2)}),$$

alſo auch $M = \pi^2 (\frac{1}{4}(AF^2 + BF^2) - \frac{1}{2} AF . BF)$ $= \frac{1}{4}\pi^2 (BF^2 - 2\, BF . AF + AF^2$, oder $M = \frac{1}{4}\pi^2 (BF - AF)^2$. Man nehme FL $=$ AF, ſo iſt BL $=$ BF $-$ AF, und $M = \frac{1}{4}\pi^2 . BL^2$: das heiſt, auf FGHI fällt eine eben ſo groſſe Strahlenmenge, als auf einen Kreis fiele, dem der Durchmeſſer BL gehörte, wenn ſeine Erleuchtung in allen Elementen der abſoluten Erleuchtung gleich wäre.

Nimmt man ϱ unendlich groß an, ſo iſt $a^2 + r^2 + \varrho^2 = \varrho^2$, weil a und r in Vergleichung mit ϱ verſchwinden, und man hat $M = \frac{1}{2}\pi^2 (\varrho^2 - \sqrt{(\varrho^4 - 4r^2 \varrho^2)}) = \frac{1}{2}\pi^2 (\varrho^2 - \varrho\sqrt{(\varrho^2 - 4r^2)})$.

Weil

Weil nun $4r^2$ in Vergleichung mit ϱ^2 unendlich klein iſt, ſo hat man $\sqrt{(\varrho^2 - 4r^2)} = \varrho - \frac{2r^2}{\varrho}$, mithin wird $M = \pi^2 . r^2$. Das will ſagen: die geſammte Strahlenmenge, welche der leuchtende Kreis nach allen Seiten verbreitet, iſt ſo groß, als die Lichtmenge auf einer dem leuchtenden Kreiſe gleichen Ebene ſeyn würde, wenn die Erleuchtung aller ihrer Elemente der abſoluten Erleuchtung gleich wäre. Was die Formul in dieſem Fall giebt, zeiget auch die Betrachtung der Figur. Wenn nemlich KF unendlich groß wird, ſo erhellet, daß BF — AF oder BL = AB = $2r$ werde, mithin $M = \frac{1}{4} \pi^2 . 4r^2 = \pi^2 r^2$, wie vorhin.

78. §.

1) Die Lichtmenge, welche der leuchtende Kreis ADBE auf FGHI wirft, iſt eben ſo groß, als diejenige, welche der Kreis FGHI, wenn er leuchtend wäre, auf ADBE werfen würde. (43. §.) Vermöge der gefundenen Regel würde FGHI auf ADBE die Strahlenmenge $\frac{1}{4} \pi^2$ (BF — BH) ^{2} werfen, und weil BH = AF, ſo iſt dieſe Strahlenmenge auch = $\frac{1}{4} \pi^2$ (BF — AF) ^{2} eben ſo groß als die vorige, welches mit dem 43 §. übereinſtimmet.

2) Weil AB und FH parallel ſind, ſo iſt ABH + BHF = 180°, mithin auch ABH + AFH = 180° = BAF + BHF. Folglich liegen die vier Puncte A, B, H, F, im Umfang eines Kreiſes. (124 §. Geom.) Ein ſolches Viereck im Kreiſe aber, wie ABHF, (18 Fig.) hat allemahl die Eigenſchaft, daß das Rechteck beyder Diagonallinien 18 F.

AH

AH . BF der Summe der Rechtecke jeder zwoer einander gegen über ſtehender Seitenlinien AF . BH + AB . FH gleich iſt. Man mache nemlich den Winkel FAO = BAH, ſo iſt auch AFO = AHB (123. §. Geom.) mithin das Dr. AFO $\backsim$ Dr. AHB, und man hat AF : FO = AH : BH, mithin AF . BH = FO . AH. Ferner iſt auch der Winkel BAO = FAH und ABO = AHF, ſolglich das Dr. AOB $\backsim$ AFH. Daraus folgt AB : BO = AH : FH, und AB . FH. = BO . AH. Dieſe Gleichung zu jener addirt giebt AF . BH + AB . FH
17 F. = (FO + BO) AH = BF . AH. In der 17 Fig. iſt nun AF = BH und BF = AH, alſo $AF^2 + AB . FH = BF^2$, alſo $BF^2 - AF^2 = AB . FH$, und $BF - AF = \frac{AB \;.\; FH}{BF + AF} = BL$. Dieſem-nach wird $M = \frac{1}{4}\pi^2 . \frac{AB^2 \;.\; FH^2}{(BF + AF)^2}$ (77. §.)
Halbirt man BL in N, ſo iſt $FN = \frac{1}{2}(BF + AF)$, alſo $(BF + AF)^2 = 4 . FN^2$, und $M = \frac{\pi^2 . \frac{1}{4} AB^2 . \frac{1}{4} FH^2}{FN^2}$ oder $M = \frac{\pi^2 \;.\; CA^2 \;.\; KF^2}{FN^2}$.

3) Die mittlere Klarheit des Kreiſes FGHI ſey Y, ſo findet man $Y = \frac{M}{\frac{1}{4}\pi . FH^2} = \frac{\pi . BL^2}{FH^2}$, alſo $Y : \pi = BL^2 : FH^2$, und dies iſt das Verhältniß der mittlern Erleuchtung des Kreiſes FGHI zur abſoluten Erleuchtung. Braucht man

man den Werth $M = \frac{\pi^2 . CA^2 . KF^2}{FN^2}$, (n. 2.) ſo iſt $Y = \frac{M}{\pi . KF^2} = \frac{\pi . CA^2}{FN^2}$, und $Y : \pi = CA^2 : FN^2$.

4) Mit dem Halbmeſſer FN ſey aus A ein Bogen beſchrieben, der die verlängerte Linie CK in O ſchneidet, ſo iſt AO = FN, mithin $Y = \frac{\pi . CA^2}{AO^2}$; aber $\frac{CA}{AO} = \sin . AOC$, alſo $Y = \pi . \sin AOC^2$. Eben ſo groß wäre die Klarheit einer unendlich kleinen in O befindlichen mit ADBE parallelen Ebene: dieſe würde daſelbſt ſenkrecht erleuchtet, und AOC wäre der ſcheinbare Halbmeſſer des leuchtenden Kreiſes aus O geſehen. (50. §.)

Der VII. Abſchnitt.

Allgemeine Geſetze der Zurückwerfung des Lichts, mit einer kurzen Anwendung auf ebene Spiegelflächen.

79. §.

Bey allen bisherigen Unterſuchungen über die Klarheit erleuchteter Flächen an einer gegebenen Stelle, auch über die geſammte Lichtmenge, welche

welche die erleuchtete Fläche auffängt, iſt die Beſchaffenheit der Maſſe derjenigen Körper, auf deren Oberfläche das Licht fällt, noch gar nicht in Betracktung gezogen worden. Man weis aber ſchon aus dem 3 §. der Optick, daß einige Maſſen in der Natur wenigſtens einem Theil des auffallenden Lichts den Durchgang verſtatten, ſo wie es gegentheils andre Arten körperlicher Maſſen giebt, durch welche das Licht nicht hindurch gehet. Jene heiſſen in ſo weit **durchſichtig**, in wie weit wenigſtens ein Theil des auffallenden Lichts hindurch gehet: dieſe heiſſen **undurchſichtig**. Es giebt vollkommen undurchſichtige Maſſen, die gar kein Licht durchlaſſen: man kennet aber gar keine **vollkommen durchſichtige** Körper in der Natur, durch welche alles auffallende Licht hindurch gienge. Alle bekannte Körper, wenn ſie nicht für ſich leuchtend ſind, werfen wenigſtens einen Theil des auffallenden Lichts zurück, und eben dies Licht, welches ſie nach allen Seiten verbreiten, macht es, daß wir ſie überall ſehen können. Dies wäre alſo ſchon ein Fall von der Art, wobey das Licht von ſeinem gradlinichten Wege (6 §. Opt.) abgelenkt wird, und wenn die Maſſe, welche das Licht auffängt, durchſichtig iſt, ſo ändert jeder durchgehende Strahl ebenfals ſeine vorige Richtung. Dies letztere erfolgt allemahl, wenn der Strahl aus einer durchſichtigen Materie in die andre hinüber geht, wie wenn das Licht aus der freyen Luft ins Waſſer fällt. Weil übrigens der Weg des Lichts in der neuen durchſichtigen Maſſe, ſo lange ſie einerley gleichförmige Dichtigkeit behält, wieder gradlinicht iſt; (6 §. Opt.) ſo erfolgt die Aende-

rung

rung der Richtung nur in der gemeinſchaftlichen Gränze beyder durchſichtigen Maſſen, in der Oberfläche des Waſſers, des Glaſes, und der durchgehende Strahl macht mit dem einfallenden einen gradlinichten Winkel, deſſen Spitzen in der gemeinſchaftlichen Gränze der beyden ungleich dichten durchſichtigen Maſſen liegt. Beyde, der einfallende und hindurchgehende Strahl machen zuſammen eine gebrochene Linie aus, und eben deswegen heiſt dieſer Erfolg die Brechung des Lichts. Weil der zurückgeworfene Strahl ſo lange wieder in grader Linie fortgehet, als er in einerley durchſichtigen Maſſe bleibt, ſo macht der zurückgeworfene Strahl ebenfals mit dem einfallenden einen gradlinichten Winkel, deſſen Spitze in der zurückwerfenden Fläche liegt.

80. §.

Es iſt eine bekannte Erfahrung, daß man in einem gemeinen Spiegel Sachen ſiehet, als wenn ſie hinter ihm ſtünden, die doch vor ihm, ja oft ſeitwärts, auch wohl hinter dem Zuſchauer ſtehen. Unſre gemeinen ebenen Spiegel ſind zwar aus Glaß gemacht, auch iſt die hintere Fläche der Glaßtafel mit der ſo genannten Folie belegt, wodurch ſie undurchſichtig wird: allein auch Metalle, harte Steine, hartes Holz, dienen als Spiegel, wenn aus ſolchen Materien Tafeln verfertiget werden, die ſorgfältig polirt und glatt gemacht ſind, daß man darauf keine merkliche Rauhigkeiten wahrnehmen kann. Reines und klares Glas, wenn es gleich durch Belegung der einen Seite mit Folie nicht undurchſichtig gemacht iſt, thut noch die

Wirkung eines Spiegels, obgleich die Bilder als-
denn nicht ſo lebhaft ſind: auch thut klares ſtillſte-
hendes Waſſer eben die Würkung, ob es gleich
durchſichtig iſt.

Aus dieſen Erfahrungen wird man ohne Beden-
ken folgende Schlüſſe ziehen. Es müſſen viele von
den Lichtſtrahlen, welche eine abgebildete Sache
auf den Spiegel wirft, ins Auge des Zuſchauers
kommen, und zwar in eben der Ordnung, wie ſie
von der Sache ſelbſt gekommen wären, um das
Auge in beyden Fällen auf einerley Art zu rühren,
weil es ſonſt nicht in beyden Fällen einerley Em-
pfindung hätte.

Uebrigens iſt es eben nicht nothwendig, daß die
Spiegelfläche eben ſey: auch krumme Flächen
thun die Würkung der Spiegel, wenn ſie glatt ge-
nug polirt ſind, nur ſind die Bilder alsdenn den
abgebildeten Sachen entweder nicht ſo vollkommen
ähnlich, oder ſind ihnen auch in Anſehung der
Gröſſe nicht gleich, wie die Bilder in ebenen
Spiegeln.

81. §.

Um dieſe und andre Erſcheinnngen bey Spie-
geln zu erklären, nimmt man folgenden Grund-
ſatz an:

Der zurückgeworfene Strahl liegt in der
Ebene desjenigen Winkels, unter wel-
chem der einfallende Strahl in der Stelle,
wo er auffält, gegen die Spiegelfläche ge-
neigt iſt; und beyde Strahlen, ſowohl
der einfallende, als auch der zurückge-
worfene ſind gegen die Spiegelfläche in

der

der Stelle wo der Strahl auffällt, unter einerley Winkel geneigt.

Allemahl kann man ſich durch den Punct, wo der Strahl auffällt, eine grade Linie auf der Spiegelfläche ſenkrecht vorſtellen, die hier das Einfalls-Loth (cathetus incidentiae) genannt wird; da dann in dem Fall, wenn die Spiegelfläche krumm iſt, dies Einfalls-Loth auf derjenigen Ebene ſenkrecht ſeyn muß, welche die Spiegelfläche in dem Punct, wo der Strahl auffält, berührt. Die Ebene durch das Einfallsloth und den einfallenden Strahl iſt die Neigungsebene des letztern, in derſelben liegt auch der zurückgeworfene Strahl, und ſie kann hier die Zurückwerfungs-Ebene heiſſen: die Winkel, welche beyde Strahlen, mit dem Einfallsloth machen, ergänzen die Neigungswinkel der Strahlen gegen die Spiegelfläche zu 90°, und ſind beyde gleich groß, weil vermöge des angenommenen Grundſatzes die Neigungswinkel ſelbſt gleich groß ſind.

Dieſer angenommene Grundſatz kann hier als eine Hypotheſe betrachtet werden, deren Wahrheit durch Uebereinſtimmung der daraus geſchloſſenen Folgen mit dem, was die Erfahrung lehrt, beſtättiget werden muß, ſonſt kann man ſich auch vorläufig durch einen ſehr leichten Verſuch davon überzeugen. In ein verfinſtertes Zimmer läßt man durch eine kleine Oefnung einen Sonnenſtrahl fallen, und fängt ihn mit einem wagrecht liegenden ebenen Spiegel auf. Erregt man alsdenn nur ein wenig Staub, den das einfallende und zurück geworfene Sonnenlicht erleuchtet, ſo ſtellen ſich die Wege der einfallenden und zurück geworfenen

Lichts den Augen ſichtbar dar, und man ſiehet leicht, wie man ſich nun durch mehr als ein Hülfsmittel davon verſichern könne, daß nicht allein beyde, der einfallende und zurückgeworfene Strahl in einerley Neigungs-Ebene liegen, ſondern auch beyde Neigungswinkel gleich groß ſind, welches man bey jeden Verſuch, und bey jedem Einfallswinkel ſo befinden wird.

82. §.

19 F. Wenn der ſtrahlende Punct *L* ſein Licht auf die ebene Spiegelfläche *XY* wirft, und *LR* auf *XY* ſenkrecht iſt, ſo haben alle zurück geworfene Strahlen *CD*, *EF*, eine ſolche Lage gegen einander, daß ſie rückwärts verlängert einander insgeſammt in einerley Punct *M* ſchneiden, der in dem Neigungsloth *LR* ſo weit hinter der Spiegelfläche, als *L* vor derſelben liegt.

Beweis. Es ſey LC ein einfallender Strahl, ſo iſt LCR die Neigungs-Ebene dieſes Strahls gegen die Spiegelfläche, und in derſelben Ebene liegt der zurück geworfene Strahl CD ſo, daß GCD = RCL iſt, (81 §.) mithin auch RCL = RCH, wenn man CD rückwärts nach H verlängert. Weil nun RCL = RCH ein ſpitzer Winkel iſt, ſo müſſen CH und LR einander ſchneiden. Der Durchſchnittspunct ſey M ſo ſind in den Dreyecken RCL und RCM die Winkel an der gemeinſchaftlichen Grundlinie CR gleich, mithin iſt RM = RL. Iſt ferner LE ein andrer einfallender Strahl, ſo iſt wiederum LER ſeine Neigungs-Ebene gegen die Spiegelfläche, und in derſelben Ebene liegt der

zurück-

zurückgeworfene Strahl EF, ſo daß REL = IEF = REK iſt: mithin muß auch EF rückwärts nach K verlängert das Einfalls-Loth LR in M ſchneiden.

Man ſieht wohl, daß es gleichviel ſey, ob beyde einfallende Strahlen LC, LE, in einerley Ebene mit LR liegen, oder nicht, LR iſt das Einfallsloth für alle Strahlen, die von L ausgehen, und die Spiegelfläche treffen können; und wenn gleich LA, LC, LE nicht in einerley Ebene liegen, ſo ſchneiden doch ihre Neigungsebenen einander in LR, und alle Strahlen, die von der Spiegelfläche zurück geworfen werden liegen ſo, als kämen ſie von dem Punct M her.

83. §.

Ein Auge, das in der Gegend D oder F den Spiegel betrachtet, fängt einen Theil der zurückgeworfenen Strahlen auf: und weil dieſe Strahlen in eben der Lage ins Auge kommen, wie geſchehen würde, wenn der ſtrahlende Punct L in M befindlich wäre; ſo hat das Auge eben die Empfindung die es hätte, wenn L würklich in M vorhanden wäre und von M aus die Lichtſtrahlen um ſich her verbreitete. Deswegen ſcheint L im M zu ſtehen, und M iſt das Bild von L.

Kann man vorausſetzen, daß alles auf den Spiegel fallende Licht zurück geworfen wird; ſo wird das Bild M jede Ebene, die das zurückgeworfene Licht auffängt, vollkommen eben ſo erleuchten, wie der Punct L ſelbſt dieſe Ebene bey einerley Lage wie vorhin gegen den Punct M, und in einerley Entfernung, erleuchten würde. Es ſey LACE eine auf den Spiegel fallende Strahlenpyrami-

ramide, und man ſtelle ſich vor, dieſe würde mit einer Ebene *bdf*, nachdem der Spiegel weggenommen worden aufgefangen. Hätte man ſtatt deſſen AB = A*b*, CD = C*d*, EF = E*f* genommen, und durch B, D, F eine Ebene gelegt, ſo finge dieſe von dem zurückgeworfenen Licht ſoviel auf, als in dem Raum der Pyramide MBDF enthalten iſt, und dieſe iſt der Pyramide L*bdf* gleich und ähnlich. Auf ähnlich liegende Elemente beyder Ebenen würde einerley Lichtmenge unter einerley Neigungswinkel fallen, alſo die Erleuchtung einerley ſeyn. Beſchriebe man um L und M ein paar Kugelflächen mit gleichen Halbmeſſern, ſo würde L die zu dieſem Mittelpunct gehörige Kugelfläche eben ſo erleuchten, als M die zu dieſem Mittelpunct gehörige erleuchten würde: auch wenn L ein Element einer Fläche wäre, wovon das Licht nach dem Geſetz des 34 §. ausgienge.

84. §.

Wenn OL ein ſichtbarer Gegenſtand iſt, von welcher Geſtalt und Gröſſe man will, ſo wirft jeder den Spiegel zugekehrte Punct O deſſelben einen Theil aller von ihm ausgehenden Strahlen auf die Spiegelfläche, und dieſe werden ſo zurückgeworfen als kämen ſie von einem Punct P hinter der Spiegelfläche, der in dem Neigungs-Loth OS, das dieſem Punct zugehört, ſo weit hinter der Spiegelfläche liegt, als O vor derſelben. Demnach hat jeder Punct des Gegenſtandes, der ſein Licht auf den Spiegel werfen kann, ſein Bild hinter der Spiegelfläche in der von ihm darauf ſenkrecht fallenden graden Linie, ſo daß Bild und abgebildeter

Punct gleich weit von der Spiegelfläche entfernt ſind. Die Bilder aller Puncte des Gegenſtandes liegen hinter der Spiegelfläche vollkommen in eben der Ordnung, wie die abgebildeten Puncte in dem Gegenſtande ſelbſt liegen: ſie machen alſo, zuſammen genommen ein Bild des ganzen Gegenſtandes aus, das demſelben gleich und ähnlich iſt.

In der Vorausſetzung, daß alles auf den Spiegel fallende Licht zurück geworfen werde: wird jede Fläche, welche das vom Spiegel zurück geworfene Licht auffängt völlig eben ſo erleuchtet, wie der abgebildete Gegenſtand ſelbſt dieſe Fläche bey einerley Lage, wie vorhin gegen das Bild im Spiegel, und in einerley Entfernung, erleuchten würde.

Demnach kann die Berechnung der Erleuchtung völlig nach den bisher vorgetragenen Regeln des III. IV. V. und VI. Abſchnitts angeſtellet werden, nicht anders, als wenn das Bild im Spiegel der leuchtende Gegenſtand ſelbſt wäre. Wofern nicht alles Licht zurückgeworfen wird, ſo kommt es noch darauf an: ob die zurück geworfene Lichtmenge bey jedem Einfallswinkel einerley Verhältniß gegen die einfallende Lichtmenge habe? kann dies vorausgeſetzt werden, ſo muß die Erleuchtung, welche man nach den eben angeführten Regeln findet, in eben dem Verhältniß vermindert werden, wäre dies Verhältniß nicht für jeden Einfallswinkel einerley, ſo lieſſe ſich zwar noch die Berechnung der Erleuchtung welche das zurückgeworfene Licht verurſacht auf die Gründe des III und der folgenden Abſchnitte zurück führen: vorher aber müſte das Geſetz bekannt ſeyn, nach welchem ſich das Verhältniß der zurückgeworfenen zur einfallenden Lichtmenge bey

Aenderung des Einfallswinkels ändert. Weitere Unterſuchungen hierüber werden unten vorkommen, indeſſen ſind unter den krummen Spiegeln die ſphäriſchen vornemlich merkwürdig, und einige angenehme photometriſche Unterſuchungen, darauf ich mich im folgenden noch werde einlaſſen müſſen, erfordern eine vorläufige Betrachtung darüber, nach welchen Geſetzen das Licht von ſphäriſchen Spiegeln zurückſtrahlet.

Dieſe kurze Betrachtung der Erſcheinung, welche ein ebener Spiegel dem Auge darſtellt, und der Erleuchtung, welche das zurück geworfene Licht verurſachet, mag zur Probe dienen, wie ſich aus dem angenommenen Grundſatz des 81 §. die Würkungen der Spiegelflächen erklären laſſen. Von andern merkwürdigen Eigenſchaften ebener Spiegel, wie auch von krummen Spiegelflächen wird zwar die Catoptrick Unterricht geben: iſt eine glatte Oberfläche nicht vollkommen undurchſichtig, wie z. E. die Fläche eines ſtillſtehenden Waſſers, einer Glaßtafel, die keinen undurchſichtigen Grund hat, ſo wird nicht alles Licht, ſondern nur ein Theil deſſelben zurück geworfen, ein Theil geht in die durchſichtige Maſſe hinein, nachdem vorher jeder eindringende Strahl in der Oberfläche der durchſichtigen Maſſe eine von der vorigen verſchiedene Richtung angenommen, oder daſelbſt eine Brechung gelitten hat.

Der

Der VIII. Abſchnitt.

Die Zurückwerfung des Lichts von ſphäriſchen Spiegeln.

85. §.

Es ſey AP ein Durchmeſſer der krummen Linie KMANL, der die ihm zugeordneten Sehnen MN, wie der Haupt-Durchmeſſer eines Kegelſchnitts, ſenkrecht halbirt: man ſtelle ſich vor die Ebene PAK werde um die Axe AP gedrehet; ſo beſchreibt der Bogen AK eine krumme Fläche, welche die Eigenſchaft hat, daß alle auf der Axe AP ſenkrechte Schnitte Kreiſe ſind, alle Schnitte aber mit Ebenen, welche durch die Axe AP gelegt werden, mit der Linie KMANL einerley Natur haben. Nun ſey entweder die innere hohle, oder auch die äuſſere erhabene Seite dieſer Fläche polirt, damit ſelbige das darauf fallende Licht nach dem Geſetz des 81 §. zurückwerfe, ſo bekömmt dieſe Spiegelfläche den Nahmen von derjenigen krummen Linie KMANL, welche jeder Schnitt der Spiegelfläche durch die Axe AP giebt. Dieſe Linie AP ſelbſt heiſt die Axe des Spiegels, und der Punct H ſein Scheitel. 20 F.

Iſt KMANL ein Kreisbogen, ſo entſteht durch die Umdrehung um die Axe AP ein Kugelabſchnitt, und der Spiegel heiſt ein ſphäriſcher Spiegel. Iſt eben die krumme Linie ſonſt ein Kegelſchnitt,

und AP ſeine Hauptaxe, ſo heiſt der Spiegel elliptiſch, paraboliſch, oder hyperboliſch, nachdem die erwehnte Linie eine Ellipſe, Parabel, oder Hyperbel iſt. Allgemeine Unterſuchungen darüber, nach welchen Geſetzen dergleichen Spiegel das Licht zurück werfen, gehören für die Catoptrick: hier aber müſſen vorläufig einige Eigenſchaften des ſphäriſchen Spiegels erklärt werden.

86. §.

Wenn aus einem Punct *P* der Axe *AP* des krummen Spiegels ein Lichtſtrahl *PM* auf den Punct *M* der Spiegelfläche fällt, ſo liegt der zurückgeworfene Strahl *Mp* in der Ebene *APM*, und er ſchneidet die Axe *AP* irgendwo in *p*.

Beweis. Die Ebene APM ſchneide den Spiegel in der krummen Linie KMANL, MT ſey eine Tangente derſelben und MC in eben dieſer Ebene auf der Tangente ſenkrecht. Noch ſtelle man ſich durch M eine grade Linie RS auf der Ebene APM ſenkrecht vor, ſo wird dieſe den Kreis, deſſen Durchmeſſer MN iſt berühren, ſo wie MT den Bogen AMK berührt, und die Ebene TMS iſt eine Berührungs-Ebene des Spiegels in dem Punct M. Denn durch Umdrehung um die Axe AP beſchreibt MT eine Kegelfläche, welche die Ebene TMS in der graden Linie MT berührt, die Spiegelfläche aber im Umfang des Kreiſes, wozu der Durchmeſſer MN gehört. Dieſer Kreis aber und die grade Linie MT haben nur den Punct M gemein: alſo berühet die Ebene TMS die Spiegelfläche in M, und MC iſt auf dieſer Berüh-

rungs-

rungsebene in M ſenkrecht. Demnach iſt APM die Ebene der Zurückſtrahlung, und der zurückgeworfene Strahl muß die Axe des Spiegels irgendwo in p ſchneiden.

87. §.

Die Figur ſtelle einen Schnitt durch die Axe eines Kugelſpiegels vor: man ſoll die Stelle p finden, worin der aus P einfallende Strahl PM nach ſeiner Zurückwerfung die Axe des Spiegels ſchneidet. 20 F.

Aufl. Dieſer Vorausſetzung gemäß iſt MAN ein Kreisbogen, und die Normallinie MC iſt ein dazu gehöriger Halbmeſſer, mithin zugleich ein Halbmeſſer der Kugel, und C ihr Mittelpunct. Nun ſey dieſer Halbmeſſer $AC = MC = r$, und der Winkel $ACM = \gamma$, der Abſtand $AP = \delta$, die geſuchte Linie $Ap = x$; ſo iſt $MQ = r \sin\gamma$, $CQ = r \cos\gamma$, und man hat $Cp = r - x$, $CP = \delta - r$. Ferner iſt im Dreyeck CpM des Winkels CMp Tangente $= \frac{Cp \,.\, \sin\gamma}{r - Cp \,.\, \cos\gamma}$, und im Dreyeck CPM iſt $\text{tg.}\, CMP = \frac{CP \sin\gamma}{r + CP \,.\, \cos\gamma}$. Nach dem Geſetz der Zurückſtrahlung aber müſſen beyde Winkel, alſo auch ihre Tangenten gleich groß ſeyn, und man erhält $\frac{Cp}{r - Cp \cos\gamma} = \frac{CP}{r + CP \cos\gamma}$. Aus dieſer Gleichung kann Cp gefunden werden, mithin auch $x = r - Cp$. Die Rechnung giebt $r \,.\, Cp + Cp \,.\, CP \,.\, \cos\gamma = r \,.\, CP - Cp \,.\, CP \,.\, \cos\gamma$,

alſo

alſo $Cp = \frac{CP \,.\, r}{r + 2CP \,.\, \operatorname{coſ}\gamma} = \frac{\delta - r}{\frac{1}{2}r + (\delta - r)\operatorname{coſ}\gamma}$ $.\, \frac{1}{2}r$, oder $Cp = \frac{\delta - r}{\delta - \frac{1}{2}r - (\delta - r)\operatorname{ſinv}\gamma} \,.\, \frac{1}{2}r$.

Man ſetze $\frac{\delta - r}{\delta - \frac{1}{2}r} = n$, ſo iſt $Cp =$ $\frac{n}{1 - n \operatorname{ſinv}\gamma} \,.\, \frac{1}{2}r$, und man findet $x =$ $\left(1 - \frac{\frac{1}{2}n}{1 - n \operatorname{ſinv}\gamma}\right) .\, r$. Weil ferner $\frac{1}{1 - n \operatorname{ſinv}\gamma} = 1 + \frac{n \operatorname{ſinv}\gamma}{1 - n \operatorname{ſinv}\gamma}$, ſo iſt auch $x = \left(1 - \frac{1}{2}n - \frac{\frac{1}{2}n^2 \operatorname{ſinv}\gamma}{1 - n \operatorname{ſinv}\gamma}\right) .\, r$, und wenn man $1 - n = \frac{\frac{1}{2}r}{\delta - \frac{1}{2}r} = m$ ſetzt, ſo hat man x $= \left(1 + m - \frac{n^2 \operatorname{ſinv}\gamma}{1 - n \operatorname{ſinv}\gamma}\right) .\, \frac{1}{2}r$.

88. §.

Weil ſinvγ mit dem Winkel γ zugleich verſchwindet, ſo hat man $x = \frac{1}{2}r\,(1 + m)$, wenn $\gamma = 0$ wird. Es iſt aber auch ſehr nahe $x = \frac{1}{2}r$ $(1 + m)$, ſo lange γ ein ſehr kleiner Winkel bleibt: demnach werden alle Strahlen, die wie Pm, Pμ, ſehr nahe bey der Axe einfallen, auch ſehr nahe in einerley Punct π der Axe nach der Zurückwerfung vereiniget, und machen daſelbſt ein Bild von P, deſſen Entfernung Aπ vom Scheitel A des Spie-

gels

gels $= \frac{1}{2}r(1+m) = \frac{1}{2}r\left(1 + \frac{\frac{1}{2}r}{\delta - \frac{1}{2}r}\right)$ iſt, oder $A\pi = \frac{\delta}{\delta - \frac{1}{2}r} \cdot \frac{1}{2}r$. Ein Auge in der Gegend O empfängt die zurückgeworfene Strahlen ſo, als kämen ſie von dem Punct π her, und wird davon eben ſo gerührt, als wenn der Punct P ſelbſt in π befindlich wäre.

Weil die Zahl $\frac{\sin v \cdot \gamma}{1 - n \sin v\gamma}$ mit γ wächſt, ſo werden nicht alle aus P auf den Spiegel fallende Strahlen in einerley Punct der Axe AP vereiniget. So lange $\delta > r$ iſt, ſo lange ſind m und n poſitive eigentliche Brüche, und weil $x = Ap = \frac{1}{2}r\left(1 + m - \frac{n^2 \sin v\gamma}{1 - n \sin v\gamma}\right)$ war, ſo iſt $Ap < A\pi$.

Wäre MAN ein Elliptiſcher Bogen, alſo auch der Spiegel ſelbſt ein Elliptiſcher und P ein Brennpunct der Ellipſe, ſo würde der Punct p der Axe, durch welchen der zurückgeworfene Strahl geht, der andre Brennpunct ſeyn, und dies bey jeder Gröſſe des Winkels APM. Dies folgt aus derjenigen Eigenſchaft der Ellipſe, welche im 302 §. der Perſpectiv ſowohl für die Ellipſe, als auch alle Kegelſchnitte überhaupt iſt bewieſen worden. Alle Strahlen, die aus P auffielen, würden alſo nach der Zurückwerfung durch p laufen, ſo wie umgekehrt, wenn p ein ſtrahlender Punct wäre, alle aus p auffallende Strahlen nach der Zurückwerfung durch P laufen würden. Jeder Brennpunct wäre alſo ein Bild eines ſtrahlenden Puncts, der

ſeine

ſeine Stelle im andern Brennpunct hätte, und dies Bild wäre vollkommener und deutlicher, als das Bild p des Puncts P beym Kugelſpiegel iſt. Weil übrigens doch die ſehr nahe bey der Axe auffallenden Strahlen ein ziemlich deutliches Bild in π machen, ſo betrachtet man π als das eigentliche Bild des Puncts P, und nennt πp die von der Kugelgeſtalt herrührende Abweichung des zurückgeworfenen Strahls Pp; mithin iſt dieſe Abweichung

$$\pi p = \frac{n^2 \operatorname{ſinv}.\gamma}{1 - n \operatorname{ſinv}.\gamma} . \tfrac{1}{2} r = \tfrac{1}{2} nr . (n \operatorname{ſinv}\gamma + n^2 \operatorname{ſinv}\gamma^2 + n^3 \operatorname{ſinv}\gamma^3 + \ldots).$$

89. §.

Der ganze Spiegel KMANL iſt allemahl ein Kugelabſchnitt, und man kann den Durchmeſſer KL ſeiner Grundfläche meſſen, der auch die Breite, oder der Durchmeſſer der Oefnung des Spiegels heiſt. Wenn überdem der Halbmeſſer derjenigen Kugel bekannt iſt, wovon der Spiegel ein Abſchnitt iſt; ſo hat man $\frac{\frac{1}{2}KL}{r}$ ſin ACK, und $\operatorname{coſ} ACK = \frac{\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} KL^2)}}{r}$. Wird demnach in der Gleichung $\pi p = \frac{n^2 \operatorname{ſinv}.\gamma}{1 - n \operatorname{ſinv}.\gamma} . \frac{1}{2} r$ der Winkel γ = ACK genommen, ſo läßt ſich die Abweichung der äuſſerſten auf den Spiegel fallenden Strahlen für eine gegebene Entfernung δ finden.

21 F. Es ſey alſo πp die Abweichung der äuſſerſten Strahlen, ſo erhellet, daß alle Strahlen, die von

von Puncten des Bogens AK zurückgeworfen werden, durch Puncte der Axe laufen, die zwiſchen π und p liegen. Durch π ſey πq auf der Axe ſenkrecht geſetzt, und dieſe ſenkrechte Linie ſchneide den äuſſerſten zurückgeworfenen Strahl Kp in q; ſo erhellet, daß alle aus Puncten des Bogens AK zurückgeworfene Strahlen durch Puncte der Linie πq laufen. Dieſe Linie πq heiſt die Seitenabweichung des Spiegels, ſo wie πp ſeine Längenabweichung. Alle von P auf den Spiegel fallende Strahlen gehen nach ihrer Zurückwerfung durch einen auf AP ſenkrechten Kreis, deſſen Mittelpunct π und Halbmeſſer πq iſt, und man findet $\pi q = \pi p \,.\, \text{tang}\,.\, Cpq$. Wenn nun durch γ der Winkel ACK verſtanden wird, ſo hat man im Dreyeck pCK für den Winkel CpK die Gleichung

$\text{tang}\, CpK = \dfrac{r \sin\gamma}{Cp - r\cos\gamma}$, alſo tg. $Cpq = \dfrac{r\sin\gamma}{r\cos\gamma - Cp}$. Es ſey ſinv . $\gamma = v$, ſo iſt $Cp = \dfrac{n}{1 - nv} \cdot \tfrac{1}{2}r$. (87 §.) Das giebt tg . $Cpq = \dfrac{(1 - nv)\sin\gamma}{(1 - nv)\cos\gamma - \tfrac{1}{2}n}$, und man hat $\pi p = \dfrac{n^2 v}{1 - nv} \cdot \tfrac{1}{2}r$, (88 §.) alſo auch $\pi q = \dfrac{n^2 v \sin\gamma}{(1 - nv)\cos\gamma - \tfrac{1}{2}n} \cdot \tfrac{1}{2}r$. Setzt man nun $\pi p = p$, $\pi q = q$, ſo iſt $\tfrac{1}{2}n^2 vr = (1 - nv)p$, und $q = \dfrac{(1 - nv)p\sin\gamma}{(1 - nv)\cos\gamma - \tfrac{1}{2}n}$.

Weil

Weil ſinv . γ, = v angenommen iſt, ſo verhält ſich anfangs $\frac{v}{1 - nv}$ beynahe wie ſinv . γ, ſo lange γ klein iſt, und weil ſin$\gamma = \sqrt{}(2 - \text{ſinv}\gamma)$ ſinv.γ, ſo verhält ſich bey eben der Vorausſetzung beynahe ſinγ wie $\sqrt{}$ ſinv . γ, alſo v = ſinv . γ wie ſinγ^2, und v ſinγ iſt die halbe Breite des Spiegels. Weil ſich nun die Längen-Abweichung anfangs wie v, d. i. wie ſinv . γ alſo wie ſinγ^2 verhält; ſo iſt ſie dem Quadrat der halben oder ganzen Breite des Spiegels proportional. Ferner verhält ſich die Seitenabweichung beynahe wie v ſinγ, alſo wie ſinγ^3 ſo lange γ klein iſt, mithin wie der Würfel der halben oder ganzen Breite des Spiegels.

90. §.

21 F. Es ſey qr der ganze Durchmeſſer des Seitenabweichungskreiſes, ſo erhellet, daß alle Strahlen, die auf dem Bogen AL fallen, nach ihrer Zurückwerfung durch πr gehen. Der äuſſerſte von den Strahlen, welche der Bogen AK zurück wirft, ſey Kq, der die Axe in p ſchneidet, ſo erhellet, daß alle Strahlen, welche der Bogen AL zurück wirft, durch pq gehen, und dieſe Linie irgendwo ſchneiden müſſen. Einer von den zunächſt bey A zurück geworfenen ſey $m\pi$, ſo ſchneidet er pq in einem Punct, der noch ſehr nahe bey p liegt. Ein weiter nach L hin von M zurückgeworfener Strahl ſey Mk, der die Axe in k, den Halbmeſſer des Seitenabweichungs-Kreiſes πr in ω., pq aber in s ſchneidet, ſo liegt s nicht mehr ſo nahe bey p, als der Durchſchnittspunct des Strahls $m\pi$ mit pq.

Je

Je weiter M nach L rückt, deſto weiter rückt anfangs *s* von *p* weg, aber nur bis auf eine gewiſſe Gränze. Wenn nemlich M dem Punct L näher rückt, ſo rückt zugleich *k* weiter gegen *p*, und ω gegen *r*, bis zuletzt *k* in *p* und ω in *r*, ſo wie M mit L zuſammen fällt; demnach muß zugleich *s* wieder in *p* fallen und *ps* verſchwinden.

Auf der Axe AP ſey *st* ſenkrecht, ſo iſt *st* der Halbmeſſer eines auf AP ſenkrechten Kreiſes, der durch Umdrehung der Figur um die Axe AP beſchrieben wird. Alle Strahlen, die der Bogen AM zurück wirft, gehen durch *ts*, und alle Strahlen, die der Theil des Spiegels zurück wirft, welchen AM durch Umdrehung um die Axe AP beſchreibt, gehen durch desjenigen Kreiſes Fläche, dem der Halbmeſſer *ts* zugehört. Man nehme an, daß AM derjenige Bogen ſey, dem der gröſte Werth von *ps* zugehört, auch ſey AN = AM, ſo wie AK = AL genommen iſt; ſo wird *ts* verlängert durch den Punct *u* gehen, worin L*r* und K*q* einander ſchneiden, weil die Dreyecke *kpu* und *kps*, ſo wie *ptu* und *pts* auf einander paſſen müſſen; ferner wird *tu* = *ts* und *us* der Durchmeſſer des Kreiſes, wozu der Halbmeſſer *ts* gehörte. Alle Strahlen, die ML zurück wirft, laufen durch Puncte der Axe, zwiſchen *k* und *p*, mithin auch durch *su*: durch eben dieſe Linie *su* laufen demnach alle Strahlen, die der Bogen AL zurück wirft. Wie nun eben das von allen Strahlen wahr iſt, die der Bogen AK zurück wirft; ſo erhellet, daß alle Strahlen, die der Spiegel zurück ſchickt, durch die Fläche des Kreiſes gehen, wozu der Durchmeſſer *su* gehört.

Alle auf der Axe AP ſenkrechte Schnitte desjenigen körperlichen Raums, worin das vom Spiegel zurück geworfene Licht ausgebreitet iſt, ſind Kreiſe und unter allen dieſen Kreiſen iſt derjenige, deſſen Durchmeſſer su vorſtellet, der kleinſte, deswegen kann derſelbe der kleinſte Sammlungskreis des Spiegels heiſſen.

91. §.

Den Durchmeſſer des kleinſten Sammlungskreiſes, für den ſphäriſchen Hohlſpiegel und ſeine Entfernung von der Mitte des Spiegels zu finden.

Aufl. Wenn durch γ in den allgemeinen Formuln des 89 §. der Winkel ACM = ACN verſtanden wird, ſo iſt πk die Längenabweichung, und $\pi\omega$ die Seitenabweichung für die Strahlen, welche der Spiegel aus M und N zurück wirft, und man hat $\frac{\pi\omega}{\pi k} = \frac{ts}{tk} = \frac{(1 - nv)\,\text{ſin}\gamma}{(1 - nv)\,\text{coſ}\gamma - \frac{1}{2}n}$, (89 §.) alſo $tk = \frac{(1 - nv)\,\text{coſ}\gamma - \frac{1}{2}n}{(1 - nv)\,\text{ſin}\gamma} \cdot ts$.

Für die äuſſerſten Strahlen, die auf den Spiegel fallen können, ſey der Winkel ACK = ACL = α, ſo hat man $\frac{\pi q}{\pi p} = \frac{ts}{tp} = \frac{(1 - n\,\text{ſin}v\alpha)\,\text{ſin}\alpha}{(1 - n\,\text{ſin}v\alpha)\,\text{coſ}\alpha - \frac{1}{2}n}$, alſo $tp = \frac{(1 - n\,\text{ſin}v\alpha)\,\text{coſ}\alpha - \frac{1}{2}n}{(1 - n\,\text{ſin}v\alpha)\,\text{ſin}\alpha} \cdot ts$, wofür ich kürzer $tp = \mu \cdot ts$ ſetzen will, ſo iſt $\mu =$

coſα

$\frac{\cos\alpha - \frac{1}{2}n : (1 - n \sin v\alpha)}{\sin\alpha}$. Ferner hat man $Ct = Cp - pt = Ck + tk$, und $Ck = \frac{n}{1 - nv} \cdot \frac{1}{2}r$, $Cp = \frac{n}{1 - n \sin v\alpha} \cdot \frac{1}{2}r = D$, alſo

$D - \mu \cdot ts = \frac{n}{1 - nv} \cdot \frac{1}{2}r + \frac{(1 - nv)\cos\gamma - \frac{1}{2}n}{(1 - nv)\sin\gamma} \cdot ts$. Aus dieſer Gleichung wird ts mittelſt folgender Rechnung gefunden. Man ſetze $ts = z$, ſo iſt auch $D - \mu \cdot z = \frac{n}{1 - nv} \cdot \frac{1}{2}r + z \cot\gamma - \frac{\frac{1}{2}n\, z}{(1 - nv)\sin\gamma}$, und wenn $\frac{\frac{1}{2}n}{1 - nv} = \lambda$ geſetzt wird, ſo erhält man $D - \mu \cdot z = \lambda \cdot r + z \cot\gamma - \lambda \cdot z \operatorname{cosec}\gamma$; das giebt $z = \frac{D - \lambda \cdot r}{\mu + \cot\gamma - \lambda \operatorname{cosec}\gamma}$, oder $z = \frac{(D - \lambda r)\sin\gamma}{\mu \sin\gamma + \cos\gamma - \lambda}$.

Dieſe Formul verſchwindet nicht allein wenn $\gamma = 0$, ſondern auch wenn $\gamma = \alpha$ iſt, wie erfordert wird, und die fernere Auflöſung der Aufgabe kommt darauf an, denjenigen Winkel γ zu finden, der z am gröſten giebt, da dann dieſer gröſte Werth von z der geſuchte iſt. Weil man aber vorausſehen kann, daß die fernere Rechnung etwas verwickelte Formuln giebt, und bey den gebräuchlichſten Hohlſpiegeln, der Bogen AK nur wenige

Grade beträgt; ſo dient folgende Verkürzung dazu, die geſuchte Auflöſung wenigſtens beynahe zu finden. Die höhern Potenzen von $\sin v\alpha$ und $\sin v\gamma$ laſſe man weg, ſo iſt $D = (n + n^2 \sin v\alpha) \cdot \frac{1}{2} r$, und $\lambda = \frac{1}{2}(n + n^2 \sin v\gamma)$, alſo $D - \lambda r = \frac{1}{2} n^2 (\sin v\alpha - \sin v\gamma)\, r$. Ferner iſt beynahe $\sin v\alpha = \frac{1}{2} \sin\alpha^2$, $\sin v \cdot \gamma = \frac{1}{2} \sin\gamma^2$, alſo auch $D - \lambda \cdot r = \frac{1}{4} n^2 (\sin\alpha^2 - \sin\gamma^2) \cdot r$. Eben ſo findet man

$$\mu = \frac{\cos\alpha - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}n^2 \sin v \cdot \alpha}{\sin\alpha} =$$

$$\frac{1 - \frac{1}{2}n - (1 + \frac{1}{2}n^2) \sin v \cdot \alpha}{\sin\alpha} =$$

$$\frac{1 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}n^2) \sin\alpha^2}{\sin\alpha},$$ und $\cos\gamma - \lambda =$ $1 - \sin v \cdot \gamma - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}n^2 \sin v \cdot \gamma = 1 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}n^2) \sin\gamma^2$, alſo $\mu \sin\gamma + \cos\gamma - \lambda =$

$$\frac{(1 - \frac{1}{2}n)(\sin\gamma + \sin\alpha) - \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}n^2) \sin\alpha \sin\gamma (\sin\gamma + \sin\alpha)}{\sin\alpha}.$$

Dieſe Werthe geben $z = \frac{(D - \lambda \cdot r) \sin\gamma}{\mu \sin\gamma + \cos\gamma - \gamma}$

beynahe $= \frac{\frac{1}{4} n^2 r (\sin\alpha - \sin\gamma) \sin\alpha \sin\gamma}{1 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}n^2) \sin\alpha \sin\gamma}$, und

der Factor $\frac{\frac{1}{4}n^2 \sin\alpha}{1 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}n^2) \sin\alpha \sin\gamma}$

bleibt ſehr nahe $= \frac{\frac{1}{4}n^2 \sin\alpha}{1 - \frac{1}{2}n}$, wenn gleich γ von 0 bis α wächſt; deswegen kann man ohne erheblichen Fehler annehmen, es werde z am gröſten, wenn $(\sin\alpha - \sin\gamma) \sin\gamma$ am gröſten wird.

Dies

Dies erfolgt in dem Fall $\sin\gamma = \frac{1}{2}\sin\alpha$, folglich iſt der geſuchte Werth $z = \frac{1}{16} \cdot$

$$\frac{n^2 r \sin\alpha^3}{1 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{2}n^2)\sin\alpha^2},$$ oder auch noch ſo nahe, als hier nöthig iſt, $z = \frac{1}{16} \cdot \frac{n^2 r}{1 - \frac{1}{2}n} \cdot$

$$\sin\alpha^3 = \frac{1}{8} \cdot \frac{n^2 r}{2 - n} \cdot \sin\alpha^3.$$

Wenn man im 89. §. den Winkel $\gamma = \alpha$ ſetzt, ſo hat man daſelbſt $\pi q = \frac{n^2 v \sin\alpha}{(1 - nv)\cos\alpha - \frac{1}{2}n}$ $. \frac{1}{2}r$, und $v = \sin v . \alpha$ beynahe $= \frac{1}{2}\sin\alpha^2$, alſo $(1 - nv)\cos\alpha = (1 - \frac{1}{2}n \sin\alpha^2)\ 1 - \frac{1}{2}\sin\alpha^2$ $= 1 - \frac{1}{2}(1 + n)\sin\alpha^2$; folglich $\pi q =$

$$\frac{\frac{1}{2}n^2 \sin\alpha^3}{1 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}(1 + n)\sin\alpha^2} \cdot \frac{1}{2}r,$$ oder auch noch nahe genug $\pi q = \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2 r}{2 - n} \cdot \sin\alpha^3$. Wenn demnach der Bogen AK, welcher die halbe Breite des Spiegels beſtimmt, wenige Grade faſſet, ſo iſt ziemlich nahe z oder $ts = \frac{1}{4}\pi q$; alſo iſt der kleinſte Sammlungskreis 16 mahl kleiner, als der Abweichungskreis der äuſſerſten Strahlen, welche zunächſt beym Rande vom Spiegel zurück geworfen werden.

Weil μ beynahe $= \frac{1 - \frac{1}{2}n}{\sin\alpha}$ war, ſo iſt $tp =$ $\mu . z = \frac{1}{16} . n^2 r \sin\alpha^2$, und weil hier $\gamma = \alpha$ geſetzt, die höhern Potenzen von $\sin v\alpha$ wegfallen, ſo iſt aus dem 88 §. $\pi p = \frac{1}{2}n^2 r \sin v\alpha =$

$\frac{1}{4} n^2 r \sin\alpha^2$, mithin $pt = \frac{1}{4} \pi p$, wie auch ſchon daraus folgt, weil $ts = \frac{1}{4}\pi q$ war. Dieſemnach iſt $\pi t = \frac{3}{4} \pi p$, und der kleinſte Sammlungskreis liegt dem Spiegel um $\frac{3}{4}$ der Abweichung näher, als das Bild, welches die zunächſt bey der Axe einfallenden Strahlen machen.

92. §.

Je weiter der ſtrahlende Punct P vom Spiegel wegrückt, je gröſſer alſo δ iſt, deſto mehr nähert ſich der Bruch $\frac{\delta - r}{\delta - \frac{1}{2}r} = n$ der Einheit, und in dem Fall, wenn δ in Vergleichung mit r unendlich groß wird, erhält man $n = 1$. In der allgemeinen Formul $x = \left(1 + m - \frac{n^2 \sin v . \gamma}{1 - n \sin v . \gamma}\right) . \frac{1}{2}r$ (87 §.) wird alſo $m = 1 - n = \frac{\frac{1}{2}r}{\delta - \frac{1}{2}r}$ kleiner, wenn δ wächſt, ſo wie zugleich $n = 1 - \frac{\frac{1}{2}r}{\delta - \frac{1}{2}r}$ gröſſer wird. Demnach wird x kleiner, und die Abweichung wächſt, ſo daß in dem Fall $\delta = \infty$, der Abſtand $x = \frac{1}{2}r \left(1 - \frac{\sin v . \gamma}{\cos\gamma}\right)$ gefunden wird. Dieſer Vorausſetzung gemäß ſind alle auf dem Spiegel fallende Strahlen mit der Axe des Spiegels parallel, und das Bild, welches die zunächſt bey der Axe auffallenden Strahlen, nach ihrer Zurückwerfung machen, iſt um den Abſtand $\frac{1}{2}r$ vom Spiegel entfernt, die Abwei-

weichung der übrigen aber $= \frac{\sin v . \gamma}{\cos \gamma} . \frac{1}{2} r$.
Wenn demnach γ für alle auffallende Strahlen nur ein kleiner Winkel bleibt, ſo iſt dieſe Abweichung für die mit der Axe parallel einfallenden Strahlen $= \frac{1}{2} r \sin v . \gamma = \frac{1}{2}$AD.

93. §.

Um die bisher betrachteten Linien deſto beſſer zu unterſcheiden, ſetze man AF $= \frac{1}{2}$ AC $= \frac{1}{2} r = f$, ſo iſt F das Bild, welches die zunächſt bey der Axe mit ihr parallel einfallenden Strahlen Qm machen, und dieſer Punct F heiſt des Spiegels Brennpunct. Iſt die Axe des Spiegels gegen die Sonne gerichtet, ſo fallen die Strahlen der Sonne, welche von dem Punct ihrer Oberfläche kommen, welchen die Axe trift, mit der Axe parallel ein, die nächſten bey der Axe vereinigen ſich nach der Zurückwerfung in F, und verurſachen daſelbſt eine Hitze, die brennbare Sachen entzünden kann: daher iſt der Nahme Brennpunct entſtanden. Ferner ſey ACK $= \alpha$, und F$f = \frac{\sin v . \alpha}{\cos \alpha}$. $\frac{1}{2} r = \frac{\sin v . \alpha}{\cos \alpha} . f = \varphi$, ſo iſt φ die Abweichung der äuſſerſten parallel-Strahlen, die auf den Spiegel fallen können, und A$f = f - \varphi$. 22 F.

Wenn dagegen aus dem Punct P auf eben den Spiegel Strahlen fallen, wovon die nächſten bey der Axe ihren Vereinigungspunct in π haben, die äuſſerſten aber nach der Zurückwerfung durch p laufen; ſo ſetze man A$\pi = g$, $\pi p = \psi$, ſo iſt

$g =$

$g = \frac{1}{2} r (1 + m) = \frac{\delta f}{\delta - f}$, $\psi = \frac{n^2 \text{ſinv} \alpha}{1 - n \text{ ſinv} . \gamma}$ $. f$, und $Ap = g - \psi$, da dann in den meiſten Fällen $\varphi = f . \text{ſinv} . \alpha$, und $\psi = n^2 . f . \text{ſinv} . \alpha$ $= \left(\frac{\delta - 2f}{\delta - f}\right)^2 . f . \text{ſinv} . \alpha$ angenommen werden kann.

Der Halbmeſſer des kleinſten Sammlungskreiſes für Strahlen, die mit der Axe parallel einfallen, iſt $= \frac{1}{4} f . \text{ſin}\alpha^3$, und ſein Abſtand von der Mitte des Spiegels $= f - \frac{3}{4} \varphi$. Ferner war $n = \frac{\delta - 2f}{\delta - f}$, alſo $2 - n = \frac{\delta}{\delta - f}$, und $\frac{n^2}{2 - n} = \frac{(\delta - 2f)^2}{\delta (\delta - f)}$; demnach iſt für Strahlen, die aus P auf den Spiegel fallen, der Halbmeſſer des kleinſten Sammlungskreiſes $= \frac{1}{4} . \frac{(\delta - 2f)^2}{\delta (\delta - f)}$ $. f . \text{ſin}\alpha^3$, und ſein Abſtand von der Mitte des Spiegels $= g - \frac{3}{4} \psi$.

94. §.

Bey allen dieſen Schlüſſen iſt vorausgeſetzt worden, daß $\delta > r$ ſey: nähert ſich nun P dem Spiegel ſo weit, daß $\delta = r$ wird, oder $\delta = 2f$, ſo wird auch $g = 2f = r$, und $\psi = 0$, auch verſchwindet der Halbmeſſer des kleinſten Sammlungskreiſes: das heiſt alle Strahlen, die aus dem Mittelpunct der Kugel auf ihre innere hohle Fläche fallen, laufen auch nach der Zurückwerfung insgeſamt durch den Mittelpunct. Es fallen nemlich

lich alle ſolche Strahlen ſenkrecht auf die Kugelfläche, und werden daher in ſich ſelbſt ſenkrecht zurück geworfen. Der Kugelſpiegel hat hierin die Natur eines elliptiſchen Spiegels, deſſen beyde Brennpuncte im Mittelpunct zuſammen fallen, ſo wie auch der Kreis eine Ellipſe iſt, wovon beyde Brenupuncte in einen, nemlich dem Mittelpunct, des Kreiſes, zuſammen fallen.

Wird $\delta < 2f$, oder $\delta < r$, ſo wächſt $A\pi = 23$ F. $g = \frac{\delta f}{\delta - f}$ ſehr ſchnell, und $\pi p = \psi = \left(\frac{\delta - 2f}{\delta - f}\right)^2 . f. \sin v\alpha$ wächſt ebenfals. Weil dieſer Ausdruck poſitiv bleibt, ſo iſt noch $Ap = g - \psi < A\pi$, und der Vereinigungspunct der äuſſerſten Strahlen liegt wiederum näher beym Spiegel, als der Vereinigungspunct derjenigen, die zunächſt bey der Axe einfallen. Uebrigens wächſt auch aufs neue der Halbmeſſer des kleinſten Sammlungskreiſes, wenn δ unter $2f$ abnimmt: in eben dieſem Fall müſſen die Formuln, welche im 91 §. mit Weglaſſung der höhern Potenzen von $\sin v\alpha$ und $\sin v\gamma$ gefunden ſind, mit Vorſicht gebraucht werden, weil $n = \frac{\delta - r}{\delta - \frac{1}{2}r} = \frac{\delta - 2f}{\delta - f}$ nun negativ iſt, und ſchnell wächſt, wenn δ unter $2f$ abnimmt. Im Nenner der für z gefundenen Formul wird der weggelaſſene Theil $\frac{1}{2}(1 + n \frac{1}{2} n^2) \sin\alpha \sin\gamma$ immer beträchtlicher in Vergleichung mit $1 - \frac{1}{2}n$, folglich die dortige Rechnung deſto fehlerhafter je mehr ſich δ der Linie $f = \frac{1}{2}r$ nähert.

95. §.

24 F. Wird $\delta = f = \frac{1}{2}r$, das heiſt, wenn der ſtrahlende Punct P im Brennpunct ſtehet, ſo wird g unendlich groß, ſo wie auch ψ. Dies iſt nemlich der Fall der parallel einfallenden Strahlen umgekehrt. Wie aber nicht alle parallel einfallende Strahlen in den Brennpunct zurückgeworfen werden, ſo wirft auch der Spiegel nicht alle aus dem Brennpunct auffallende Strahlen mit der Axe parallel zurück. Für den Winkel ACK $= \alpha$ iſt A$p =$

$$\left(2 - n - \frac{n^2\,\mathrm{ſinv}\alpha}{1 - n\,\mathrm{ſinv}\alpha}\right) . f \;(87\ \text{§.}) =$$

$$\frac{2 - n - 2n\,\mathrm{ſinv}\alpha}{1 - n\,\mathrm{ſinv}\alpha} . f,$$ und ſetzt man $n = \infty$, ſo wird dies A$p = \frac{1 + 2\,\mathrm{ſinv}\alpha}{\mathrm{ſinv}\alpha} . f = 2f +$

$$\frac{f}{\mathrm{ſinv}\alpha}.$$ Hieraus wird begreiflich, warum die Abweichung unendlich groß wird: wenn aber gleich die Formuln im 91 §. zugleich den Halbmeſſer des kleinſten Sammlungskreiſes, ſo wie ſeinen Abſtand vom Spiegel unendlich groß zu geben ſcheinen; ſo muß man doch vermöge der ſchon vorgetragenen, die im 91 §. vorgekommenen Formuln betreffenden, Erinnerungen erwegen, daß ſelbige nun völlig unbrauchbar werden. Dieſemnach muß die Auflöſung der Aufgabe des 91. §. für den Fall $\delta = f$ beſonders geſucht werden.

96. §.

Der ſtrahlende Punct befindet ſich im Brennpunct des ſphäriſchen Hohlſpiegels,

man

man ſucht den Halbmeſſer des kleinſten Abweichungskreiſes, und ſeinen Abſtand von der Mitte des Spiegels.

Aufl. In den allgemeinen Formuln des 91 §. ſetze man $n = \infty$, ſo erhält man $D = -\frac{f}{\text{ſin}v.\alpha}$, $\lambda r = -\frac{f}{\text{ſin}v.\gamma}$, alſo $D - \lambda r = \frac{f}{\text{ſin}v\gamma} - \frac{f}{\text{ſin}v\alpha} = \frac{1}{2}f.\left(\frac{1}{\text{ſin}\gamma^2} - \frac{1}{\text{ſin}\alpha^2}\right)$, weil die Vorausſetzung bleibt, daß der Winkel α nur klein ſey: alſo iſt auch $D - \lambda r = \frac{\text{ſin}\alpha^2 - \text{ſin}\gamma^2}{\text{ſin}\alpha^2\,\text{ſin}\gamma^2}.2f$, und $(D - \lambda r)\,\text{ſin}\gamma = \frac{\text{ſin}\alpha^2 - \text{ſin}\gamma^2}{\text{ſin}\alpha^2\,\text{ſin}\gamma}.2f$. Ferner iſt $\mu = \frac{\text{coſ}\alpha}{\text{ſin}\alpha} + \frac{1}{2\,\text{ſin}\alpha\,\text{ſin}v.\alpha} = \frac{\text{coſ}\alpha}{\text{ſin}\alpha} + \frac{1}{\text{ſin}\alpha^3} = \frac{1 + \text{coſ}\alpha\,\text{ſin}\alpha^2}{\text{ſin}\alpha^3}$, und $\text{coſ}\gamma - \lambda = \text{coſ}\gamma + \frac{1}{2\,\text{ſin}v\gamma} = \frac{1 + \text{coſ}\gamma.\text{ſin}\gamma^2}{\text{ſin}\gamma^2}$; alſo

$$\mu\,\text{ſin}\gamma + \text{coſ}\gamma - \lambda = \frac{\text{ſin}\gamma + \text{coſ}\alpha\,\text{ſin}\alpha^2\,\text{ſin}\gamma}{\text{ſin}\alpha^3} + \frac{1 + \text{coſ}\gamma\,\text{ſin}\gamma^2}{\text{ſin}\gamma^2} =$$

$$\frac{\text{ſin}\gamma^3 + \text{coſ}\alpha\,\text{ſin}\alpha^2\,\text{ſin}\gamma^3 + \text{ſin}\alpha^3 + \text{coſ}\gamma\,\text{ſin}\gamma^2\,\text{ſin}\alpha^3}{\text{ſin}\alpha^3\,\text{ſin}\gamma^2}.$$

Dieſe Werthe geben $z =$

$$\frac{2f(\text{ſin}\alpha^2 - \text{ſin}\gamma^2)\,\text{ſin}\alpha\,\text{ſin}\gamma}{\text{ſin}\alpha^3\,(1+\text{coſ}\gamma\,\text{ſin}\gamma^2)+\text{ſin}\gamma^3\,(1+\text{coſ}\alpha\,\text{ſin}\alpha^2)}.$$

Der Nenner iſt auch $= (1 + \text{coſ}\alpha\,\text{ſin}\alpha^2)$ $\left(\frac{1+\text{coſ}\gamma\,\text{ſin}\gamma^2}{1+\text{coſ}\alpha\,\text{ſin}\alpha^2}\,.\,\text{ſin}\alpha^3 + \text{ſin}\gamma^3\right)$, und der Bruch $\frac{1+\text{coſ}\gamma\,\text{ſin}\gamma^2}{1+\text{coſ}\alpha\,\text{ſin}\alpha^2}$ bleibt ſehr nahe $= 1$, wenn gleich γ, von 0 bis x wächſt, ferner iſt auch $\frac{\text{ſin}\alpha}{1+\text{coſ}\alpha\,\text{ſin}\alpha^2}$ ſehr nahe $= \text{ſin}\alpha$; deswegen kann $z = \frac{2f\,(\text{ſin}\alpha^2 - \text{ſin}\gamma^2)\,\text{ſin}\alpha\,\text{ſin}\gamma}{\text{ſin}\alpha^3 + \text{ſin}\gamma^3}$ angenommen werden, und man findet den Winkel γ welchem der gröſte Werth z zugehört, aus der Gleichung $\frac{dz}{d\gamma} = 0$. Die Differentialrechnung giebt $(\text{ſin}\alpha^3 + \text{ſin}\gamma^3)\,(\text{ſin}\alpha^2 - \text{ſin}\gamma^2)\,\text{coſ}\gamma - 2\,\text{ſin}\gamma^2\,\text{coſ}\gamma) - 3\,(\text{ſin}\alpha^2 - \text{ſin}\gamma^2)\,\text{ſin}\gamma^3\,\text{coſ}\gamma = 0$, oder $(\text{ſin}\alpha^3 + \text{ſin}\gamma^3)\,(\text{ſin}\alpha^2 - 3\,\text{ſin}\gamma^2) - 3\,(\text{ſin}\alpha^2 - \text{ſin}\gamma^2)\,\text{ſin}\gamma^3 = 0$, und nach gehöriger Multiplication $\text{ſin}\alpha^5 - 3\,\text{ſin}\alpha^3\,\text{ſin}\gamma^2 - 2\,\text{ſin}\alpha^2\,\text{ſin}\gamma^3 = 0$. Das giebt ferner $\frac{\text{ſin}\alpha^3}{\text{ſin}\gamma^3} - 3\,\frac{\text{ſin}\alpha}{\text{ſin}\gamma} - 2 = 0$, und man ſiehet leicht, daß dieſer Gleichung die Wurzel $\frac{\text{ſin}\alpha}{\text{ſin}\gamma} = 2$ ein Genüge leiſte. Setzt man nun $\frac{\text{ſin}\alpha}{\text{ſin}\gamma} = \mu$ und dividirt

vidirt die Gleichung $\mu^3 - 3\mu - 2 = 0$ durch $\mu - 2$, ſo findet man die reine quadratiſche Gleichung $\mu^2 + 2\mu + 1 = 0$, und die Wurzeln ſind beyde $= -1$. Beyde geben $z = 0$, alſo ein minimum, aber $\mu = \frac{\text{ſin}\alpha}{\text{ſin}\gamma} = 2$ das geſuchte maximum; alſo hat man wie im 91 §. für den gröſten Werth z ebenfals $\text{ſin}\gamma = \frac{1}{2}\,\text{ſin}\alpha$, es wird aber dieſer gröſte Werth $z = \frac{4}{3} f\,.\,\text{ſin}\alpha$, oder $z = \frac{2}{3} r\ \text{ſin}\alpha$: mithin beträgt des kleinſten Sammlungskreiſes Halbmeſſer $\frac{2}{3}$ von der halben Breite, und ſein Durchmeſſer $\frac{2}{3}$ der ganzen Breite des Spiegels.

Oben war $\mu = \frac{1 + \text{coſ}\alpha\ \text{ſin}\alpha^2}{\text{ſin}\alpha^3}$, und es iſt $tp = \mu\,.\,ts = \mu\,.\,z$, (91 §.) alſo in dem jetzigen beſondern Fall $tp = \frac{4}{3}\,.\,\frac{1 + \text{coſ}\alpha\ \text{ſin}\alpha^2}{\text{ſin}\alpha^2}\,.\,f = \frac{4}{3}\,(\text{coſ}\alpha + \text{coſec}\alpha^2)\,f$. Ferner iſt $Ap = 2f + \frac{f}{\text{ſinv}\alpha}$, alſo der Abſtand des kleinſten Sammlungskreiſes von der Mitte des Spiegels $At = Ap + pt = 2f\left(1 + \frac{1}{2\ \text{ſinv}\alpha} + \frac{2}{3}\,.\,\frac{1 + \text{coſ}\alpha\ \text{ſin}\alpha^2}{\text{ſin}\alpha^2}\right)$. Weil $\text{ſin}\alpha^2$ beynahe $= 2\text{ſinv}\alpha$, und $1 + \text{coſ}\alpha\ \text{ſin}\alpha^2$ beynahe $= 1$, ſo hat man auch ziemlich nahe $At = 2f(1 + \frac{5}{3}\,\text{coſec}\alpha^2.)$

Es ſey $\alpha = 5°$, ſo iſt $\text{coſec}\alpha = 11,4737$, $\text{coſec}\alpha^2 = 131,6458$, und $At = 220,41\,.\,2f = 440,82\,.\,f$; alſo iſt der gröſte Sammlungskreis

440$\frac{4}{5}$

$440\frac{4}{5}$ mahl weiter als der Brennpunct vom Spiegel entfernt, oder $220\frac{2}{5}$ mahl weiter als der Mittelpunct der Kugel, wovon der Spiegel ein Abſchnitt iſt.

97. §.

Wenn der ſtrahlende Punct P der Mitte des Spiegels noch näher liegt, als der Brennpunct, alſo $\delta < f$ iſt, ſo wird $g = \frac{\delta f}{\delta - f}$ negativ, das
25 F. heiſt: Strahlen, die aus P zunächſt bey der Axe auf den Spiegel fallen, haben nach der Zurückwerfung eine ſolche Lage, worin ſie die Axe des Spiegels nicht auf eben der Seite ſchneiden können, wo der Brennpunct liegt, aber rückwärts verlängert ſchneiden ſie die gleichfals verlängerte Axe des Spiegels in einem Punct π, der hinter dem Spiegel liegt, in der Entfernung $A\pi = \frac{\delta f}{f - \delta}$.

Ferner iſt die Zahl $n = \frac{\delta - r}{\delta - \frac{1}{2}r} = \frac{r - \delta}{\frac{1}{2}r - \delta}$ oder $n = \frac{2f - \delta}{f - \delta} = 2 + \frac{\delta}{f - \delta}$ nun gröſſer als 2, ſie nähert ſich der Zahl 2 wenn δ noch weiter abnimmt. Die Zahl $m = 1 - n = \frac{\frac{1}{2}r}{\delta - \frac{1}{2}r} = - \frac{\frac{1}{2}r}{\frac{1}{2}r - \delta} = \frac{-f}{f - \delta}$ iſt nun negativ und gröſſer als 1, alſo $1 + m = 2 - n = - \frac{\delta}{f - \delta}$ eine negative

gative Zahl, und $Ap = \left(1 + m - \frac{n^2 \sin v\alpha}{1 - n \sin v\alpha}\right) . f = - \left(\frac{\delta}{f - \delta} + \frac{n^2 \sin v\alpha}{1 - n \sin v\alpha}\right) . f$ negativ. Wie nun $A\pi = (1 + m) f$ auch negativ iſt, ſo liegen π und p beyde hinter dem Spiegel, und es iſt $Ap > A\pi$.

Hiemit hat es aber nur ſo lange ſeine Richtigkeit, als $\sin v . \alpha < \frac{1}{n}$ oder $\sin v . \alpha < \frac{\frac{1}{2}r - \delta}{r - \delta}$ bleibt. Die Abweichung $\pi p = \psi = \frac{n^2 \sin v\alpha}{1 - n \sin v\alpha}$ wächſt mit $\sin\alpha$, und wird unendlich groß in dem Fall $\sin v\alpha = \frac{1}{n}$. Wird $\sin v\alpha > \frac{1}{n}$, ſo verwandelt ſich die Lage der Linie $\pi p = \psi$ in die entgegen geſetzte, und man hat nun $Ap = - \frac{\delta f}{f - \delta} + \frac{n^2 \sin v\alpha}{n \sin v\alpha - 1} . f$. So lange alsdenn $\sin v\alpha$ die Zahl $\frac{1}{n}$ nur wenig übertrift, bleibt die Abweichung ſehr groß; und ſo lange alsdenn $\frac{n^2 \sin v\alpha}{n \sin v\alpha - 1} . f > \frac{\delta f}{f - \delta}$, oder $\pi p > A\pi$ iſt, ſo lange iſt Ap wieder poſitiv und die auffallenden Strahlen ſchneiden nach der Zurückwerfung die Axe in einem Punct, der vor dem Spiegel liegt.

Weil

Weil nun ſin$v\alpha$ nicht gröſſer als 2 werden kann, wenn auch α bis zu 180° wächſt, ſo kann

$$\frac{n^2 \sin v\alpha}{n \sin v\alpha - 1} = n + \frac{n}{n \sin v\alpha - 1}$$ nicht kleiner

als n alſo auch nicht kleiner als $\frac{\delta}{\delta - f}$ oder $n - 2$ werden. Demnach gilt das eben geſagte für alle Strahlen, die noch auf den Spiegel fallen können, wenn ſinα anfängt, die Zahl $\frac{1}{n}$ zu übertreffen.

98. §.

Was nun insbeſondre die zunächſt bey der Axe auffallenden Strahlen Am, An, betrift, ſo machen ſelbige zwar nach der Zurückwerfung kein phyſiſches Bild, wie in allen den Fällen, ſo lange $\delta > f$ bleibt; weil jedoch in dem Fall $\delta < f$ ein Auge in O von dem zurückgeworfenen Licht eben ſo gerührt wird, als käme es von π her; ſo wird ſelbiges eben die Empfindung haben, welche es hätte, wenn der Spiegel nicht da wäre, und P ſelbſt in π befindlich wäre. Deswegen iſt nun π ein geometriſches Bild von P, wie beym ebenen Spiegel 83 §; jedoch ſtellt der ebene Spiegel ein vollkomneres Bild dar, als der ſphäriſche, weil alle vom ebenen Spiegel zurückgeworfenen Strahlen ſo liegen, als kämen ſie vom Bilde hinter dem Spiegel her, welches beym ſphäriſchen Spiegel nur von denjenigen gilt, die von Stellen zunächſt bey der Axe zurück geworfen werden. So wie übrigens in dem bisher betrachteten

Fäl=

Fällen, ſo lange $\delta > f$ iſt, auch π ein Vereinigungspunct war, in welchem die Strahlen nach der Zurückwerfung würklich zuſammen laufen; ſo iſt hingegen in dem Fall $\delta < f$ der Punct π für die zurückgeworfenen Strahlen ein Zerſtreuungspunct, weil ſelbige nicht zuſammen laufen, ſondern auseinander fahren in eben der Lage, als wenn ſie einander in π geſchnitten hätten.

99. §.

Noch iſt der Fall merkwürdig, wenn mehrere Lichtſtrahlen VM, Wm, auf den ſphäriſchen Hohlſpiegel in einer ſolchen Lage fallen, daß ſelbige, wenn ſie der Spiegel nicht auffienge, die Axe desſelben in einerley Punct P hinter dem Spiegel ſchneiden würden. Nun liegt der Punct P nicht auf eben der Seite, wo des Kugelſpiegels Mittelpunct liegt, und die Linien $AP = \delta$, $AC = r$ haben eine entgegen geſetzte Lage, ſo daß man vor δ das entgegengeſetzte Zeichen ſetzen, oder δ in den Formuln als negativ betrachten muß. Das giebt 26 F.

$$n = \frac{\delta + r}{\delta + \frac{1}{2}r}, \text{ und } m = -\frac{\frac{1}{2}r}{\delta + \frac{1}{2}r}.$$

Demnach iſt $A\pi = g = (1 + m) f = \frac{\delta f}{\delta + f}$, und $Ap =$

$$x = \left(\frac{\delta}{\delta + f} - \frac{n^2 \sin v\gamma}{1 - n \sin v\gamma}\right) . f.$$

Das Bild π liegt nun näher beym Spiegel, als der Brennpunct, und rückt dem Spiegel deſto näher, je kleiner $AP = \delta$ wird, auch verſchwindet $A\pi$ nicht, bevor δ verſchwindet.

100. §.

In allen bisher betrachteten Fällen, wächſt die Abweichung $\pi p = \frac{n^2 \sin\gamma}{1 - n \sin\gamma} . f$, wenn γ wächſt. Wird dieſe Abweichung $= A\pi$, ſo verſchwindet Ap, oder p fällt in A, und dies erfolgt, wenn $1 + m$, oder $2 - n = \frac{n^2 \sin v . \gamma}{1 - n \sin v . \gamma}$ iſt. Dieſe Gleichung giebt $2 - n - 2n \sin v . \gamma = 0$, alſo $\sin v . \gamma \frac{2 - n}{2n}$; und weil $2 - n = \frac{\delta}{\delta - f}$, $n = \frac{\delta - 2f}{\delta - f}$ iſt, ſo geht der zurückgeworfene Strahl durch A in dem Fall $\sin v \gamma = \frac{\frac{1}{2}\delta}{\delta - 2f}$.

Fallen die Strahlen alſo mit der Axe parallel ein, ſo geht der zurückgeworfene Strahl durch A, wenn $\sin v . \gamma = \frac{1}{2}$, mithin $\gamma = 60°$ iſt. In dem Fall aber, wenn die Strahlen ſo einfallen, daß ſie gegen einen Punct der Axe hinter dem Spiegel zuſammen laufen, geht der zurückgeworfene Strahl durch A, wenn $\sin v . \gamma = \frac{\frac{1}{2}\delta}{\delta + 2f}$ iſt.

101. §.

27 F. Ein Strahl PM fällt auf den Spiegel in M, und es iſt $ACM = \alpha$ gegeben; ein andrer Strahl PN in derſelben Ebene APM fällt auf N ſehr nahe bey M, ſo daß der Bogen MN von ſeiner Sehne nicht merklich verſchieden iſt; man ſucht den Punct Q, worin der

der aus *N* zurückgeworfene Strahl *Nq* den aus *M* zurück geworfenen *Mp* ſchneidet.

Aufl. Die Lage des aus M zurück geworfenen Strahls iſt durch AP und den Winkel ACM $= \alpha$ gegeben: denn es iſt CMp = CMP, alſo ſin . CM$p = \frac{CP \sin\alpha}{PM}$, oder ſin CM$p$ =

$$\frac{CP \sin\alpha}{\sqrt{(r^2 + 2r\,CP\cos\alpha + CP^2)}}$$ und es iſt nur noch erforderlich, daß man MQ ſuche. Man ſetze CMp = CMP $= \beta$, CPM $= \pi$, ſo iſt $\alpha = \pi + \beta$, ApM $= \pi + 2\beta$, AqN $= \pi + 2\beta + d\pi + 2d\beta$, alſo MQN = pQq = AqN − ApM $= d\pi + 2d\beta$. Ferner ſey aus Q mit dem Halbmeſſer QN der Bogen NL, und aus P mit dem Halbmeſſer PN der Bogen NK beſchrieben; ſo ſind NLM und NKM als gradlinichte Dreyecke zu betrachten, die bey K und L einen rechten Winkel haben, mithin iſt NK = MN coſβ, = NL. Es iſt aber QN oder QM, (weil beyde nur um ein Differential verſchieden ſind,) $= \frac{NL}{MQN}$ und eben ſo PM =

$$\frac{NK}{MPN}, \text{ alſo } \frac{QM}{PM} = \frac{MPN}{MQN} = \frac{d\pi}{d\pi + 2d\beta},$$

oder $\frac{QM}{PM} = \frac{1}{1 + 2d\beta \,.\, d\pi}$. Im Dreyeck PCM aber iſt $\frac{\sin\pi}{r} = \frac{\sin\beta}{\delta - r}$, alſo $\frac{d\pi \cos\pi}{r}$

$$= \frac{d\beta \cos\beta}{d - r}, \text{ oder } \frac{d\beta}{d\pi} = \frac{(\delta - r)\cos\pi}{r\cos\beta},$$

 und

und $1 + \frac{2d\beta}{d\pi} = \frac{r \operatorname{coſ}\beta + 2(\delta - r)\operatorname{coſ}\pi}{r \operatorname{coſ}\beta}$;

mithin erhält man $QM = \frac{PM \cdot r \operatorname{coſ}\beta}{r \operatorname{coſ}\beta + 2(\delta - r)\operatorname{coſ}\pi}$.

Aus C laſſe man CD, CE, auf den einfallenden Strahl PM, und ſeinen zurück geworfenen Mp ſenkrecht fallen, ſo iſt $MD = ME = r \operatorname{coſ}\beta$, $PD = (\delta - r)\operatorname{coſ}\pi$, alſo $r \operatorname{coſ}\beta + (\delta - r)\operatorname{coſ}\pi = MD + DP = PM$, und $r \operatorname{coſ}\beta + 2(\delta - r)\operatorname{coſ}\pi = PM + PD = 2PM - MD$; das giebt $QM = \frac{PM \cdot MD}{2PM - MD}$. Wenn demnach $QM = 2\ PM = p$, $MD = ME = q$ geſetzt wird, ſo iſt $z = \frac{p \cdot q}{2p - q} = \frac{p}{p - \frac{1}{2}q} \cdot \frac{1}{2}q$, und dieſe Formul iſt der im 88 §. gefundenen $A\pi = \frac{\delta}{\delta - \frac{1}{2}r} \cdot \frac{1}{2}r$ ganz ähnlich; jene verwandelt ſich in dieſe, wenn $ACM = \alpha$ verſchwindet, weil alsdenn $p = PA = \delta$, und $q = CA = r$ wird.

Die Linien p und q ſind vermittelſt des Winkels $ACM = \alpha$ gegeben, wenn auch der Halbmeſſer $CM = CA = r$, und die Entfernung $PA = \delta$ gegeben ſind. Es iſt nemlich $p = \surd((\delta - r)^2 + 2(\delta - r) r \operatorname{coſ}\alpha + r^2)$; ferner iſt $q = r \cdot \operatorname{coſ} CMP$, alſo $q = \frac{r(r + (\delta - r)\operatorname{coſ}\alpha)}{\surd(r^2 + 2r(\delta - r)\operatorname{coſ}\alpha + (\delta - r)^2)}$, und man findet $p \cdot q = r(r + (\delta - r)\operatorname{coſ}\alpha)$, $2p - q = \frac{2(\delta - r)^2 + 3(\delta - r)\operatorname{coſ}\alpha + r^2}{\surd(r^2 + 2r(\delta - r)\operatorname{coſ}\alpha + \delta - r)^2)}$;

das

das giebt $z =$
$$\frac{r(r+(\delta-r)\cos\alpha)\sqrt{(r^2+2r(\delta-r)\cos\alpha+(\delta-r)^2)}}{2(\delta-r)^2+3r(\delta-r)\cos\alpha+r^2}.$$

Iſt P ſo weit entfernt, daß man δ in Vergleichung mit r unendlich groß annehmen kann, ſo iſt auch p unendlich groß, und man erhält $z = MQ = \frac{1}{2}q = \frac{1}{2}r\cos\alpha$.

Wenn der einfallende Strahl die Peripherie des Kreiſes, wozu der Bogen AM gehört, in F ſchneidet, und der zurückgeworfene Strahl MQ ſchneidet eben dieſe Peripherie in G, ſo iſt MF = MG = 2MD = 2ME = $2q$, alſo $q\ \frac{1}{4}$ MF, und $MQ = \frac{PM}{PM - \frac{1}{4}MF} \cdot \frac{1}{4}MF$ für Strahlen, die mit der Axe parallel einfallen, iſt $MQ = \frac{1}{4}MF = \frac{1}{4}MG$.

102. §.

Der zurückgeworfene Strahl MQ ſchneidet die Axe AP in p, und man findet $Mp = \sqrt{(Cp^2 - 2r \cdot Cp \cdot \cos\alpha + r^2)}$. Im 87 §. war $Cp = \frac{r(\delta-r)}{r+2(\delta-r)\cos\alpha}$, alſo iſt $r^2 - 2r \cdot Cp \cdot \cos\alpha$
$$= \frac{r^2(r+2(\delta-r)\cos\alpha) - 2r^2(\delta-r)\cos\alpha}{r+2(\delta-r)\cos\alpha}$$
$$= \frac{r^3}{r+2(\delta-r)\cos\alpha},$$ und $Cp^2 - 2r \cdot Cp \cdot \cos\alpha$
$$+ r^2 = \frac{r^2(\delta-r)^2 + r^3(r+2(\delta-r)\cos\alpha)}{(r+2(\delta-r)\cos\alpha)^2},$$

 mit-

$$\text{mithin } Mp = \frac{r\sqrt{(r^2 + 2r(\delta - r)\cos\alpha + (\delta - r)^2)}}{r + 2(\delta - r)\cos\alpha}.$$

In dem Fall, wenn δ in Vergleichung mit r unendlich groß iſt, hat man $Mp = \frac{\frac{1}{2}r}{\cos\alpha}$, folglich in eben dieſem Fall MQ . MP $= \frac{1}{4}r^2$, oder die Hälfte des Halbmeſſers iſt zwiſchen den beyden Linien MQ und MP die mittlere Proportionallinie.

Der Punct Q iſt ein Bild des Puncts P, welches die Strahlen machen, die der ſehr kleine Bogen MN zurück wirft. Wenn dagegen RMm einen zur Axe AC gehörigen Parallelkreis vorſtellet;
28 F. ſo wirft der Spiegel alle auf dieſen Parallelkreis fallenden Strahlen nach p zurück. Durch AC lege man noch eine Ebene CAm, welche die vorige CAM unter einem ſehr kleinen Winkel ſchneidet, auch ſey Nn ein kleiner Bogen eines Parallelkreiſes durch N, ſo erhellet, daß die Strahlen, welche das Element MmnN der Spiegelfläche zurück wirft, ein zwiefaches Bild machen, und zwar das eine in Q, weil ein Theil der auffallenden Strahlen wegen der Krümmung des Elements MmnN, in ſo weit ſie mit der Krümmung des Bogens MN übereinkommt, nach der Zurückwerfung ſich in Q vereiniget. Das andre Bild liegt in p, weil der übrige Theil der auffallenden Strahlen wegen der Krümmung des Elements MmnN, in ſo weit ſie mit der Krümmung des Bogens Mm übereinkommt, nach der Zurückwerfung ſeinen Vereinigungspunct in p hat.

103. §.

Die Geſetze zu finden, nach welchen ein erhabener Kugel-Spiegel das Licht zurück wirft.

Aufl. Die im 87. §. gefundenen Formuln ſind ganz allgemein, und werden leicht auf den erhabenen ſphäriſchen Spiegel KAL vermittelſt folgender Schlüſſe angewandt. 29 F. Man nehme an, der Halbmeſſer r wachſe ohne Aufhören, und werde zuletzt unendlich groß; ſo verwandelt ſich im 87 §. die Formul $Ap = \left(\frac{\delta}{\delta - \frac{1}{2}r} - \frac{n^2 \sin v\gamma}{1 - n \sin v\gamma}\right) . \frac{1}{2}r$ in folgende $Ap = -\delta$, weil nun beſtändig $r \sin v\gamma = 0$ bleibt. Das heiſt, alle auffallende Strahlen haben nach der Zurückwerfung eine ſolche Lage, als kämen ſie von einem Punct der Axe hinter dem Spiegel her, der davon eben ſoweit als P vor dem Spiegel entfernt iſt. Wie nun vermöge der Vorausſetzung $r = \infty$ der Spiegel ſich in einen ebenen Spiegel verwandelt, ſo geben die Formuln eben das, was im §. vom ebenen Spiegel ſchon bewieſen iſt. Nach dem Geſetz der Stetigkeit kann nun r negativ werden, daß heiſt, der Kugel Mittelpunct kann auf der andern Seite von A liegen, und ſo verwandelt ſich der Spiegel in einen erhabenen, der die erhabene Seite gegen P kehrt. Dieſe Vorausſetzung giebt $n = \frac{\delta + r}{\delta + \frac{1}{2}r}$, und $m = -\frac{\frac{1}{2}r}{\delta + \frac{1}{2}r}$, alſo $x = Ap = -\left(\frac{\delta}{\delta + \frac{1}{2}r} - \frac{n^2 \sin v\gamma}{1 - n \sin v\gamma}\right) . \frac{1}{2}r$. Wie nun dieſen Schlüſſen

gemäß in der Rechnung δ poſitiv bleibt, ſo giebt die Formul x negativ, ſo lange $\frac{\delta}{\delta + \frac{1}{2}r} >$ $\frac{n^2 \sin v\gamma}{1 - n \sin v\gamma}$ bleibt, das heiſt nun wiederum Ap und AP ſind einander entgegen geſetzt, p liegt hinter dem Spiegel, die Strahlen fahren nach der Zurückwerfung aus einander, als kämen ſie von p hinter dem Spiegel her.

104. §.

29 F. Iſt γ ſehr klein, ſo hat man für den erhabenen Spiegel $x = -\frac{\delta}{\delta + \frac{1}{2}r} \cdot \frac{1}{2}r$. Wird alſo $A\pi =$ $\frac{\frac{1}{2}\delta r}{\delta + \frac{1}{2}r}$ genommen, ſo liegen die Strahlen nach der Zurückwerfung ſo, als kämen ſie aus π her, und π iſt zwar ein Bild von P aber kein phyſiſches, ſondern ein geometriſches Bild. Indeſſen hätte doch ein Auge in O eben die Empfindung die es haben würde, wenn der Spiegel nicht da, und P in π befindlich wäre. Der Punct π iſt hier kein Sammlungs- ſondern ein Zerſtreuungspunct, wie beym ebenen Spiegel und beym ſphäriſchen Hohlſpiegel in dem Fall, welcher im 98 §. iſt betrachtet worden. Wenn nun $A\pi = g$ geſetzt wird, ſo hat man $g = -\frac{\frac{1}{2}\delta r}{\delta + \frac{1}{2}r}$, und in dem Fall $\delta = \infty$, wird dieſer Abſtand $= -\frac{1}{2}r$, wie beym Hohlſpiegel nur mit entgegen geſetzter Lage. Wird $AF = \frac{1}{2}AC$ genommen, ſo

liegen

liegen Strahlen, die mit der Axe parallel auf den Spiegel fallen, nach der Zurückwerfung ſo, als kämen ſie von F her. Der Punct F heiſt des erhabenen Spiegels geometriſcher Brennpunct, weil er kein Sammlungs- ſondern ein Zerſtreuungspunct iſt, alſo kann auch AF die Brennweite heiſſen, die in der Rechnung negativ wird.

Man ſetze nun wiederum $\frac{1}{2}r = f$, ſo iſt f die Brennweite, des Bildes π Abſtand $g = \frac{-\delta f}{\delta + f}$, und man verwandelt diejenigen Formuln für den hohlen Kugelſpiegel, welche ſtatt des Halbmeſſers r die Brennweite $f = \frac{1}{2}r$ enthalten, in Formuln für den erhabenen Kugelſpiegel, wenn man f negativ annimmt. Für jeden andern Winkel γ iſt $x = \mathrm{A}p = - \frac{\delta f}{\delta + f} + \frac{n^2 \sin v \gamma}{1 - n \sin v \gamma} \cdot f$, und $\frac{n^2 \sin \gamma}{1 - n \sin \gamma}$ iſt die Abweichung wegen der Kugelgeſtalt, die Zahl $n = \frac{\delta + r}{\delta + \frac{1}{2}r} = \frac{\delta + 2f}{\delta + f}$ angenommen. Beym hohlen Kugelſpiegel war $g = \frac{f}{\delta - f}$ gröſſer als f, hier iſt $g = - \frac{\delta f}{\delta + f}$ $< -f$, alſo liegt das Bild π dem Spiegel näher als der Brennpunct; vom hohlen Spiegel iſt es weiter als der Brennpunct entfernt. Uebrigens liegt auch hier p näher beym Spiegel als π, und p rückt dem Spiegel deſto näher, je gröſſer γ wird.

Wenn $\sin v \cdot \gamma = \frac{2 - n}{2n} = \frac{\frac{1}{2}\delta}{\delta + 2f}$ iſt,

(100 §.) ſo verſchwindet Ap, und die Abweichung wird dem Abſtand des Bildes gleich, dies erfolgt alſo für Strahlen, die mit der Axe parallel auffallen, wiederum alsdenn, wenn $\sin v\gamma = \frac{1}{2}$ und $\gamma = 60°$ iſt. Wird $\sin v\gamma$ noch gröſſer, ſo liegt p mit P auf einer Seite des Spiegels. Ob aber gleich Ap nun poſitiv wird, ſo kann doch p kein Sammlungspunct werden, ſondern bleibt ein Zerſtreuungspunct, weil die Strahlen noch immer nach der Zurückwerfung auseinander fahren, eben ſo, als kämen ſie von p her.

Wenn δ abnimmt, ſo nimmt auch $g = A\pi = -\frac{\delta f}{\delta + f}$ ab, und in dem Fall $\delta = f$ hat man $g = -\frac{1}{2}f$. Ein Punct alſo, der um die Brennweite vom Spiegel entfernt iſt, hat ſein Bild um die halbe Brennweite hinter dem erhabenen Spiegel. Uebrigens verſchwindet g mit δ zugleich.

105. §.

Fallen die Strahlen VM, Wm, ſo auf den erhabenen Spiegel, daß ſie, wenn der Spiegel nicht da wäre, hinter demſelben in einem Punct P zuſammen laufen würden; ſo muß man in den Formuln, ſo wie ſie nun ſchon für den erhabenen Spiegel geändert ſind, auch nach δ negativ ſetzen. Das giebt für die zunächſt bey der Axe auffallenden Strahlen $A\pi = g = \frac{\delta f}{f - \delta} = -\frac{\delta f}{\delta - f}$.

So lange $\delta < f$ iſt, ſo lange iſt dieſer Ausdruck
3o F. poſitiv, das Bild π liegt vor dem Spiegel und iſt ein würkliches phyſiſches Bild, ein Sammlungs-

punct

punct für die zunächſt bey der Axe auffallenden, und von daher zurück geworfenen Strahlen. Wie nun ferner $Ap = \frac{\delta f}{f-\delta} + \frac{n^2 \sin v \,.\, \gamma}{1 - n \sin v \,.\, \gamma} \,.\, f$, und $n = \frac{2f-\delta}{f-\delta} = 2 + \frac{\delta}{f-\delta}$ iſt, ſo iſt $Ap > A\pi$, alſo iſt p weiter vom Spiegel entfernt als das Bild π. Indeſſen beſtehet dieſe letzte Folge nur ſo lange, als $\sin v\gamma < \frac{1}{n}$ iſt. Mit γ wächſt nemlich die Abweichung πp bey einerley δ, und wenn δ von f nur wenig verſchieden, alſo n eine groſſe Zahl iſt, ſo wird γ noch nicht ſehr groß ſeyn, wenn ſchon $\sin v \,.\, \gamma = \frac{1}{n}$ wird. Alsdenn iſt die Abweichung unendlich groß, und der von M zurück geworfene Strahl mit der Axe parallel. Wird $\sin v \,.\, \gamma > \frac{1}{n}$, ſo wird die Abweichung πp negativ, und Anfangs ſehr groß, ſo daß p weit hinter dem Spiegel fällt, demſelben aber näher rückt, wenn γ noch weiter wächſt.

Mit δ wächſt $A\pi = \frac{\delta f}{f-\delta}$, und wenn $\delta = f$ wird, das heiſt, wenn die einfallenden Strahlen ſo liegen, daß ſelbige im Brennpunct des Spiegels zuſammen laufen würden; ſo iſt $A\pi$ unendlich groß, oder die zunächſt bey der Axe einfallenden Strahlen werden mit der Axe parallel zurück geworfen. Auch iſt n, mithin die Abweichung

$\frac{n^2 \sin\gamma}{1 - n \sin v\gamma}$ unendlich groß. Weil jedoch $Ap = - \left(2 - n - \frac{n^2 \sin v\alpha}{1 - n \sin v\alpha}\right) f$ iſt, oder $Ap = - \left(2f - \frac{nf}{1 - n \sin v\alpha}\right)$, ſo wird in dem zuletzt betrachteten Fall $\delta = f$, und $n = \infty$, dies $Ap = - \left(2f + \frac{f}{\sin v\alpha}\right)$.

106. §.

31 F. Wird $\delta > f$, ſo iſt $A\pi = - \frac{\delta f}{\delta - f}$ wieder negativ, und π iſt ein geometriſches Bild hinter dem Spiegel für die zunächſt bey der Axe auffallenden Strahlen. Auch iſt $Ap = - \frac{\delta f}{\delta - f} + \frac{n^2 \sin v\gamma}{1 - n \sin v\gamma}$. So lange übrigens $\delta < 2f$ iſt, ſo lange iſt $n = \frac{\delta - 2f}{\delta - f}$ negativ, und allemahl $Ap < A\pi$. In dem Fall $\delta = 2f$ iſt $n = 0$, und $Ap = A\pi = - 2f$. Die Strahlen fallen vermöge dieſer Vorausſetzung alle ſo auf, daß ſie gegen den Mittelpunct des Kugelſpiegels zulaufen: mithin fallen ſie alle ſenkrecht auf die Kugelfläche, und werden in ſich ſelbſt in grade entgegen geſetzter Richtung zurück geworfen.

Wird endlich $\delta > 2f$, ſo iſt $n = \frac{\delta - 2f}{\delta - f}$

= 1

$= 1 - \frac{f}{\delta - f}$ allemahl ein poſitiver eigentlicher Bruch, und $\frac{1}{n} > 1$. Weil nun der Bogen AM nie gröſſer als 90° werden kann, ſo bleibt $\sin v \gamma$ allemahl kleiner als 1 und mithin $\sin v . \gamma < \frac{1}{n}$. Demnach liegt die Abweichung πp allemahl von π gegen A zu, ſie wächſt mit γ, und wird $= A\pi$, wenn $\sin v \gamma = \frac{2 - n}{2n}$, = alſo hier $\sin v . \gamma = \frac{\frac{1}{2}\delta}{\delta - 2f}$ iſt. Wird γ noch gröſſer, ſo liegt p vor dem Spiegel auf der Seite, wo die Strahlen herkommen.

107. §.

Nunmehro ſey PM ein Strahl, der auf eine 32 F. Stelle M des Spiegels fällt, die durch den Winkel ACM = α gegeben iſt, und PN ein andrer Strahl in derſelben Ebene APM, der ſehr nahe bey M auf N fällt: wenn alsdenn die zurückgeworfenen Strahlen rückwärts verlängert einander in Q ſchneiden, ſo hat man MQ vermittelſt der im 101 §. ſchon gegebenen Auflöſung, wenn man r negativ annimmt. Verlängert man PM bis zum zweyten Durchſchnittspunct B mit dem Bogen AM, ſo hat MB eine Lage, die derjenigen entgegen geſetzt iſt, welche dieſe Sehne im 101 §. hatte, wie denn ſolches auch die Formul MB = $2r$ coſ PMC anzeigt, wenn r negativ iſt. Dieſemnach iſt MQ

= −

$= - \frac{PM}{PM + \frac{1}{4}MB} \cdot \frac{1}{4}MB$, und das Zeichen – zeigt an, daß hier der Punct Q hinter dem Spiegel liege, kein Sammlungspunct, ſondern ein Zerſtreuungspunct ſey. Will man PM und MB durch δ, r, und α ausdrücken, ſo hat man MQ = –

$$\frac{r((\delta+r)\cos\alpha - r)\surd(r^2 - 2r(\delta+r)\cos\alpha + (\delta+r)^2)}{2(\delta+r)^2 - 3r(\delta+r)\cos\alpha + r^2}.$$

Noch ſey durch die Axe AP eine andre Ebene PAm gelegt, welche die vorige unter einem ſehr kleinen Winkel ſchneidet, und Mm ein ſehr kleiner Bogen eines Parallelkreiſes durch m, ſo werden die von allen Puncten des Bogens Mm zurückgeworfenen Strahlen einander in dem Punct p der Axe ſchneiden, worin MQ verlängert dieſe Axe trift, demnach hat es mit dem Licht, welches das Element des Spiegels MmnN zurück wirft, eine ähnliche Bewandniß, wie mit demjenigen, was ein ſolches Element des Hohlſpiegels zurück ſchickt. (102 §.) zum Theil liegen die zurückgehenden Strahlen ſo, als kämen ſie aus dem Zerſtreuungspunct Q her, zum Theil aber ſo, als wenn ſie von dem Zerſtreuungspunct p ausgiengen, und es iſt

$$Mp = - \frac{r\surd(r^2 - 2r(\delta+r)\cos\alpha + (\delta+r)^2)}{2(\delta+r)\cos\alpha - r}.$$

(102. §.)

108. §.

33 F. Es ſey wiederum AC die Axe eines ſphäriſchen Hohlſpiegels BAD, und der Bogen AB = AD welcher

cher die halbe Breite des Spiegels beſtimmt, in Vergleichung mit ſeinem Halbmeſſer ſo klein, daß ACB nur wenige Grade beträgt. Der Punct P in der Axe ſey wenigſtens weiter als um den Halbmeſſer des Kugelſpiegels vom Scheitel A entfernt, damit das Bild π dieſes Puncts P vor dem Spiegel befindlich ſey, ſo iſt $A\pi = \frac{\delta f}{\delta - f}$, $AP = \delta$ geſetzt. Mit dem Halbmeſſer AP ſey der Kreisbogen PQ beſchrieben; ſo fällt von jedem Punct Q dieſes Bogens ein Strahlenkegel auf den Spiegel, und einer von den auffallenden Strahlen QE geht durch des Spiegels Mittelpunct C. Demnach hat jeder Punct Q ſein Bild in k und es iſt auch $Ek = \frac{\delta f}{\delta - f} = A\pi$, alſo $Ck = C\pi$. So liegt zwiſchen π und k eine Reihe von Bildern der Puncte zwiſchen P und Q, dieſe Bilder liegen ebenfals in einem Kreisbogen, wozu der Halbmeſſer $C\pi = Ck$ gehört, und der Bogen πk iſt das Bild des Bogens PQ.

Wenn der Winkel PCQ nur klein iſt, ſo iſt der Bogen PQ von ſeiner Tangente durch P nicht ſehr verſchieden, und er kann als eine grade auf AP ſenkrechte Linie angeſehen werden, wovon alsdenn πk das Bild und ebenfals eine durch π auf AP ſenkrechte grade Linie iſt. Dies Bild hat in Anſehung der Axe AP eine Lage, die der Lage der abgebildeten Linie entgegen geſetzt iſt.

Wenn überhaupt PQ ein Gegenſtand iſt, deſſen Abmeſſungen in Vergleichung mit der Entfernung CP nur klein ſind; ſo ſind auch alle von C nach den

den Puncten Q dieſes Gegenſtandes gezogene grade Linien beynahe gleich groß, und das von jedem der Puncte Q auf den Spiegel fallende Licht vereiniget ſich nach der Zurückwerfung in einem Bilde k des Puncts Q, das in der verlängerten QC liegt, beynahe eben ſo weit von C entfernt, als π davon entfernt iſt, und man hat $C\pi = Ck = r - g = r - \frac{\delta f}{\delta - f}$ (93. §.) $= 2f - \frac{\delta f}{\delta - f} = \frac{(\delta - 2f)f}{\delta - f}$. Alle dieſe Bilder zuſammen machen alsdenn ein Bild des Gegenſtandes, oder vielmehr ein Bild der dem Spiegel zugekehrten Fläche deſſelben aus. Die Puncte r, π, k liegen in einer zum Halbmeſſer $C\pi$ gehörigen Kugelfläche, wenn R, P, Q in einer Kugelfläche liegen, die zum Halbmeſſer CP gehört, und dieſe Kugelflächen kommen den ebenen Flächen ſehr nahe, welche ſie in P und π berühren, wenn $PCQ = \pi Ck$ ein kleiner Winkel iſt, ſo wie die Bogen PQ, πk, alsdenn ihren Tangenten ſehr nahe kommen.

Iſt die Axe AP des Spiegels gegen die Mitte P (oder ſonſt einen merkwürdigen Punct) des Gegenſtandes gerichtet, ſo ſind PQ, PR, Halbmeſſer des Objects, wenn daſſelbe kreisförmig iſt, und πk, πr, damit zuſammen gehörige Halbmeſſer des Bildes, welches alsdenn ebenfals kreisförmig, ſo wie überhaupt allemahl dem Gegenſtande ähnlich iſt. Wenn nemlich das Object nicht kreisförmig iſt, ſo ſind die Halbmeſſer PQ veränderlich, und ändern ſich mit der Lage der Ebene CPQ, wenn man ſich vorſtellet, daß ſelbige um die Axe

AP

AP gedrehet wird. Bey jeder Lage dieſer Ebene aber iſt allemahl PQ : πk = CP : Cπ in einerley Verhältniß.

109. §.

Der Winkel PCQ = πCk iſt ſowohl des Gegenſtandes, als auch des Bildes ſcheinbarer Halbmeſſer in der Ebene APQ genommen, wenn das Auge in C ſeine Stelle hat. Setzt man dieſen ſcheinbaren Halbmeſſer PCQ = ϱ, ſo iſt πk = Cπ . tgϱ, ſo wie PQ = CP . tgϱ, alſo auch $\pi k = \frac{C\pi}{CP}$. PQ, und CP = $\delta - 2f$, mithin $\pi k = \frac{f}{\delta - f}$. PQ. Wenn aber, wie im 93. §. Aπ = g geſetzt wird, ſo iſt $g = \frac{\delta f}{\delta - f}$, alſo $\frac{f}{\delta - f} = \frac{g}{\delta}$, und man erhält $\pi k = \frac{g}{\delta}$. PQ, alſo AP : Aπ = PQ : πk. Aus eben dem Grunde iſt AP : Aπ = PR : πr, alſo auch PQ + PR : $\pi k + \pi r$ = AP : Aπ. Das heiſt: jeder Halbmeſſer oder Durchmeſſer des Objects verhält ſich zu dem damit zuſammen gehörigen Halbmeſſer oder Durchmeſſer des Bildes, wie die Entfernung des Objects zur Entfernung des Bildes von der Mitte des Spiegels.

Zwiſchen den Gränzen des pyramiden- oder kegelförmigen Raums QCR ſey mit dem Halbmeſſer = 1 eine Kugelfläche beſchrieben, ſo iſt das Kugelſtück das Maaß der ganzen ſcheinbaren Ausdehnung, ſowohl des Objects PR, als auch des dazu

gehörigen Bildes πk, und wenn man den durch P auf der Axe CP ſenkrechten Schnitt des Objects $= E^2$, die Fläche des Bildes $= \varepsilon^2$ ſetzt, ſo iſt das erwehnte Maaß $= \frac{E^2}{CP^2} = \frac{E^2}{C\pi^2}$, alſo die Fläche des Bildes $\varepsilon^2 = \frac{C\pi^2}{CP^2} \cdot E^2 = \frac{f^2}{(\delta - f)^2} \cdot E^2$; alſo auch $\varepsilon^2 = \frac{g^2}{\delta^2} \cdot E^2$.

110. §.

Iſt RPQ das Geſicht eines Menſchen, der gegen den Spiegel ſiehet, in P ſein Auge; ſo kömmt von jedem Punct r, π, k des Bildes ein Strahlenkegel in ſein Auge, und daſſelbe wird davon eben ſo gerührt, wie geſchehen würde, wenn die abgebildeten Puncte in den Stellen ihrer Bilder ſelbſt befindlich wären. Der Menſch ſiehet alſo das Bild ſeines Geſichts vor dem Spiegel aber verkehrt. So lange AP in Vergleichung mit der Brennweite etwas groß iſt, ſo lange iſt das Bild kleiner als das Geſicht der betrachtenden Perſon, weil jeder Halbmeſſer deſſelben, wie πk in dem Verhältniß $CP : C\pi = \delta - f : f = \delta : g$ kleiner als der damit zuſammen gehörige Halbmeſſer PQ iſt. Wenn aber Gegenſtand und Spiegel einander näher gebracht werden, ſo wird das Bild gröſſer, weil $\pi k = \frac{f}{\delta - f} \cdot PQ$ gröſſer wird. Weil nun zugleich $C\pi = \frac{(\delta - 2f)f}{\delta - f} = f - \frac{f_2}{\delta - f}$

abnimmt,

abnimmt, und $A\pi = \frac{\delta f}{\delta - f} = f + \frac{f^2}{\delta - f}$ zunimmt, ſo rücken Bild und Gegenſtand einander entgegen. Wird $\delta = 2f$, ſo fallen Bild und Sache bey C zuſammen, alſo kann die betrachtende Perſon ihr Bild nicht mehr ſehen. So lange ferner δ zwiſchen den Gränzen $2f$ und f bleibt, ſieht man ſich nicht weder vor noch hinter dem Spiegel, weil das Bild weiter vom Spiegel als der Gegenſtand ſelbſt entfernt ſeyn würde, wenn letzterer die Strahlen nicht auffienge, und bis an die Stelle zu kommen hinderte, wo ſie zuſammen ſtoſſen müſten. Aber wenn auch dies nicht wäre, ſo hätte doch der Beobachter ſeinem Bilde den Rücken zugekehrt, und könnte es um deswillen nicht ſehen.

111. §.

In dem Fall $\delta < f$ wird $C\pi > CA$ und $A\pi$ 34 F.
negativ: von den Strahlen, die jeder Punct Q des Gegenſtandes auf den Spiegel wirft, geht einer rückwärts verlängert durch C, der den Spiegel in E trift, und alle dieſe von Q auffallenden Strahlen liegen nach der Zurückwerfung ſo, als kämen ſie von k her, $Ek = \frac{EQ \cdot f}{EQ - f}$ genommen. Wäre alſo PQ ein mit dem Halbmeſſer CP beſchriebener Bogen, ſo würden auch alle Puncte k in einem Kreisbogen liegen, wozu der Halbmeſſer $C\pi$ gehörte. Aber auch in andern Fällen, wenn AP und EQ nicht ſehr ungleich ſind, kommt in πk ein Bild des Gegenſtandes PQ zum Vorſchein, welches nun nicht mehr verkehrt, ſondern aufrecht ſte-

het, überdem auch gröſſer als der Gegenſtand ſelbſt iſt. Es wird nemlich $\pi k = \frac{f}{\delta - f} \cdot PQ = - \frac{f}{f - \delta} \cdot PQ$ negativ und gröſſer als PQ. Eine Perſon alſo in PQ, die gegen den Spiegel ſiehet, wird ſich ſelbſt hinter dem Spiegel aufgerichtet, und vergröſſert ſehen.

112. §.

35 F. Auch auf den erhabenen ſphäriſchen Spiegel werden dieſe Schlüſſe leicht angewandt. Iſt PQ in dem hier gebräuchlichen und ſchon erklärten Verſtande, der Halbmeſſer eines Gegenſtandes, der ſein Licht auf den Spiegel wirft, ſo verwandelt ſich der von jedem Punct Q auffallende Strahlenkegel in einen entgegen geſetzten, der ſeine Spitze k hinter dem Spiegel in der graden Linie QC hat, und es iſt $Ek = - \frac{EQ \cdot f}{EQ + f}$. Sind EQ und AP für alle Puncte Q beynahe gleich, ſo ſind auch Ek und $A\pi$ beynahe gleich groß, πk iſt ein Bild von PQ, und des Bildes Halbmeſſer $\pi k = - \frac{f}{\delta + f} \cdot PQ$. Das Bild iſt aufgerichtet und kleiner, als der Gegenſtand, es mag $AP = \delta$ wachſen oder abnehmen wie man will, doch wird das Bild gröſſer, und rückt dem Spiegel näher, wenn δ kleiner wird, und in dem Fall $\delta = f$, iſt $\pi k = - \frac{1}{2} PQ$, und $A\pi = - \frac{1}{2} f$. Siehet man alſo grade gegen einen erhabenen Spiegel, ſo ſiehet man zugleich hinter

hinter dem Spiegel ein verkleinertes Bild von ſich ſelbſt, das deſto gröſſer wird, je näher man den Spiegel dem Auge bringt.

113. §.

Im ebenen Spiegel ſiehet man nicht allein ſein eigenes Bild, wenn man denſelben grade vor ſich hat, ſondern auch das Bild jedes andern ſtrahlenden Puncts L, wenn das Auge ſeitwärts der durch 19 F.
L auf den Spiegel lothrecht herab gelaſſenen graden Linie LR in der Gegend BDF befindlich iſt. Das Bild L des Puncts M hat übrigens einerley Stelle bey einerley Lage des Spiegels, das Auge mag ſeine Stelle haben, wo es wolle; nur muß es ſeine Stelle in demjenigen Raum haben, worin ſich das zurückgeworfene Licht ausbreitet, damit es einen Theil der zurückgeſchickten Strahlen auffangen kann.

Mit den ſphäriſchen Spiegeln hat es eine ähnliche Bewandniß, nur hängt die Stelle desjenigen Bildes, welches das Auge wahrnimmt, von der Stelle ab, wo ſich das Auge befindet. Wenn der ſtrahlende Punct P ſein Licht auf den ſphäriſchen 27 F.
Hohlſpiegel AMN wirft, ſo macht das zurückgehende Licht unzählig viele verſchiedene Bilder. Eine Reihe dieſer Bilder liegt in der Axe AC, und ſie haben ihren Urſprung von der Krümmung der Kugelfläche, in wie fern ſelbige an jeder Stelle M mit der Krümmung des Parallelkreiſes durch M überein kommt. Eine andre Reihe von Bildern rührt her von derjenigen Krümmung der Kugelfläche in M, welche mit der Krümmung des gröſten Kreiſes durch die Axe AC und die Stelle M

übereinkommt. Dieſe zuletzt erwehnten Bilder ſind einerley mit den Puncten Q, worin zwey zunächſt nach einander folgende zurückgeworfene Strahlen Mp, Nq, einander ſchneiden: (101. §.) alle Puncte Q liegen in einer krummen Linie πQz welche die catoptriſche Brennlinie heiſt, (cauſtica per reflexionem auch cata-cauſtica) und der Nahme rührt daher, weil man in den optiſchen Wiſſenſchaften jeden Sammlungs- oder Zerſtreuungspunct des zurückgeworfenen oder gebrochenen Lichts in einem etwas weitläuftigern Verſtande einen Brennpunct (focum) nennt. Ein
28 F. Auge in O ſiehet alſo zwey verſchiedene Bilder des ſtrahlenden Puncts P, das eine in p, das andre in Q, die jedoch in den meiſten Fällen nur wie ein Bild erſcheinen, welches nicht ſo deutlich iſt, wie es ſeyn würde, wenn alle von dem Element MmnN zurückgeſchickte Strahlen einerley Vereinigungspunct hätten.

Es iſt leicht zu erachten, daß es mit dem erha-
32 F. benen ſphäriſchen Spiegel eben die Bewandniß habe. Stehet das Auge in O und fängt die Strahlen auf, die das Element MmnN zurück ſchickt; ſo ſiehet es eine Vermiſchung der beyden Bilder p und Q, alſo ein nicht völlig deutliches Bild des Puncts P, und dies Bild ändert ſeine Stelle, wenn das Auge ſeine Stelle ändert. Der Unterſcheid vom ſphäriſchen Hohlſpiegel beſtehet nur darin, daß allemahl das Bild, welches der erhabene Spiegel macht, hinter demſelben liegt, dasjenige aber, welches der Hohlſpiegel macht, allemahl vor demſelben liegt, wenn AP $>$ $\frac{1}{2}$AC iſt. Alle Puncte Q worin die in einerley Ebene

eines

eines gröſten Kreiſes auffallenden Strahlen nach ihrer Zurückwerfung rückwärts verlängert einander ſchneiden würden, machen ebenfals eine Reihe geometriſcher, (nicht phyſiſcher wie beym Hohlſpiegel) Bilder aus, die in der catoptriſchen Brennlinie πQz liegen, welche hier ebenfals nur geometriſch nicht phyſiſch iſt. Eine andre Reihe von Bildern liegt in der Axe AC, und das ſind die Puncte, worin die auf einerley zur Axe PAC gehörigen Parallelkreis fallenden Strahlen nach ihrer Zurückwerfung rückwärts verlängert einander ſchneiden würden.

114. §.

Eine Gleichung zwiſchen rechtwinklichten Coordinaten für die catoptriſche Brennlinie des Kreiſes zu finden. 27 F.

Auflöſung. Man laſſe QR und MB auf AC ſenkrecht fallen, und ſetze $CR = x$, $RQ = y$; ſo hat man $Mp : Qp = MB : y$, und $x - Cp : y = CB - Cp : BM$; alſo $y = \frac{MB \cdot Qp}{Mp} = \frac{MB\,(Mp - MQ)}{Mp}$, oder $y = BM - \frac{BM \cdot QM}{Mp}$, und $x = Cp + \frac{(CB - Cp)\,y}{BM}$. Weil nun BM, QM, und Mp durch α gegeben ſind, ſo iſt $y = BM\left(1 - \frac{QM}{Mp}\right)$ durch α gegeben, folglich auch x, weil CB und Cp ebenfals durch α gegeben ſind. Es war nemlich $MQ =$

$$\frac{r(r+(\delta-r)\operatorname{coſ}\alpha)\sqrt{(r^2+2r(\delta-r)\operatorname{coſ}\alpha+(\delta-r)^2)}}{2(\delta-r)^2+3r(\delta-r)\operatorname{coſ}\alpha+r^2|}$$

und $Mp = \frac{r\sqrt{(r^2+2r(\delta-r)\operatorname{coſ}\alpha+(\delta-r)^2)}}{r+2(\delta-r)\operatorname{coſ}\alpha}$;

(101. 102. §.) alſo findet man $\frac{MQ}{Mp} =$

$$\frac{(r+(\delta-r)\operatorname{coſ}\alpha)(r+2(\delta-r)\operatorname{coſ}\alpha)}{2(\delta-r)^2+3r(\delta-r)\operatorname{coſ}\alpha+r^2} =$$

$$\frac{r^2+3r(\delta-r)\operatorname{coſ}\alpha+2(\delta-r)^2\operatorname{coſ}\alpha^2}{2(\delta-r)^2+3r(\delta-r)\operatorname{coſ}\alpha+r^2},$$ und

das giebt $1-\frac{MQ}{Mp} = \frac{2(\delta-r)^2\operatorname{ſin}\alpha^2}{2(\delta-r)^2+3r(\delta-r)\operatorname{coſ}\alpha+r^2}$,

folglich $y = \frac{2r(\delta-r)^2\operatorname{ſin}\alpha^3}{2(\delta-r)^2+3r(\delta-r)\operatorname{coſ}\alpha+r^2}$.

Oben im 87 §. iſt $\frac{\delta-r}{\delta-\frac{1}{2}r} = n$, und $\frac{\frac{1}{2}r}{\delta-\frac{1}{2}r} = m$ geſetzt, wenn alſo die für y gefundene Formul im Zähler und Nenner mit $(\delta-\frac{1}{2}r)^2$ dividirt wird, ſo erhält man $y = \frac{r.n^2\operatorname{ſin}\alpha^3}{n^2+3mn\operatorname{coſ}\alpha+2m^2}$.

Ferner war $x = Cp\left(1-\frac{y}{BM}\right)+\frac{CB.y}{BM}$, und es iſt $CB = r\operatorname{coſ}\alpha$, $BM = r\operatorname{ſin}\alpha$, $Cp = \frac{\frac{1}{2}nr}{1-n\operatorname{ſinv}\alpha}$ (87. §.) $= \frac{\frac{1}{2}nr}{m+n\operatorname{coſ}\alpha}$, $\frac{y}{BM} = \frac{n^2\operatorname{ſin}\alpha^2}{n^2+3mn\operatorname{coſ}\alpha+2m^2}$; alſo $1-\frac{y}{BM} = \frac{n^2\operatorname{coſ}\alpha^2+3mn\operatorname{coſ}\alpha+2m^2}{n^2+3mn\operatorname{coſ}\alpha+2m^2}$, und man findet

$x =$

$$x = \frac{(n^2 \cos\alpha^2 + 3mn \cos\alpha + 2m^2) \cdot \frac{1}{2}nr}{(n^2 + 3mn \cos\alpha + 2m^2)(m + n \cos\alpha)} + \frac{n^2 \sin\alpha^2 \cdot r \cos\alpha}{n^2 + 3mn \cos\alpha + 2m^2}.$$ Durch die Diviſion findet man $\frac{2m^2 + 3mn \cos\alpha + n^2 \cos\alpha^2}{m + n \cos\alpha} = 2m + n \cos\alpha$, alſo iſt auch $x = \frac{(2m + n \cos\alpha) \cdot \frac{1}{2}nr + n^2 \sin\alpha^2 \cdot r \cos\alpha}{n^2 + 3mn \cos\alpha + 2m^2}$, oder $x = \frac{\frac{1}{2}nr\,(2m + 3n \cos\alpha - 2n \cos\alpha^3)}{n^2 + 3mn \cos\alpha + 2m^2}$; und wenn $\frac{m}{n} = \frac{\frac{1}{2}r}{\delta - r} = \mu$ angenommen wird, ſo iſt $y = \frac{r \sin\alpha^3}{1 + 3\mu \cos\alpha + 2\mu^2}$, und $x = \frac{\frac{1}{2}r\,(2\mu + 3 \cos\alpha - 2 \cos\alpha^3)}{1 + 3\mu \cos\alpha + 2\mu^2}$.

Man ſetze $\frac{y}{r} = Y$, $\frac{x}{r} = X$, $X^2 + Y^2 = Z^2$, ſo geben die beyden gefundenen Gleichungen folgende dritte $Z^2 = \frac{\sin\alpha^6 + (\mu + \frac{3}{2}\cos\alpha - \cos\alpha^3)^2}{(2\mu^2 + 1 + 3\mu \cos\alpha)^2}$. Es iſt aber $\sin\alpha^6 = (1 - \cos\alpha^2)^3 = 1 - 3\cos\alpha^2 + 3\cos\alpha^4 - \cos\alpha^6$, und $(\mu + \frac{3}{2}\cos\alpha - \cos\alpha^3)^2 = (\mu + \frac{3}{2}\cos\alpha)^2 - 2(\mu + \frac{3}{2}\cos\alpha)\cos\alpha^3 + \cos\alpha^6 = \mu^2 + 3\mu \cos\alpha + \frac{9}{4}\cos\alpha^2 - 2\mu \cos\alpha^3 - 3\cos\alpha^4 + \cos\alpha^6$, alſo erhält man $Z^2 = \frac{\mu^2 + 1 + 3\mu \cos\alpha - \frac{3}{4}\cos\alpha^2 - 2\mu \cos\alpha^3}{(2\mu^2 + 1 + 3\mu \cos\alpha)^2}$.

 Dar-

Daraus folgt ferner $2\mu \cos\alpha^3 + (9\mu^2 Z^2 + \frac{3}{2}) \cos\alpha^2 + (6\mu(2\mu^2 + 1) Z^2 - 3\mu) \cos\alpha + (2\mu^2 + 1)^2 Z^2 - (\mu^2 + 1) = 0$, und aus der zweyten Gleichung erhält man

$$\cos\alpha^3 + (3\mu X - \tfrac{3}{2}) \cos\alpha + (2\mu^2 + 1) X - \mu = 0;$$

alſo kann man nun $\cos\alpha$ aus den beyden letzten Gleichungen wegſchaffen. Um abzukürzen, bezeichne man die Coefficienten der drey letzten Glieder in der erſten Gleichung mit P^2, Q^2, R^2, die Coefficienten der letzten aber mit V, W; ſo iſt

$$2\mu \cos\alpha^3 + P^2 \cos\alpha^2 + Q^2 \cos\alpha + R^2 = 0$$

und

$$2\mu \cos\alpha^3 + 2\mu V . \cos\alpha + 2\mu W = 0,$$

alſo auch

$$P^2 \cos\alpha^2 + (Q^2 - 2\mu V) \cos\alpha + R^2 - 2\mu W = 0.$$

Demnach iſt ferner

$$P^2 \cos\alpha^3 + (Q^2 - 2\mu V) \cos\alpha^2 + (R^2 - 2\mu W) \cos\alpha = 0,$$

und

$$P^2 \cos\alpha^3 + V . P^2 . \cos\alpha + W . P^2 = 0$$

alſo

$$(Q^2 - 2\mu V) \cos\alpha^2 + (R^2 - 2\mu W - P^2 . V) \cos\alpha - P^2 . W = 0.$$

Die beyden quadratiſchen Gleichungen geben

$$P^2 (Q^2 - 2\mu V) \cos\alpha^2 + (Q^2 - 2\mu V)^2 \cos\alpha + (R^2 - 2\mu W)(Q^2 - 2\mu V) = 0,$$

und

$$P^2 (Q^2 - 2\mu V) \cos\alpha^2 + P^2 (R^2 - 2\mu W - P^2 . V) \cos\alpha - P^4 . W = 0;$$

daraus folgt

$$((Q^2 - 2\mu V)^2 - P^2 (R^2 - 2\mu W - P^2 . V)) . \cos\alpha + (R^2 - 2\mu W)(Q^2 - 2\mu V) + P^4 . W = 0.$$

und

und man erhält

$$\cos\alpha = \frac{(R^2 - 2\mu W)(Q^2 - 2\mu V)P^4 . W}{P^2 (R^2 - 2\mu W - P^2 . V) - Q^2 - 2\mu V)^2}.$$

Wird dieſer Werth $= \frac{A}{B}$ geſetzt, und in der quadratiſchen Gleichung

$$P^2 \cos\alpha^2 + (Q^2 - 2\mu V)\cos\alpha + R^2 - 2\mu W = 0$$

ſubſtituirt, ſo hat man zwiſchen x und y die Gleichung

$$\frac{P^2 . A^2}{B^2} + (\frac{Q^2 - 2\mu V) . A}{B} + R^2 - 2\mu W = 0,$$

oder

$$P^2 . A^2 + (Q^2 - 2\mu V) . A . B + (R^2 - 2\mu W) B^2 = 0,$$

und man kann nun überſehen, daß die geſuchte Gleichung bis auf die zwölfte Ordnung ſteigen könne, weil A und B Functionen von x und y ſind, welche auf 5 Dimenſionen ſteigen. Wofern in beſondern Fällen die Glieder, welche die höhern Dimenſionen von x und y enthalten, einander aufheben, oder auch ihre Coefficienten für ſich verſchwinden, ſo wird dadurch die Gleichung auf eine niedere Ordnung herunter gebracht.

Unter dieſen beſondern Fällen iſt beſonders derjenige merkwürdig, wenn die Strahlen mit der Axe des Spiegels parallel einfallen. Alsdenn iſt $\delta = \infty$, alſo $\mu = \frac{\frac{1}{2}r}{\delta - r} = 0$, mithin $P^2 = \frac{3}{4}$, $Q^2 = 0$, $R^2 = Z^2 - 1$, $V = -\frac{3}{2}$, $W = X$; alſo $A = \frac{9}{16} X$, und $B = \frac{3}{4}(Z^2 - 1 + \frac{9}{8}) = \frac{3}{4}(Z^2 + \frac{1}{8})$, und man erhält die Gleichung $P^2 . A^2 + R^2 . B^2 = 0$, oder

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{9^2}{16^2} X^2 + \frac{9}{16}(Z^2 - 1)(Z^2 + \frac{1}{8})^2 = 0,$$

welche

welche nur auf die ſechſte Ordnung ſteigt. Eben dieſe Gleichung giebt

$$\frac{27}{64} X^2 + (Z^2 - 1)(Z^2 + \tfrac{1}{8})^2 = 0$$

oder $27 X^2 + (Z^2 - 1)(8 Z^2 + 1)^2 = 0$,

und nach gehöriger Rechnung

$$64 Z^6 - 48 Z^4 - 15 Z^2 + 27 X^2 - 1 = 0.$$

Es iſt aber $Z^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2}$, und $X = \frac{x}{r}$ angenommen, alſo erhält man

$$\frac{64(y^2+x^2)^3}{r^6} - \frac{48(y^2+x^2)^2}{r^4} - \frac{15(y^2+x^2)}{r^2} + \frac{27x^2}{r^2} - 1 = 0,$$

oder

$$64(y^2+x^2)^3 - 48r^2(y^2+x^2)^2 - 15r^4(y^2+x^2) + 27r^4x^2 - r^6 = 0,$$

und wenn man alles nach den Potenzen von y ordnet

$$64y^6 + (192x^2 - 48r^2)y^4 + (192x^4 - 96r^2x^2 - 15r^4)y^2 + 64x^6 - 48r^2x^4 + 12r^4x^2 - r^6 = 0.$$

Umſtändlichere Unterſuchungen über die Eigenſchaften der Brennlinien des Kreiſes für die mancherley hieher gehörigen beſondern Fälle, ſo wie auch allgemeinere Betrachtungen der Brennlinien, wenn die zurückwerfende Linie kein Kreis iſt, gehören mehr für die Geometrie als für die Optick: man ſehe davon nach die Analyſe des infiniment petits pour l' intelligence des lignes courbes par Mr. le Marquis de l' Hopital Sect. VI. pag. 104 ſqq. Ioh. Bernoulli Lect. Math. de methodo integralium in uſum Ill. March. Hoſpitalii Lect. 26 — 32.

— 32. Operum Tom. III. pag. 464 ſeqq. Smiths Lehrbegrif der Optick überſetzt von Kaeſtner 2 Buch 2 Th. 5 Cap. 216 u. f. S. Von Joh. Bernoulli wird unter andern die Nachricht mitgetheilt, daß Tſchirnhaus über dieſe Art Brennlinien die erſten Unterſuchungen angeſtellet, und in den Actis Eruditorum Lipſ. de A. 1682. menſ. Nov. pag. 364 das Reſultat davon bekannt gemacht habe, ohne dabey die Methode zu entdecken, welche ihn auf dieſe Erfindung geleitet hatte. Seine Unterſuchungen ſind auf den Fall eingeſchränkt, wenn die Strahlen mit der Axe parallel einfallen, und durch einen Rechnungsfehler verleitet, hatte er anfangs eine Linie als Brennlinie für dieſen Fall angegeben, die nur auf die vierte Ordnung ſteigt. Joh. Bernoulli aber zeigte ihm den Fehler, und fand die oben angegebene Linie der ſechſten Ordnung. M. ſ. die Abhandlung: Solutio curvæ cauſticæ per vulgarem Geometriam Carteſianam in den Actis Erud. Lipſ. A. 1692. menſ. Ianuar. pag. 30. und Ioh. Bernoullii Opera Tom I. pag. 52. auch Iacobi Bernoullii Opera Tom. I. pag. 466. Tſchirnhaus ſahe ſeinen Fehler ein, und machte ſolches in den Actis Eruditorum A. 1690. menſ. Febr. pag. 71 bekannt. Was die übrigen ſchon erwehnten Schriftſteller ſonſt von der Brennlinie des Kreiſes lehren, läßt ſich aus den hier mitgetheilten Formuln herleiten, wenn man ſich nur erinnert, daß für die erhabene Seite der Kreislinie, wenn ſelbige das Licht zurück wirft, der Halbmeſſer r in dieſen Formuln negativ angenommen, alſo $\mu = -\frac{\frac{1}{2}r}{\delta + r}$ geſetzt werden müſſe.

In

In dem Fall $\delta = 2r$ iſt demnach $\mu = \frac{1}{2}$ für den Hohlſpiegel, und $\delta = -\frac{1}{6}$ für den erhabenen Spiegel: das ſind die beyden beſondern Fälle, welche Joh. Bornouilli in den Lectionibus Hoſpitalianis a. a. O. vornemlich entwickelt hat. Uebrigens dienen die Gleichungen:

$$y = \frac{r \sin\alpha^3}{2\mu^2 + 1 + 3\mu \cos\alpha},$$

$$x = \frac{r(\mu + \frac{3}{2}\cos\alpha - \cos\alpha^3)}{2\mu^2 + 1 + 3\mu\cos\alpha},$$

in jedem Fall die Brennlinie zu zeichnen, wenn man die cubiſche Gleichung

$$\cos\alpha^3 + 3\left(\frac{\mu x}{r} - \frac{1}{2}\right)\cos\alpha + (2\mu^2+1).\frac{x}{r} - \mu = 0$$

auflöſen kann. Für jede Abſciſſe x giebt ſelbige drey verſchiedene Werthe von $\cos\alpha$, und weil zu jedem Coſinus zwey verſchiedene einander entgegen geſetzte Sinus gehören; ſo giebt die erſte Gleichung ſechs verſchiedene Werthe für y. Umgekehrt aber, wenn man y als gegeben annimmt, ſo wird $\sin\alpha$ durch eine Gleichung der ſechſten Ordnung beſtimmt; alſo gehören zu jedem y ſechs verſchiedene Werthe von $\sin\alpha$, mithin zwölf Werthe von $\cos\alpha$, und eben ſo viele von x: woher es dann begreiflich wird, daß die allgemeine Gleichung auf die zwölfte Ordnung ſteigen muß. In dem Fall $\mu = 0$, wird die erſte Gleichung $y = r\sin\alpha^3$ cubiſch, und zu jedem y gehören nur drey Werthe von $\sin\alpha$, mithin ſechs Werthe von x: daher kommt es, daß nun die Gleichung zwiſchen x und y nur auf die ſechſte Ordnung ſteigt.

Der

Der IX. Abſchnitt.

Allgemeine Geſetze der Brechung des Lichts mit Anwendungen auf ebene brechende Flächen.

115. §.

Es ſey ABCD ein Gefäß, das die Geſtalt eines rechtwinklichten Parallelepipedi hat; dies ſetze man den Sonnenſtrahlen ſo aus, daß eine von den Seitenflächen AHGD, wenn die Grundfläche AB wagrecht ſteht, der Sonne grade zugekehrt ſey, damit ihr Schatten AEKH ganz innerhalb des Gefäſſes falle. Man meſſe die Länge des Schattens AE = HK, und gieſſe hiernächſt das Gefäß voll Waſſer. Dies wird den Erfolg haben, daß der Schatten der Seitenfläche AHGD ſich um ein anſehnliches verkürzt, und nun nur bis an FL reicht: demnach müſſen die Strahlen SD SG, die wie bekannt, als parallel zu betrachten ſind, da wo ſie die Waſſerfläche treffen, bey D und G gebrochen werden, und im Waſſer die Richtung DF, GL, annehmen. 36F.

Wenn ABCD ein aus reinem hellen Glaſe verfertigtes Parallelepipedum iſt, ſo nimmt man eine völlig ähnliche Erſcheinung wahr, wenn man ein undurchſichtiges Rechteck aus Holz, oder Metall, wie man will, verfertigen läßt, das eben ſo hoch, als die Seitenfläche AHGD des Parallelepipedi iſt.

iſt. Man ſtellet dies Rechteck über AH lothrecht, und mißt die Länge des Schattens AE: ſobald man hiernächſt das gläſerne Parallelepipedum an AHGD anſetzt, ſo das eine Seitenfläche deſſelben an daß undurchſichtige Rechteck anſchließt, ſobald wird der Schatten kürzer, und erſtreckt ſich nur bis an FL, ſtatt deſſen, daß er ſich vorher bis an EK erſtreckte.

116. §.

Wird AD aufwärts nach P verlängert, ſo iſt DP für den Strahl SD das **Einfallsloth**, ſo wie bey der Zurückwerfung (81 §.) hier iſt nemlich die Fläche CD des Waſſers des Glaſes, oder was es ſonſt für eine durchſichtige Maſſe ſeyn mag, wagrecht, und AD lothrecht angenommen, und dieſe Fläche CD heiſt hier die brechende Fläche, ſo wie ſie in Abſicht des zurück geworfenen Lichts die zurück werfende Fläche heiſſen kann, und in der letztern Abſicht als Spiegelfläche betrachtet wird. Weiter iſt PDS = ADE der Winkel des einfallenden Strahls mit dem Neigungsloth, und derſelbe heiſt hier ſchlechthin der **Neigungswinkel** (angulus inclinationis). In der Ebene dieſes Neigungswinkels liegt auch der gebrochene Strahl DF, und dies nimmt man am deutlichſten wahr, wenn das Parallelepipedum aus Glas beſteht, und die Ebene ADGH dunkel iſt. Alsdenn iſt AE der Schatten von AD, wenn der Strahl ungebrochen durch die Luft geht, AF aber der Schatten, wenn der Strahl gebrochen durchs Glaß geht, und die drey Puncte A, F, E, liegen in grader Linie, mithin DA, DF, DE, in einer

ner Ebene. Der Winkel ADF des gebrochenen Strahls mit dem Einfallsloth heiſt der gebrochene **Winkel**, (angulus refractus) der Winkel FDE des gebrochenen Strahls mit dem einfallenden aber der **Brechungswinkel**. (angulus refractionis). Alle drey Winkel alſo, der Neigungswinkel, der gebrochene, und der Brechungswinkel liegen in einerley Ebene, die auf der brechenden Fläche, da wo der Strahl auffält, ſenkrecht iſt: ſie heiſt die **Brechungs-Ebene**, und iſt hier das, was im 81 §. die Zurückwerfungs-Ebene war.

Wenn demnach die **brechende Fläche** krumm iſt, ſo muß man ſich eine Ebene vorſtellen, welche dieſe brechende Fläche da, wo der Strahl auffällt, berührt: auf dieſer iſt alsdenn das Einfallsloth ſenkrecht, weil ein Element der krummen Fläche an dieſer Stelle zugleich als ein Element der berührenden Ebene zu betrachten iſt. Eben deswegen muß der Strahl, wenn er auf das Element fällt, wo die ebene Fläche die krumme brechende Fläche berührt, eben die Brechung leiden, die er litte, wenn es ein Element der ebenen Fläche wäre: die Brechung ſowohl, als die Zurückwerfung richtet ſich bloß nach dieſer Stelle, und würde ungeändert bleiben, wenn ſich gleich die übrige Geſtalt der brechenden Fläche, oder der Spiegelfläche, änderte.

117. §.

Stellt man die im 115. §. beſchriebenen Beobachtungen bey verſchiedenen Sonnen-Höhen an, 36 F.
ſo werden die Winkel AED, AFD, ſo wie ADE, ADF, verſchieden ſeyn, wie denn AED die jedes-

mahlige Höhe der Sonne ſeyn wird: bey einerley brechenden Maſſe indeſſen wird man finden, daß die Sinus der Winkel ADE und ADF allemahl in einerley Verhältniß bleiben, wie ſich auch die Höhe der Sonne, und mit ihr der Neigungswinkel ADE ändert. Man kan AD, AE, AF meſſen, und alsdenn hat man $\cot . ADE = \frac{AD}{AE}$, $\cot . ADF = \frac{AD}{AF}$, alſo $\operatorname{coſec} ADE = \frac{\sqrt{(AE^2 + AD^2)}}{AE}$, $\operatorname{coſec} . ADF = \frac{\sqrt{(AF^2 + AD^2)}}{AF}$, mithin ſin $ADE = \frac{AE}{\sqrt{(AE^2 + AD^2)}}$ und ſin $ADF = \frac{AF}{\sqrt{(AF^2 + AD^2)}}$. Beym Glaſe findet man nun allemahl ſin ADE : ſin ADF = 3 : 2, oder noch genauer = 31 : 20, und beym Waſſer ſin ADE : ſin ADF = 4 : 3, oder geuauer = 529 : 396 = 1000 : 748. Man nennt dies Verhältniß des Sinus des Neigungswinkels zum Sinus des gebrochenen Winkels das Verhältniß der Refraction, und daſſelbe iſt vermöge der Erfahrung bey einerley brechenden Maſſe einerley, der Neigungswinkel ändre ſich wie er wolle; bey verſchiedenen brechenden Maſſen aber verſchieden. Je kleiner der Neigungswinkel iſt, deſto kleiner iſt indeſſen allemahl der Brechungswinkel, mit jenem verſchwindet auch dieſer, oder: in jeder brechenden Maſſe geht der ſenkrecht auffallende Strahl ungebrochen durch.

118. §.

118. §.

Befeſtiget man im verfinſterten Zimmer das 36 F. gläſerne Parallelepipedum ſo, daß die horizontal-liegende Grundfläche AB, wenigſtens in der Gegend F, nicht auf einem undurchſichtigen Boden liegt; ſo wird der Strahl DF bey F zwar wieder aus dem Glaſe in die Luft gehen, aber daſelbſt von neuen aus der Lage FM, die mit DF in grader Linie liegt, in die Lage FN ſo gebrochen werden, daß FN mit dem einfallenden Strahl SD parallel liegt. Im finſtern Zimmer laſſen ſich die Stellen D und F, imgleichen die Strahlen SD, FN ſelbſt ganz deutlich wahrnehmen, und ſo kann man ſich durch mehr als ein Mittel von der parallelen Lage der Strahlen SD und FN verſichern. Nun ſey FQ für den Strahl DF das Einfalls-Loth, ſo iſt vermöge der Beobachtung QFN = ADE, ſo wie QFM = ADF wäre. Hat man nun ſin ADE = $\frac{m}{n}$ ſin ADF befunden, ſo iſt auch ſin QFN = $\frac{m}{n}$ ſin QFM, demnach iſt wenigſtens beym Glaſe, wenn der Strahl aus Glas in die Luft geht, das Verhältniß der Refraction in umgekehrter Ordnung eben daſſelbe, was man findet, wenn der Strahl aus der Luft ins Glaß fällt. Verſuche mit andern brechenden Maſſen lehren, daß es damit eben die Bewandniß habe. Beym Uebergang des Lichts aus der dünnern Maſſe in die Dichtere iſt allemahl der gebrochene Winkel kleiner als der Neigungswinkel: beym Uebergang des Lichts aber aus der dichtern Maſſe in die dünnere iſt der

 gebro-

gebrochene Winkel gröſſer als der Neigungswinkel. Sind übrigens die brechenden Maſſen einerley, ſo iſt allemahl das Verhältniß der Refraction, wenn der Strahl aus der dichtern Maſſe in die Dünnere fällt, in umgekehrter Ordnung einerley mit demjenigen, was man findet, wenn der Strahl aus der dünnern Maſſe in die Dichtere geht.

Wie man Verſuche dieſer Art mit allerley brechenden Maſſen anſtellen, und ſich überhaupt davon verſichern könne, daß die hier und im vor. §. vorgetragenen Geſetze der Refraction allgemein wahr ſind, wenn das Licht aus einer durchſichtigen Maſſe in eine andre Dichtere, oder Dünnere übergeht; ſolches werden die folgenden Unterſuchungen nach und nach mehr ins Licht ſetzen. Das optiſche Geſetz von der gradlinichten Ausbreitung des Lichts nach allen Seiten, (4. §. Optick) und das catoptriſche Geſetz von der Gleichheit der Einfalls- und Zurückſtrahlungswinkel (81 §.) war zwar den alten griechiſchen Geometern bekannt: allein die Entdeckung des Geſetzes der Strahlenbrechung iſt allererſt in der erſten Hälfte des vorigen Jahrhunderts gemacht worden, obgleich die Strahlenbrechung ſelbſt mit ihren Wirkungen nicht unbekannt war. Man hat noch aus dem Alterthum eine Optick und Catoptrick, die dem Euclides zugeſchrieben wird, aber ſo fehlerhaft iſt, daß eben um deßwillen von einigen Schriftſtellern dieſe Stücke nicht für ächte Schriften des allgemein berühmten Geometers dieſes Nahmens gehalten werden. M. ſ. *Montucla* Hiſtoire des Mathematiques Tom. I. Part. III. Liv. V. pag. 624. 625. Prieſtleys

Geſchichte

Geſchichte der Optick vom H. Klügel überſetzt, 1 Periode 6 und 7 Seite. Willebrordus Snellius, Profeſſor der Mathematick zu Leiden, iſt der erſte geweſen, der das wahre Geſetz der Strahlenbrechung erfunden hat: er iſt aber zu frühe, im Jahr 1626, da er nur im 35ſten Jahr ſeines Alters war, geſtorben, als daß er aus dieſer Entdeckung hätte mehr Nutzen für die Wiſſenſchaft ziehen, oder auch nur ſie ſelbſt bekannt machen können. Huggen hat des Erfinders Handſchrift geſehen, und giebt die eben erwehnte Nachricht gleich Anfangs in ſeiner Dioptrick: (M. ſ. Hugenii Opera Poſthuma Tom. I. pag. 2. 3.) Dabey vermuthet er, daß Snellius ſeine Entdeckung ſelbſt noch nicht völlig verſtanden habe. Trigonometriſch ausgedrückt würde des Snellius Geſetz ſo lauten: die Coſecanten des Neigungs- und des gebrochenen Winkels ſind bey einerley brechenden Maſſe in einem unveränderlichen Verhältniß, wenn gleich der Neigungswinkel geändert wird. Carteſius, der nach Huggens Bericht des Snellius Handſchrift geſehen haben ſoll, drückte nachher dies Geſetz bequemer durch das Verhältniß der Sinus der Winkel aus, welches, wenn Snellii Geſetz wahr iſt, ebenfals unveränderlich ſeyn muß, weil es das umgekehrte Verhältniß der Coſecanten iſt. Man kann dieſe Geſetze der Brechung ſo wie die Geſetze der Zurückwerfung (81 §.) anfangs wenigſtens als Hypotheſen gelten laſſen, die durch die beſtändige Uebereinſtimmung aller daraus flieſſenden Folgen mit dem, was die Erfahrung lehrt, nach und nach ihre völlige Gewißheit erhalten.

119. §.

37. 38 F. Der Punct P wirft einen Lichtſtrahl PM auf die ebene brechende Fläche BC, und das Verhältniß der Refraction iſt gegeben. Durch P iſt die grade Linie PA auf BC ſenkrecht gezogen: man ſucht den Punct Π, worin der gebrochene Strahl die ſenkrechte Linie PA ſchneidet.

Aufl. 1) Es ſey DE das Neigungsloth durch M, und der einfallende Strahl PM werde in die Lage MN gebrochen; ſo liegen PM und MN in der Ebene der Parallelen AP und DE, welches zugleich die Brechungsebene iſt, und AM iſt dieſer Brechungsebene Durchſchnittslinie mit der ebenen brechenden Fläche BC. Es ſey der Neigungswinkel $DMP = EMF = APM = \alpha$, der gebrochene Winkel $EMN = DM\Pi = A\Pi M = \beta$, und das Verhältniß der Refraction $= \mu : 1$, ſo iſt $\sin\alpha : \sin\beta = \mu : 1$. Ferner ſey $AP = \delta$, $AM = z$; ſo iſt $PM = \sqrt{(\delta^2 + z^2)}$, und im Dreyeck $PM\Pi$ hat man $\Pi M = \frac{PM \,.\, \sin\alpha}{\sin\beta}$, alſo $\Pi M = \mu \sqrt{(\delta^2 + z^2)}$. Demnach hat man im rechtwinklichten Dreyeck $A\Pi M$ die Hypothenuſe ΠM, und die Seite $AM = z$ iſt gegeben: mithin findet man $A\Pi = \sqrt{(\mu^2 (\delta^2 + z^2) - z^2)} = \sqrt{(\mu^2 \delta^2 + (\mu^2 - 1) z^2)}$, oder $A\Pi = \mu\delta \sqrt{\left(1 + \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2} \,.\, \frac{z^2}{\delta^2}\right)}$.

2) Wenn der Strahl aus einer dünnern Maſſe in eine dichtere übergeht, mithin $\mu > 1$ iſt, wie die 27ſte Figur annimmt; ſo iſt allemahl $A\Pi > AP$. Wofern aber P in der dichtern Maſſe und auf der andern

andern Seite der brechenden Ebene eine dünnere Maſſe befindlich, mithin $\mu < 1$ iſt, wie die 38ſte Figur annimmt; ſo iſt allemahl $A\Pi < AP$, und die gefundene Formul läßt ſich auch ſo ausdrücken

$$A\Pi = \mu\delta\sqrt{\left(1 - \frac{1-\mu^2}{\mu^2} \cdot \frac{z^2}{\delta^2}\right)}.$$

3) Weil übrigens $\frac{z}{\delta} = tg\alpha$, ſo iſt auch $A\Pi$

$= \mu\delta\sqrt{(1 + \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2} tg\alpha^2)}$, oder $A\Pi = \delta\sqrt{(\mu^2 (1 + tg\alpha^2) - tg\alpha^2)} = \delta\sqrt{(\mu^2 \sec\alpha^2 - tg\alpha^2}$. Ferner hat man $\sin\beta^2 = \frac{\sin\alpha^2}{\mu^2}$, $\cos\beta^2 = \frac{\mu^2 - \sin\alpha^2}{\mu^2}$, alſo $\cot\beta^2 = \frac{\mu^2 - \sin\alpha^2}{\sin\alpha^2}$, und $tg\alpha^2 \cot\beta^2 = \frac{\mu^2}{\cos\alpha^2} - tg\alpha^2 = \mu^2 \sec\alpha^2 - tg\alpha^2$; demnach verwandelt ſich die gefundene Formul auch in folgende $A\Pi = \delta \cdot tg\alpha \cdot \cot\beta$.

120. §.

1) In der 37ſten Fig. hat $A\Pi$ den kleinſten Werth, wenn z oder $AM = 0$ iſt. Alsdenn hat man $A\Pi = \mu\delta = \frac{\delta \sin\alpha}{\sin\beta}$: in allen andern Fällen iſt $A\Pi > \mu\delta$. So lange indeſſen z in Vergleichung mit δ ſehr klein iſt, ſo lange bleibt ſehr nahe $A\Pi = \mu\delta$. Man nehme alſo $Ap = \mu\delta$, und $A\mu$ ſey in Vergleichung mit AP ſehr klein; ſo erhellet, daß alle Strahlen, die von P auf $A\mu$ fallen, nach der Brechung eine ſolche Lage haben, als kämen

 ſie

ſie von p her. Steht alſo das Auge in O ſehr nahe bey der Axe AP, ſo empfängt es die von P ausgehenden Lichtſtrahlen eben ſo, als kämen ſie von p her: ihm ſcheint alſo P in p zu ſtehen, und deswegen kann p ein Bild von P heiſſen. Das Auge wird auf einerley Art gerührt, es mag die Strahlen ohne Refraction unmittelbar von p erhalten, oder vermittelſt der Refraction in eben der Lage, als kämen ſie von p her. In dem jetzt betrachteten Fall alſo verurſacht die Refraction, daß der Punct P von der brechenden Fläche weiter entfernt zu ſeyn ſcheint, als er davon würklich entfernt iſt.

38 F. 2) In dem Fall, welchen die 38ſte Fig. vorſtellt, hat $A\Pi$ den gröſten Werth, wenn $z = 0$ iſt, weil alsdenn $A\Pi = \mu\delta$ wird, in allen andern Fällen aber $A\Pi < \mu\delta$ iſt. So lange indeſſen z in Vergleichung mit δ ſehr klein iſt, ſo lange bleibt wiederum $A\Pi$ ſehr nahe $= \mu\delta$, und wenn man $Ap = \mu\delta$ nimmt, ſo iſt wie vorhin der Punct p ein Bild von P. Einem Auge in O, ſehr nahe bey der Axe AP ſcheint P in p zu ſtehen, und in dieſem Fall verurſacht die Refraction, daß der Punct P nicht ſo weit von der brechenden Fläche entfernt zu ſeyn ſcheint, als er würklich davon entfernt iſt.

3) Wenn P ein ſichtbarer Gegenſtand iſt, worin man mehrere Puncte unterſcheiden kann; ſo gilt das von jedem Punct, was von P und deſſen Bilde p bewieſen iſt. Alle Bilder p zuſammen machen das Bild des ganzen ſichtbaren Gegenſtandes aus, das die Refraction in dem Fall der 37ſten Figur von der brechenden Fläche entfernt, und in dem Fall der 38ſten Figur derſelben näher rückt. Liegt P in einem Gefäß, das man mit Waſſer füllen kann;

kann; ſo muß es ſcheinen, als wäre P etwas höher gehoben, wenn man, nachdem das Gefäß mit Waſſer angefüllt und daſſelbe völlig in Ruhe gekommen iſt, von oben herab in das Gefäß hinein ſiehet.

4) Fällt ein Strahl QM in einer ſolchen Lage auf die brechende Fläche BC, daß derſelbe verlängert die Axe AP hinter der Fläche BC in P′ ſchneiden würde, ſo iſt AP′ das, was vorhin AP oder δ war, nur hat AP′ eine Lage, die der Lage von AP entgegen geſetzt iſt. Schneidet nun der gebrochene Strahl die Axe in Π', ſo muß man, um $A\Pi'$ zu finden, in der allgemeinen Formul $A\Pi =$

$$\mu\delta \sqrt{\left(1 + \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2} \cdot \frac{z^2}{\delta^2}\right)}$$

das δ negativ annehmen, da dann zugleich $A\Pi$ negativ wird. Der Abſtand des Bildes p' von der brechenden Ebene iſt nun $= -\mu\delta$.

121. §.

Aus P fällt ein Lichtſtrahl PM auf die brechende Ebene AB, und in derſelben Ebene der Brechung APM ein andrer Strahl PN ſehr nahe bey PM, ſo daß MPN als ein Differential des Winkels APM betrachtet werden kann; PM wird in die Lage $M\mu$ und PN in die Lage $N\nu$ gebrochen: man ſoll den Punct Q finden, worin beyde gebrochene Strahlen einander ſchneiden. 39 F.

Aufl. Es ſey MC das Einfalls-Loth, CMP $=$ APM $= \alpha$, CMΠ $=$ AΠM $= \beta$, und $\sin\alpha : \sin\beta = \mu : 1$ das Verhältniß der Refraction. Die

Figur ſtellt den Fall vor, wenn $\mu > 1$ iſt, und weil $\sin\alpha = \mu \sin\beta$, ſo wächſt β mit α, es mag μ gröſſer, oder kleiner als 1 ſeyn. Nun iſt AMΠ $= 90° - \beta$, und ANQ $= 90° - (\beta + \delta\beta)$, alſo AMΠ > ANQ, mithin werden MΠ und NQ nach Π und Q verlängert einander irgendwo in Q ſchneiden, und weil die Lage von MQ bekannt iſt, ſo kommt die Auflöſung der Aufgabe nur darauf an, die Gröſſe von MQ zu finden. Aus dem Mittelpunct P ſey mit dem Halbmeſſer PN der Bogen NK beſchrieben, aus Q aber mit dem Halbmeſſer QN der Bogen NL; ſo iſt AMP $= 90° - \alpha$, ANP $= 90° - (\alpha + d\alpha)$, alſo MPN = AMP $-$ ANP $= d\alpha = \frac{NK}{PN}$, und PN $= \frac{NK}{d\alpha}$; überdem iſt MQN = AMQ $-$ ANQ $= d\beta = \frac{NL}{QN}$, und QN $= \frac{NL}{d\beta}$. Aber QN und QM ſind nur um ein Differential unterſchieden, alſo iſt auch QM $= \frac{NL}{d\beta}$, und eben ſo PN oder PM $= \frac{NK}{d\alpha}$. Das giebt $\frac{QM}{PM} = \frac{NL \cdot d\alpha}{NK \cdot d\beta}$; und weil NL $=$ MN $\cos\beta$, NK $=$ MN $\cos\alpha$, ſo iſt auch $\frac{QM}{PM} = \frac{d\alpha \cos\beta}{d\beta \cos\alpha}$. Ferner iſt $\sin\alpha = \mu \sin\beta$, alſo $d\alpha \cos\alpha = \mu\, d\beta \cos\beta$ und $\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{\mu \cos\beta}{\cos\alpha}$; mithin findet man QM $= \frac{PM \cdot \mu \cos\beta^2}{\cos\alpha^2}$.

Weil

Weil $\mu = \frac{\text{ſin}\alpha}{\text{ſin}\beta}$ iſt, und PM $= \delta$ ſecα $= \frac{\delta}{\text{coſ}\alpha}$, ſo hat man auch MQ $= \frac{\delta \,.\, \text{tang}\alpha \,\text{cot}\beta \,\text{coſ}\beta}{\text{coſ}\alpha^2}$, und im 119 §. n. 3. war $A\Pi = \delta\, \text{tg}\alpha \,.\, \text{cot}\beta$, mithin iſt QM $= \frac{A\Pi \,.\, \text{coſ}\beta}{\text{coſ}\alpha^2}$. Ferner iſt $A\Pi = M\Pi \,.\, \text{coſ}\beta$, alſo QM $= \frac{M\Pi \,.\, \text{coſ}\beta^2}{\text{coſ}\alpha^2}$. Weil überdem $\text{ſin}\beta = \frac{\text{ſin}\alpha}{\mu}$, alſo $\text{coſ}\beta^2 = \frac{\mu^2 - \text{ſin}\alpha^2}{\mu^2}$, ſo iſt $\frac{\text{coſ}\beta^2}{\text{coſ}\alpha^2} = \frac{\mu^2 - \text{ſin}\alpha^2}{\mu^2 \,\text{coſ}\alpha^2} = \text{ſec}\alpha^2 - \frac{\text{tg}\alpha^2}{\mu^2} = 1 + \frac{(\mu^2 - 1)\,\text{tg}\alpha^2}{\mu^2}$, und man erhält MQ $= M\Pi \left(1 + \frac{(\mu^2 - 1)\,\text{tg}\alpha^2}{\mu^2}\right)$.

Wenn $\mu > 1$ iſt, wie die Figur annimmt, ſo iſt $MQ > M\Pi$; iſt aber $\mu < 1$, ſo wird $MQ < M\Pi$, wie auch daraus erhellet, weil nun NQ die lothrechte Linie PA in einem Punct π ſchneiden muß, der näher bey A liegt, als Π. Aus Q ſey QR auf AP ſenkrecht gezogen, ſo iſt $\frac{AR}{A\Pi} = \frac{MQ}{M\Pi} = \frac{\text{coſ}\beta^2}{\text{coſ}\alpha^2}$, oder $\frac{M\Pi + \Pi Q}{M\Pi} = 1 + \frac{\Pi Q}{M\Pi} =$

coſβ²

$\frac{\cos\beta^2}{\cos\alpha^2}$, mithin $\Pi Q = \frac{\cos\beta^2 - \cos\alpha^2}{\cos\alpha^2} \cdot M\Pi$. Das giebt ferner $\Pi R = \Pi Q \cos\beta = \frac{\cos\beta^2 - \cos\alpha^2}{\cos\alpha^2} \cdot A\Pi$, und $QR = \Pi Q \sin\beta = \frac{\cos\beta^2 - \cos\alpha^2}{\cos\alpha^2} \cdot AM$, alſo auch $\Pi R = \frac{(\cos\beta^2 - \cos\alpha^2)\, tg\alpha}{\cos\alpha^2\, tg\beta} \cdot \delta$, $AR = \frac{\cos\beta^2 \cdot tg\alpha^2}{\cos\alpha^2\, tg\beta} \cdot \delta = \frac{\cos\beta^3}{\cos\alpha^3} \cdot \mu\delta$, und $RQ = \frac{(\cos\beta^2 - \cos\alpha^2)}{\cos\alpha^2} \cdot \delta\, tg\alpha$ oder $RQ = \frac{(\cos\beta^2 - \cos\alpha^2)\sin\beta}{\cos\alpha^3} \cdot \mu\delta$. Wenn alſo α verſchwindet, ſo wird $AR = \mu\delta$, und $RQ = 0$, wie dem 120 §. gemäß iſt, weil bey dieſer Vorausſetzung $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = 1$ wird.

122. §.

39. Weil alle Strahlen, welche das Element MN
40 F. auffängt, nach ihrer Brechung in die Lage $M\mu$ und $N\nu$ ſo auseinander fahren, als kämen ſie von Q her, ſo iſt Q ein Bild von P, ein Zerſtreuungspunct. Iſt P ein Object, das im Waſſer liegt, und AB die brechende Fläche des Waſſers indem das von P ausgehende Licht aus dem Waſſer in die Luft geht, ſo verwandelt ſich die Lage der Strahlen, welche ſich in dem Raum, des Winkels MPN ausbreiten würden, in die Lage $M\mu$, $N\nu$, und ſie breiten ſich nach der Brechung in

in den Raum des Winkels MQN aus. Einem Auge, das ſich in O befindet, ſcheint P die Stelle Q zu haben: auch ändert ſich dieſe Stelle Q mit der Stelle des Auges, weil AR und RQ ſich mit den Winkeln α und β ändern. Es giebt alſo eine Reihe von Bildern Q auf ähnliche Art, wie ſie das vom ſphäriſchen Spiegel zurück geworfene Licht verurſachte, und die Linie, worin alle dieſe Bilder liegen, heiſt hier eine dioptriſche Brennlinie. (cauſtica per refractionem auch dia-cauſtica). In dem hier betrachteten Fall, wenn die brechende Fläche eben iſt, iſt dieſe Brennlinie geometriſch, nicht phyſiſch, weil die Puncte Q Zerſtreuungspuncte ſind. Im folgenden werden auch Fälle betrachtet werden, wenn die brechende Fläche krumm iſt, und wenn alsdenn die Puncte Q Sammlungspuncte ſind, ſo iſt dieſe Brennlinie phyſiſch.

In der brechenden Ebene ſtelle man ſich ein Paar mit den Halbmeſſern AM, und AN aus A beſchriebene Kreiſe vor, wozu die Halbmeſſer AM und AN gehören, und wovon M*m*, N*n*, ein paar unendlich kleine Bogen ſind; ſo erhellet, daß die auf das Element M*mn*N fallenden Strahlen nach der Brechung nicht einerley Zerſtreuungspunct haben. Zu den auf den Bogen M*m* fallenden Strahlen gehört der Zerſtreuungspunct Π, und zu den auf das Element MN des Halbmeſſers fallenden Strahlen der Zerſtreuungspunct Q. In dem Fall, welchen die 40 Fig. vorſtellt, iſt es eben ſo, und dies verurſacht, daß ein Auge in O, auf ähnliche Art wie beym ſphäriſchen erhabenen Spiegel, zwey verſchiedene Bilder von P ſiehet, das eine in Π, das andre in Q. In den meiſten Fällen ver-

miſcht ſich das Licht von beyden Bildern, und das Auge ſieht nur ein wiewohl etwas undeutliches Bild von P. M. ſ. Bouguer Traité d' Optique Liv. II. Sect. I. Art. III. pag. 103. 104.

123. §.

Die Gleichung zu finden, welche die Natur der Brennlinie der ebenen Fläche ausdrückt.

Aufl. Man ſetze AR $= x$, RQ $= y$, ſo hat man im 121 §. ein paar Gleichungen für x und y beyde durch die Winkel α und β ausgedruckt: und wenn man dieſe Winkel aus jenen Gleichungen wegſchaft, ſo giebt ſich die geſuchte Gleichung zwiſchen x und y. Es war nemlich $x = \frac{\cos\beta^3}{\cos\alpha^3} \cdot \mu\delta$, $y = \frac{(\cos\beta^2 - \cos\alpha^2)\sin\beta}{\cos\alpha^3} \cdot \mu\delta$, und das giebt $\mu\delta = \frac{x\cos\alpha^3}{\cos\beta^3} = \frac{y\cos\alpha^3}{(\cos\beta^2 - \cos\alpha^2)\sin\beta}$, mithin $\frac{y}{x} = \frac{(\cos\beta^2 - \cos\alpha^2)\sin\beta}{\cos\beta^3}$. Ferner iſt $\cos\beta^2 - \cos\alpha^2 = \sin\alpha^2 - \sin\beta^2 = (\mu^2 - 1)\sin\beta^2$, alſo $\frac{y}{x} = (\mu^2 - 1)\,\mathrm{tg}\beta^3$. Aus Q falle QS auf AB ſenkrecht, ſo iſt $\mathrm{tg}\beta = \frac{SM}{QS} = \frac{AM + RQ}{AR}$, alſo $\mathrm{tg}\beta = \frac{\delta\,\mathrm{tg}\alpha + y}{x}$, und $\frac{y}{x} = \mathrm{tg}\beta - \frac{\delta\,\mathrm{tg}\alpha}{x}$. Dieſer Werth dem vorigen

gleich

gleich geſetzt giebt $\mathrm{tg}\beta - \frac{\delta\,\mathrm{tg}\alpha}{x} = (\mu^2 - 1)\,\mathrm{tg}\beta^3$,

alſo ferner $1 - \frac{\delta\,\mathrm{tg}\alpha}{x\,\mathrm{tg}\beta} = (\mu^2 - 1)\,\mathrm{tg}\beta^2$, oder

$1 - \frac{\mu\delta\,\mathrm{coſ}\beta}{x\,\mathrm{coſ}\alpha} = (\mu^2 - 1)\,\mathrm{tg}\beta^2$, wenn man

nemlich μ ſtatt $\frac{\mathrm{ſin}\alpha}{\mathrm{ſin}\beta}$ ſetzt: alſo iſt auch $\frac{\mu\delta\,\mathrm{coſ}\beta}{x\,\mathrm{coſ}\alpha}$

$= 1 + (1 - \mu^2)\,\mathrm{tg}\beta^2$. Es iſt aber $\frac{\mathrm{coſ}\beta}{\mathrm{coſ}\alpha} =$

$\frac{\mathrm{coſ}\beta}{\sqrt{(1 - \mu^2\,\mathrm{ſin}\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\mathrm{ſec}\beta^2 - \mu^2\,\mathrm{tg}\beta^2)}}$

$= \frac{1}{\sqrt{(1 + (1 - \mu^2)\,\mathrm{tg}\beta^2)}}$, und dieſer Werth in die letzte Gleichung geſetzt, giebt

$$\frac{\mu\delta}{x\sqrt{(1 + (1 - \mu^2)\,\mathrm{tg}\beta^2)}} = 1 + (1 - \mu^2)\,\mathrm{tg}\beta^2,$$

alſo $\frac{\mu^2\,\delta^2}{x^2} = (1 + (1 - \mu^2)\,\mathrm{tg}\beta^2)^3$, ferner

$1 + (1 - \mu^2)\,\mathrm{tg}\beta^2 = \sqrt[3]{\frac{\mu^2\,\delta^2}{x^2}}$, und $(1 - \mu^2)$

$\mathrm{tg}\beta^2 = \frac{\sqrt[3]{\mu^2\,\delta^2} - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}$, woraus $\mathrm{tg}\beta^2 =$

$\frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{\mu^2\,\delta^2}}{(\mu^2 - 1)\sqrt[3]{x^2}}$ gefunden wird, und $\mathrm{tg}\beta =$

$\frac{\sqrt{(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{\mu^2 \delta^2}}}{\sqrt{(\mu^2 - 1)}\sqrt[3]{x}}$. Das giebt $tg\beta^3 =$

$\frac{(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{\mu^2 \delta^2})^{\frac{3}{2}}}{(\mu^2 - 1)^{\frac{3}{2}} x}$, und $x(\mu^2 - 1)\, tg\beta^3 =$

$\frac{(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{\mu^2 \delta^2})^{\frac{3}{2}}}{x\sqrt{(\mu^2 - 1)}}$. Oben aber iſt $y = x$ $(\mu^2 - 1)\, tg\beta^3$ gefunden, alſo iſt die geſuchte

Gleichung $y = \frac{(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{\mu^2 \delta^2})^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(\mu^2 - 1)}}$.

Die Wurzelzeichen ſchaft man durch folgende Rechnung weg. Es iſt auch $\sqrt[3]{(\mu^2 - 1)\, y^2} = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{\mu^2 \delta^2}$. Man ſetze $(\mu^2 - 1)\, y^2 = v$, $x^2 = w$, $\sqrt[3]{\mu^2 \delta^2} = r$, ſo iſt $\sqrt[3]{v} = \sqrt[3]{w} = r$. Weiter ſey $\sqrt[3]{v} = p$, $\sqrt[3]{w} = q$, ſo iſt $p^3 = v$, $q^3 = w$, und $p = q - r$. Aus dieſen dreyen Gleichungen ſchaft man p und q weg, ſo giebt ſich eine rationale Gleichung zwiſchen w und v, alſo auch hiernächſt zwiſchen x und y. Man cubire die Gleichung $p = q - r$, und ſetze ſtatt p^3 und q^3 ihre rationalen Werthe; ſo findet man

$$v = w - 3r \cdot q^2 + 3r^2 \cdot q - r^3$$

alſo $3rq^2 - 3r^2 q + r^3 + v - w = 0$,
mithin auch

$$3rq^3 - 3r^2 q^2 + (r^3 + v - w)\, q = 0.$$

Dieſe

Dieſe Gleichung von

$3rq^3 - 3rw = 0$ ſubtrahirt giebt

$3r^2q^2 - (r^3 + v - w)q - 3rw = 0$, und vorhin war

$3r^2q^2 - 3r^3q + r^4 + r(v-w) = 0$: wird alſo dieſe letzte Gleichung von der nächſtvorigen ſubtrahirt, ſo erhält man

$$(2r^3 + w - v)q - r^4 - rv - 2rw = 0,$$

alſo $q = \frac{r^4 + rv + 2rw}{2r^3 + w - v}$, und $p = q - r = \frac{2rv + rw - r^4}{2r^3 + w - v}$. Stellt man in dieſen Gleichungen die angenommenen Werthe wieder her, ſo hat man $\sqrt[3]{x^2} = \frac{(\mu^2\delta^2 + (\mu^2-1)y^2 + 2x^2)\sqrt[3]{\mu^2\delta^2}}{2\mu^2\delta^2 + x^2 - (\mu^2-1)y^2}$,

$$\sqrt[3]{(\mu^2-1)y^2} = \frac{(2(\mu^2-1)y^2 + x^2 - \mu^2\delta^2)\sqrt[3]{\mu^2\delta^2}}{2\mu^2\delta^2 + x^2 - \mu^2 - 1)y^2}.$$

Die erſte dieſer Gleichungen giebt y aus x vermittelſt einer reinen quadratiſchen Gleichung, wie man am leichteſten überſiehet, wenn man ſie ſo ausdrückt: $q = \frac{(r^3 + p^3 + 2q^3)r}{2r^3 + q^3 - p^3}$. Man findet nemlich $2r^3q + q^4 - p^3q = r^4 + rp^3 + 2rq^3$, alſo $(q+r)p^3 = q^4 - 2rq^3 + 2r^3q - r^4$, und $p^3 = \frac{q^4 - 2rq^3 + 2r^3q - r^4}{q+r} = q^3 - 3rq^2 + 3r^2q - r^3$, alſo $p^3 = (q-r)^3$, das iſt $(\mu^2-1)y^2 = (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{\mu^2\delta^2})^3$, mithin wie oben gefunden iſt $y = \pm\sqrt{\frac{(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{\mu^2\delta^2})^3}{\mu^2 - 1}}$.

Wegen der Zweydeutigkeit des Würzelzeichens hat alſo die Ordinate y allemahl zwey gleiche einander entgegen geſetzte Werthe, und die Brennlinie hat zwey gleiche und ähnliche Aeſte, die ſich von dem Punct p aus zu beyden Seiten der Axe der Abſciſſen ins unendliche fort erſtrecken. Ueberdem iſt es auch aus der Natur der Sache für ſich offenbar, daß die Brennlinie dieſe Geſtalt haben müſſe, weil man auf beyden Seiten der Axe gleiche Winkel APM nehmen kann, und einerley Winkel APM auf jeder Seite einerley Stelle des Puncts Q geben muß.

Umgekehrt iſt alſo auch x durch y vermittelſt folgender reinen quadratiſchen Gleichung gegeben $p = \frac{(2p^3 + q^3 - r^3)r}{2r^3 + q^3 - p^3}$. Daraus folgt $2r^3p + pq^3 - p^4 = 2rp^3 + rq^3 - r^4$, alſo $(p-r)q^3 = p^4 + 2rp^3 - 2r^3p + r^4$, und $q^3 = p^3 + 3rp^2 + 3r^2p + r^3 = (p+r)^3$, mithin $x^2 = (\sqrt[3]{(\mu^2 - 1)y^2} + \sqrt[3]{\mu^2 \delta^2})^3$. Es giebt alſo für jede gegebene Ordinate y ebenfals nur zwey gleich groſſe einander entgegen geſetzte Abſciſſen x, und daraus ergiebt ſich, daß auf beyden Seiten der Linie AB gleich groſſe von einander abgeſonderte einander ähnliche Stücke der Brennlinie liegen. Denn man kann auch AS $= y$, und SQ $= x$ als die Ordinate anſehen, ſo ergiebt die eben gefundene Gleichung, daß jeder Abſciſſe $y =$ AS zwey einander gleiche und entgegen geſetzte Ordinaten $x =$ SQ zugehören, wovon $x = \pm \mu\delta = \pm$ Ap die beyden kleinſten ſind, wenn y oder AS $= 0$ angenommen wird. Weil nemlich δ^2 einerley bleibt,

man

man mag δ poſitiv, oder negativ nehmen, ſo iſt die Gleichung einerley, der ſtrahlende Punct P mag auf der einen oder der andern Seite von AB in gleicher Entfernung AP befindlich ſeyn, wofern anders das Verhältniß der Refraction $\mu : 1$ einerley bleibt.

In dem Fall $\mu < 1$ laſſen ſich die für x und y gefundenen Gleichungen ſo ausdrücken:

$$x^2 = (\sqrt[3]{\mu^2 \delta^2} - \sqrt[3]{(1 - \mu^2)\, y^2})^3$$

$$y^2 = \frac{(\sqrt[3]{\mu^2 \delta^2} - \sqrt[3]{x^2})^3}{1 - \mu^2}.$$

Nun iſt x allemahl kleiner als $\mu\delta = Ap$, und eben dies iſt der gröſte Werth von x in dem Fall y oder AS $= 0$. In dem Fall $y^2 = \frac{\mu\delta}{\sqrt{(1 - \mu^2)}}$ verſchwindet nun $x =$ SQ, und wird für gröſſere y unmöglich. Umgekehrt muß $x < \mu\delta$ ſeyn für mögliche y, und für alle Werthe von x, die zwiſchen $+ \mu\delta$ und $- \mu\delta$ fallen, giebt es ein paar gleich groſſe einander entgegen geſetzte y. Demnach begränzt in dieſem Fall die Brennlinie einen beſtimmten Raum von allen Seiten, ſo wie ſie gegentheils in dem Fall $\mu > 1$ vier ins unendliche fortlaufende Aeſte hatte.

Eine völlig rationale Gleichung zwiſchen x und y giebt folgende Rechnung. Man brauche die Buchſtaben v und w ſtatt $p^3 = (\mu^2 - 1)\, y^2$ und $q^3 = x^2$, ſetze auch überdem $r^3 = \mu^2 \delta^2 = \alpha$, ſo iſt vermöge der erſten vorhin gefundenen Glei-

chung $2a + w - v = \frac{(a + v + 2w)\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{w}}$, und vermöge der zweyten $2a + w - v = \frac{(2v + w - a)\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{v}}$. Beyde Werthe gleich geſetzt, und dieſe gleichen Werthe cubirt, geben die rationale Gleichung $(a+v+2w)^3 v = (2v+w-a)^3 w$ welche ſich nach geſchehener Multiplication in folgende verwandelt:

$$v^4 + \left.\begin{matrix}3a \\ -2w\end{matrix}\right\} . v^3 + \left.\begin{matrix}3a^2 \\ +24aw \\ -6w^2\end{matrix}\right\} . v^2 + \left.\begin{matrix}a^3 \\ +24aw^2 \\ +2w^3\end{matrix}\right\} . v = (w-a)^3 . w$$

Setzt man nun ſtatt v und w die Werthe $(\mu^2 - 1) y^2$ und x^2, ſo ſteigt die Gleichung auf die achte Ordnung.

124. §.

Ein Lichtſtrahl, der aus einer dünnern durchſichtigen Maſſe in eine Dichtere übergeht, wird allemahl gebrochen, wenn er gegen die brechende Fläche in dem Einfallspunct unter einem ſchiefen Winkel geneigt iſt: nur der lothrechte Strahl geht ungebrochen durch. Je gröſſer der Neigungswinkel des einfallenden Strahls gegen das Einfallsloth, oder je kleiner ſeine Neigung gegen die brechende Fläche iſt, deſto gröſſer iſt die Brechung. In dem Fall, wenn der einfallende Strahl mit dem Einfallsloth einen rechten Winkel machte, oder ſeine Neigung gegen die brechende Fläche = 0 würde, wäre die Brechung am ſtärkſten: weil aber der Strahl nun die brechende Fläche eigentlich nicht

mehr

mehr trift, ſo erfolgt auch keine Brechung mehr; der Strahl dringt in die dichtere Maſſe gar nicht mehr hinein, könnte eine Brechung erfolgen, ſo wäre der Sinus des gebrochenen Winkels $= \frac{1}{\mu}$; und wenn für Luft und Glas $\frac{1}{\mu} = \frac{2}{3}$ iſt, ſo wäre der gröſte gebrochene Winkel, oder eigentlich die Gränze, die kein gebrochener Winkel übertreffen kann, $= 41° 48' 37''$.

Man nehme umgekehrt an, daß der Strahl aus der dichtern Maſſe in die dünnere falle, und das Verhältniß der Refraction ſey $= \mu : 1$, alſo $\mu < 1$, der Neigungswinkel ſey α, der gebrochene Winkel β; ſo iſt $\sin\beta = \frac{1}{\mu} \sin\alpha$, und $\sin\beta > \sin\alpha$. Es kann aber $\sin\beta$ nie gröſſer als 1 ſeyn: demnach wird der Strahl nur gebrochen, oder er kann nur aus der dichtern Maſſe in die dünnere dringen, ſo lange $\frac{1}{\mu} \sin\alpha$ nicht gröſſer als 1 iſt. Uebertrift $\frac{1}{\mu} \sin\alpha$ die Einheit, ſo wird der Strahl wieder zurück geworfen, nicht gebrochen.

Die Vorausſetzung $\frac{1}{\mu} \sin\alpha < 1$ erfordert, daß $\sin\alpha < \mu$ ſey: demnach muß der Sinus des Neigungswinkels kleiner ſeyn, als der Exponent des Verhältniſſes der Refraction, wenn der Strahl aus der dichtern Maſſe in die dünnere dringen ſoll. Wenn z. E. für Glaß und Luft $\mu = \frac{2}{3}$ iſt; ſo wird

erfordert, daß $\sin\alpha < \frac{2}{3}$ ſey, wenn der Strahl aus dem Glaſe in die Luft gehen ſoll: mithin muß α nicht über 41° 48′ 37″ betragen, oder der Neigungswinkel des Strahls gegen die brechende Fläche, muß nicht kleiner ſeyn, als 48° 11′ 23″.

Aus eben dieſem Grunde wird im 119 §. n. 2.

$$A\Pi = \mu\delta\sqrt{\left(1 - \frac{1-\mu^2}{\mu^2} \cdot \frac{z^2}{\delta^2}\right)}$$ unmöglich,

wenn $\frac{z}{\delta}$ oder $\tang\alpha > \frac{\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)}}$ iſt, oder $\cot\alpha < \frac{\sqrt{(1-\mu^2)}}{\mu}$, mithin wenn $\operatorname{coſec}\alpha < \frac{1}{\mu}$ und $\sin\alpha > \mu$ iſt.

125. §.

36 F. Wenn der Boden des Gefäſſes ABCD (115 §.) eine ebene Glaßtafel iſt, wovon die untere und obere Seitenfläche genau parallel ſind; wenn ferner dieſer Boden genau wagrecht geſtellet, und das Gefäß mit Waſſer gefüllt iſt, deſſen obere Fläche, ſobald es ruhig geworden, gleichfals den wagrechten Stand annimmt; ſo wird ein Lichtſtrahl, den man im finſtern Zimmer in das Gefäß fallen läßt, drey mahl gebrochen werden, fals anders das Gefäß ſo unterſtützt iſt, daß der Strahl durch den gläſernen Boden durchgehen kann, ohne daß ihm etwas undurchſichtiges im Wege iſt. Die erſte Brechung erfolgt oben in der Waſſerfläche, die zweyte unten, da wo Waſſer und Glaß an einander gränzen, die dritte in der untern Fläche des gläſernen Bodens, wo der Strahl wieder in die Luft

Luft gehet. Giebt man nun auf die Lage des oben einfallenden, und unten wieder in die Luft gehenden Strahls acht, ſo findet ſich allemahl, daß der eine dieſer Strahlen mit dem andern parallel ſey.

Wenn alſo in der 41 Fig. zwiſchen den dreyen ebenen und parallelen Flächen RS, TV, XY, in dem Raum β Waſſer in dem Raum γ Glaß, oben und unten in α aber Luft befindlich iſt, und auf RS ein Strahl AB fällt, der im Waſſer von B nach C, im Glaſe von C nach D, in der Luft wieder von D nach E geht; ſo iſt DE mit AB parallel. 41 F.

Man kann auch ſtatt des Waſſers andre durchſichtige flüßige Maſſen wählen, der Erfolg wird immer derſelbe ſeyn. Auch kann man den ins finſtere Zimmer fallenden Strahl mit einem ebenen Spiegel auffangen, der ihn aufwärts zurück wirft: wenn man nun das erwehnte Gefäß, die horizontale Lage des Bodens beybehalten, ſo ſtellt, daß der zurückgeworfene Strahl zuerſt von unten hinauf durch den gläſernen Boden, und ſo ferner durch das Waſſer oben wieder in die Luft geht; ſo iſt ebenfals der unten einfallende mit dem oben ausfahrenden Strahl parallel.

Vermöge dieſer und andrer ähnlicher Verſuche iſt man berechtiget anzunehmen, der ausfahrende Strahl *DE* ſey allemahl mit dem einfallenden *AB* parallel, wenn derſelbe aus der Luft durch zwo von der Luft und von einander ſelbſt verſchiedene durchſichtige Maſſen wieder in Luft von eben der Dichtigkeit fällt, die brechenden Flächen aber, welche die beyden durchſichtigen Maſſen von einander ſelbſt und von der Luft abſondern, eben

und mit einander parallel ſind. Ja, man hat keinen Grund zu glauben, daß der Erfolg anders ſeyn werde, wenn gleich die durchſichtige Maſſe, worin der einfallende Strahl AB liegt, und wohinein der zum dritten mahl gebrochene Strahl DE geht, nicht eben Luft, ſondern jede andre von den in den Räumen β und γ beſindlichen unterſchiedene Maſſe wäre.

126. §.

Wenn ein Lichtſtrahl nach und nach durch mehrere durchſichtige Maſſen geht, die insgeſamt durch ebene und parallele Flächen von einander abgeſondert ſind; ſo iſt das Verhältniß vom Sinus des erſten Neigungswinkels an der erſten brechenden Fläche zum Sinus des letzten gebrochenen Winkels an der letzten brechenden Fläche eben ſo groß, als es ſeyn würde, wenn der Strahl unmittelbar aus der erſten durchſichtigen Maſſe in die letzte fiele.

Auch iſt bey eben dieſer Vorausſetzung das Verhältniß der Refraction für die erſte und letzte Maſſe, wenn nemlich der Strahl unmittelbar aus der erſten in die letzte fiele, zuſammen geſetzt aus den Verhältniſſen der Refraction für jedes Paar dieſer Maſſen, wie ſie in der Ordnung von der erſten bis zur letzten folgen.

Beweis des 1. Satzes. Man nehme zuerſt nur drey nach einander folgende durchſichtige Maſſen α, β, γ, an, welche durch die parallelen
41 F. Ebenen RS, TV, von einander geſondert ſind. Der Lichtſtrahl nehme den Weg ABCD, und PQ,

pq,

pq, ſtellen die Einfallslothe in den Puncten B, C, vor. Eine dritte Ebene XY ſey mit den vorigen beyden parallel, worauf der Strahl in D fällt, ΠK ſey das Einfallsloth, und im Raum, wo K liegt, ſey wiederum eine durchſichtige Maſſe befindlich, die mit α von einerley Art iſt: ſo wird der Strahl ABCD bey D wieder in die Lage DE mit AB parallel gebrochen (125. §.) Dieſemnach iſt KDE = PBA der Einfallswinkel für den gebrochenen Winkel ΠDC = *q*CD, wenn der Strahl aus der Maſſe α unmittelbar in die Maſſe γ fällt.

Ferner nehme man an, daß ſo viele durchſichtige Maſſen, α, β, γ, δ, ε, ζ, η, wie man will durch ebene und parallele Flächen von einander abgeſondert ſind, ſo iſt in der dritten Maſſe *q*CD der gebrochene Winkel für den Einfallswinkel ABP, wenn der Strahl auch unmittelbar aus α in γ fiele. Alſo hat CD einerley Lage, es mag der Strahl AB erſt in BC in der Maſſe β gebrochen ſeyn, oder in der Lage *a*C ⋕ AB auffallen, wenn die Maſſe β mit α einerley iſt. Im letzten Fall aber wäre *r*DE vermöge des erwieſenen der gebrochene Winkel für den Einfallswinkel *p*C*a* = PBA: mithin iſt auch *r*DE der gebrochene Winkel für den Einfallswinkel ΠD*b* = PBA, wenn γ und β mit α von einerley Art wären, oder der Strahl unmittelbar aus α in δ fiele. Demnach iſt der Satz wahr, wenn der Strahl durch vier brechende Maſſen fällt. 42 F.

Eben ſo gilt der Schluß für jede angenommene Zahl der brechenden Maſſen auf die nächſtfolgende um eins gröſſere. Iſt der Satz wahr, wenn alle Maſſen von α bis ζ an einander gränzen, ſo iſt er auch wahr, wenn noch die Maſſe η hinzu kommt.

Denn vermöge der Vorausſetzung behält FG einerley Lage, es mag der Strahl den Weg ABCDEF nehmen, oder in der Lage YF ‡ AB, unter dem Neigungswinkel ZFY in der Maſſe α auffallen: mithin iſt VGH der gebrochene Winkel für den Einfallswinkel WGX = ZFY = PBA, wenn der Strahl unmittelbar aus der Maſſe α in η hinüber geht: und hiemit iſt die allgemeine Richtigkeit des Satzes ſelbſt bewieſen.

Beweis des 2. Satzes. Es ſey

ſin PBA : ſin QBC = $m : n$

ſin pCB : ſin qCD = $p : q$

ſin ΠDC : ſin rDE = $k : r$

ſin πED : ſin sEF = $s : v$

ſin ZFE : ſin tFG = $w : x$

ſin WGF : ſin VGH = $y : z$;

ſo iſt überdem wegen der parallelen Lage der brechenden Ebenen QBC = pCB, qCD = ΠDC, rDE = πED, sEF = ZFE, tFG = WGF; folglich das Verhällniß ſin PBA : ſin VGH aus allen übrigen zuſammen geſetzt.

Eben dies Verhältniß wäre zugleich das Verhältniß der Refraction, wenn der Strahl unmittelbar aus der Maſſe α in die Maſſe η fiele. (1 S.) Man kann alſo das Verhältniß der Refraction für zwey Maſſen finden, wenn das Verhältniß der Refraction für jede dieſer Maſſen und eine und eben dieſelbe dritte bekannt iſt. Hat man z. E. das Verhältniß der Refraction für Waſſer und Luft = 3 : 4 für Luft und Glaß = 3 : 2, ſo iſt für Waſſer und Glaß das Verhältniß der Refraction = 9 : 8.

Der

Der X. Abſchnitt.

Die Strahlenbrechung, wenn das Licht durch ein Prisma fällt.

127. §.

Zwiſchen zwoen Ebenen *EF* und *EG*, die einander in *EH* ſchneiden, befindet ſich eine dichtere durchſichtige Maſſe, als auſſerhalb derſelben, woſelbſt ich hier Kürze halber Luft annehmen will, und auf eine dieſer Ebenen *EF* fällt ein Lichtſtrahl *AB*, der in der Ebene des Neigungswinkels beyder Ebenen *EF* und *EG* liegt: man ſucht die Lage des zum zweyten mahl gebrochenen wieder in die Luft gehenden Strahls. 43 F.

Aufl. Es ſey PQ das Neigungsloth des in B einfallenden Strahls AB, und durch B ſey RE in der Ebene EF, ſo wie ES in der Ebene EG auf EH ſenkrecht, ſo iſt RES der Neigungswinkel beyder Ebenen gegen einander. In eben dieſer Ebene liegt das Neigungsloth PQ, weil beyde Ebenen QRE und RES auf EF ſenkrecht ſind, mithin zuſammen fallen; (313 §. G.) zugleich liegt AB, wie vorausgeſetzt wird, in der Ebene RES: demnach bleibt auch der gebrochene Strahl BC in derſelben Ebene, und wenn *pq* das Neigungsloth durch C iſt, ſo liegt zugleich *pq* aus der ſchon angeführ-

geführten Urſache in derſelben Ebene, mithin auch der zum zweyten mahl gebrochene Strahl CD. Nun ſey der Einfallswinkel PBA $= \alpha$, der gebrochene Winkel QBC $= \beta$, das Verhältniß der Refraction für die durchſichtige Maſſe $m : n$, ſo iſt $\sin\beta = \frac{n}{m}\sin\alpha$. Ferner ſey BEC $= \varepsilon$, der zweyte Einfallswinkel pCB $= \gamma$, der zweyte gebrochene Winkel qCD $= \delta$, ſo iſt $\sin\delta = \frac{m}{n}\sin\gamma$. (117. §.) Wenn ferner die beyden Einfallslothe einander in M ſchneiden, ſo hat man pMB + BMC $= 180^\circ = \varepsilon +$ BMC, alſo pMB $= \varepsilon$, und $\gamma = \varepsilon - \beta$, woraus $\sin\delta \; \frac{m}{n}\sin(\varepsilon - \beta) = \frac{m}{n}(\sin\varepsilon \cos\beta - \cos\varepsilon \sin\beta)$ gefunden wird. Braucht man in dieſer Gleichung den Werth $\sin\beta = \frac{n}{m}\sin\alpha$, und $\cos\beta = \sqrt{(1 - \frac{n^2}{m^2}\sin\alpha^2)}$ ſo erhält man $\sin\delta = \frac{m}{n}\sin\varepsilon \sqrt{(1 - \frac{n^2}{m^2}\sin\alpha^2)} - \cos\varepsilon \sin\alpha$.

Wenn beyde Ebene Flächen parallel ſind, ſo hat man $\varepsilon = 0$, alſo $\sin\varepsilon = 0$, $\cos\varepsilon = 1$, und $\sin\delta = -\sin\alpha$, oder der einfallende und ausfallende Strahl machen jeder mit ihren Einfalls-Loth einerley Winkel; weil nun beyde Einfallslothe in dem Fall $\varepsilon = 0$ parallel ſind, ſo iſt auch der ausfahrende Strahl mit dem einfallenden parallel, nur daß nicht beyde auf einerley Seite des zugehö-

rigen

rigen Einfallsloths liegen, wie dem 117. §. gemäß iſt, wo dieſen Fall die 36. Fig. vorſtellet.

128. §.

Der ausfahrende Strahl ſchneidet den einfallenden unter dem Winkel KND, und man hat KND $= NBC + NCB$. Ferner iſt $NBC = \alpha - \beta$, und $NCB = \delta - \gamma$, alſo $KND = \alpha + \delta - (\beta + \gamma)$; und weil $\beta + \gamma = pMB = \varepsilon$, ſo iſt $KND = \alpha + \delta - \varepsilon$. In dem Fall $\alpha = 0$, wenn der Strahl AB ſenkrecht auf die Fläche EF fällt, iſt zugleich $\beta = 0$, alſo hat man $\sin\delta = \frac{m}{n} \sin\varepsilon$. Mit α wächſt β, alſo nimmt δ ab, wenn α wächſt, weil $\sin\delta = \frac{m}{n} \sin(\varepsilon - \beta)$ war: wenn alſo α beſtändig um eben ſoviel zunähme, als δ abnimmt, ſo würde $\alpha + \delta$ eine beſtändige Gröſſe ſeyn, mithin auch der Winkel $KND = \alpha + \delta - \varepsilon$ keine Aenderungen leiden, wenn gleich α Aenderungen litte. Allein die Winkel α und δ hängen nicht ſo von einander ab, daß dieſe Vorausſetzung beſtehen kann, und der Winkel KND ändert ſich würklich mit α und δ. Um einigermaſſen zu überſehen, wie die Aenderungen des Winkels KND, den ich nun $= \zeta$ ſetzen will, von den Aenderungen des Winkels α abhängen, erwäge man folgendes.

Wenn der Strahl ſenkrecht auffällt, ſo iſt $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\sin\delta = \frac{m}{n} \sin\varepsilon$, und $\zeta = \delta - \varepsilon$. Ferner hat man allemahl $\sin\alpha = \frac{m}{n} \sin\beta$, $\sin\delta$

$= \frac{m}{n}$ ſin $(\varepsilon - \beta)$, alſo $d\alpha$ coſ$\alpha = \frac{m}{n}\, d\beta$ coſβ und $d\delta$ coſ$\delta = - \frac{m}{n}\, d\beta$ coſ$(\varepsilon - \beta)$, oder $d\alpha = \frac{m}{n} \cdot \frac{d\beta \,\text{coſ}\beta}{\text{coſ}\alpha}$, und $d\delta = - \frac{m}{n} \cdot \frac{d\beta \,\text{coſ}(\varepsilon - \beta)}{\text{coſ}\delta}$; die Gleichung $\zeta = \alpha + \delta - \varepsilon$ aber giebt $d\zeta = d\alpha + d\delta$: alſo hat man $d\zeta = \frac{m}{n}\, d\beta \left(\frac{\text{coſ}\beta}{\text{coſ}\alpha} - \frac{\text{coſ}(\varepsilon - \beta)}{\text{coſ}\delta}\right)$. Die Vorausſetzung $\alpha = 0$ giebt $d\zeta = \frac{m}{n}\, d\beta \left(1 - \frac{\text{coſ}\varepsilon}{\sqrt{(1 - (m^2 : n^2)\,\text{ſin}\varepsilon^2)}}\right)$. Weil nun $m > n$ iſt, ſo iſt $1 - \frac{m^2}{n^2}$ ſin$\varepsilon^2 < 1 -$ ſinε^2, oder coſ$\varepsilon > \sqrt{(1 - \frac{m^2}{n^2}\,\text{ſin}\varepsilon^2)}$, alſo $d\zeta$ negativ: das heiſt, wenn α von der Gränze $= 0$ zu wachſen anfängt, ſo nimmt ζ ab. Mit α wächſt auch β, und beyde Coſinus von α und β nehmen zugleich ab, jedoch wächſt α ſchneller als β, und coſα nimmt ſchneller ab, als coſβ, wie denn der Werth $\alpha = 90°$, den Werth coſ$\alpha = 0$, alſo $\frac{\text{coſ}\beta}{\text{coſ}\alpha} = \infty$ giebt. Mit α wächſt alſo $\frac{\text{coſ}\beta}{\text{coſ}\alpha}$ beſtändig, und hat alle mögliche poſitive Werthe bis ins unend-

unendliche fort. Mit α und β wächſt auch coſ $(\varepsilon - \beta)$ und $\cos\delta = \sqrt{(1 - \frac{m^2}{n^2} \sin(\varepsilon - \beta)^2)}$, aber coſ δ ſchneller, als coſ $(\varepsilon - \beta)$, mithin nimmt $\frac{\cos(\varepsilon - \beta)}{\cos\delta}$ ab, und dieſer Werth wird $= 1$, wenn $\beta = \varepsilon$ iſt. Weil nun $d\zeta = \frac{m}{n} d\beta$ $\left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} - \frac{\cos(\varepsilon - \beta)}{\cos\delta}\right)$ war, ſo nimmt der negative Werth von $d\zeta$ ab, wenn α von der o an wächſt, und die Aenderung, welche $d\zeta$ leidet, wird nach und nach geringer, ſo lange bis $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{\cos(\varepsilon - \beta)}{\cos\delta}$ wird, womit $d\zeta$ verſchwindet. Hiernächſt wird $d\zeta$ poſitiv, und ζ wächſt beſtändig mit α ſo lange bis $\alpha = 90°$ wird: gröſſere Werthe für α aber kommen hier nicht vor.

129. §.

Zu finden, wie groß α ſeyn müſſe, damit ζ am kleinſten ausfalle.

Aufl. Weil anfangs ζ abnimmt, wenn α wächſt, hiernächſt aber ζ wieder zunimmt, ſo giebt es einen kleinſten Werth von ζ, und das iſt derjenige, dem der Werth $d\zeta = 0$ zugehört, welches die Gleichung $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{\cos(\varepsilon - \beta)}{\cos\delta}$ giebt.

Weil

Weil nun $\sin\alpha = \frac{m}{n}\sin\beta$, und $\sin\delta = \frac{m}{n}$ $\sin(\varepsilon - \beta)$, ſo erfordert die angenommene Bedingung, daß $\frac{\cos\beta}{\sqrt{(1 - (m^2 : n^2)\sin\beta^2}} = \frac{\cos(\varepsilon - \beta)}{\sqrt{(1 - (m^2 \cdot n^2)\sin(\varepsilon - \beta)^2)}}$ ſey, und dieſer Gleichung geſchicht ein Genüge, wenn $\varepsilon = 2\beta$, oder $\beta = \frac{1}{2}\varepsilon$ geſetzt wird. Demnach iſt ζ am kleinſten, wenn $\beta = \frac{1}{2}\varepsilon$, oder $\sin x = \frac{m}{n}\sin\frac{1}{2}\varepsilon$ iſt, folglich $\alpha = \mathrm{Arc.\,sin.}\,\frac{m}{n}\sin\frac{1}{2}\varepsilon$.

Weil in eben dieſem Fall $\sin\delta = \frac{m}{n}\sin\beta$ wird, ſo hat man zugleich $\alpha = \delta$, oder der einfallende und ausfahrende Strahl machen jeder mit ſeinem Neigungsloth einerley Winkel.

130. §.

Wenn man beyde Ebenen EF und EG mit ei-
43 F. ner dritten RFGS ſchneidet, die mit der Durchſchnittslinie EH der vorigen parallel liegt; ſo ſchlieſſen alle drey zuſammen einen dreyſeitigen priſmatiſchen Raum ein, und die Ebene der Brechung RES iſt auf den Seitenlinien und Seitenflächen dieſes Priſma ſenkrecht. Läßt man alſo aus Glaß oder einer andern durchſichtigen Maſſe ein dreyſeitiges Priſma verfertigen, ſo dient daſſelbe, für diejenige durchſichtige Maſſe, woraus das Priſma gemacht iſt, das Verhältniß der Refraction

zu

zu finden, vorausgeſetzt, daß man den Neigungswinkel α, für den einfallenden Strahl, und eben ſo den Neigungswinkel δ für den ausfahrenden Strahl meſſen könne.

Die Gleichung $\sin\delta = \frac{m}{n} \sin\varepsilon \sqrt{(1 - \frac{m^2}{n^2} \sin\alpha^2)} - \cos\varepsilon \sin\alpha$ giebt nemlich $(\sin\delta + \cos\varepsilon \sin\alpha)^2 = \frac{m^2}{n^2} \sin\varepsilon^2 - \sin\varepsilon^2 \sin\alpha^2$, und daraus findet man

$$\frac{m}{n} = \sqrt{((\sin\delta \operatorname{cosec}\varepsilon + \sin\alpha \cot\varepsilon)^2 + \sin\alpha^2)}.$$

Weil die Geſtalt des Priſma bekannt ſeyn muß, ſo iſt auch ε ein bekannter Winkel, und ſo iſt $\frac{m}{n}$ durch die drey bekannten Winkel α, δ, ε, gegeben. Der Winkel ε heiſt gewöhnlich **der brechende Winkel des Priſma**.

Bringt man das Priſma in die Lage, daß $\delta = \alpha$ wird, welches vermöge des 128. §. allemahl möglich iſt; ſo hat man $\frac{m}{n} = \sin\alpha \sqrt{(1 + (\operatorname{cosec}\varepsilon + \cot\varepsilon)^2)} = \sin\alpha \sqrt{(1 + \cot \tfrac{1}{2}\varepsilon^2)}$ (458. §. Geom.) $= \sin\alpha \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}\varepsilon$, oder $\frac{m}{n} = \frac{\sin\alpha}{\sin \frac{1}{2}\varepsilon}$, welches mit dem 129. §. übereinkommt.

Wenn ER = ES, oder das Priſma gleichſchenklicht iſt; ſo hat man ERS $= 90^\circ - \tfrac{1}{2}\varepsilon$, und EBC $= 90^\circ - \beta$. In der angenommenen Lage des Priſma aber iſt $\beta = \tfrac{1}{2}\varepsilon$, alſo EBC = ERS, folglich BC mit RS parallel: oder derjenige

Theil des gebrochenen Strahls, welcher im Priſma ſelbſt liegt, iſt mit RS parallel.

131. §.

43 F. Nach Anleitung des 128. und 129. §. alſo läßt ſich der Verſuch am bequemſten ſo anſtellen. In ein verfinſtertes Zimmer laſſe man durch eine kleine Oefnung den Sonnenſtrahl AB fallen, und befeſtige das Priſma in horizontaler Lage, ſo nemlich, daß die Seitenlinien horizontal liegen: wenn alsdenn dieſe Seitenlinien zugleich auf der verticalen Ebene durch den Sonnenſtrahl ſenkrecht ſind, ſo iſt dieſe Verticalfläche zugleich die Ebene der Brechung für den Strahl AB. Damit man nun den Einfallswinkel ABP $= \alpha$ beliebig verändern kann, wird das Priſma an beyden Enden, da wo es ſeine Grundflächen hätte, mit einem Paar cylindriſcher Zapfen verſehen, deren gemeinſchaftliche Axe mit den Seitenlinien des Priſma parallel iſt. Dieſe Zapfen werden alsdenn ſo unterſtützt, daß man das ganze Priſma um ſeine horizontalliegende Axe umdrehen kann.

Geſetzt nun das Priſma liegt anfangs ſo, daß der Strahl AB auf die Seitenfläche EF ſenkrecht fällt; und man drehet es um ſeine Axe ſo, daß der Winkel RBA kleiner wird, ſo wird zugleich der Winkel KND kleiner, und weil AB einerley Lage behält, ſo ſenkt ſich der ausfahrende Strahl CD gegen den Horizont: und dies ſolange, bis α $= \text{Arc.} \sin \frac{m}{n} \cdot \sin \tfrac{1}{2}$ wird. Trift alſo der Strahl CD eine gegen überſtehende Wand ſo wird

wird das auf dieſelbe projicirte Sonnenlicht bis dahin herab ſinken. Wird hiernächſt das Prisma noch weiter auf eben die Art gedrehet, ſo wächſt der Winkel KND, und das auf die gegen überſtehende Wand fallende Sonnenlicht hebt ſich wieder. Demnach läßt ſich durch Verſuche, mittelſt allmähliger Umdrehung des Prismen, leicht die Lage deſſelben finden, die es haben muß, damit der Winkel KND $= \zeta$ am kleinſten, und zugleich der Winkel $\delta = \alpha$ werde. Man drehet nemlich das Prisma ſo lange, bis das auf die gegenüber ſtehende Wand fallende Licht zu ſinken aufhört, und bey weiterer Umdrehung wieder ſteigen würde: in der ſo gefundenen Lage muß man es befeſtigen.

132. §.

Bey dem allen würde es nun doch noch ſeine Schwierigkeit haben, den Neigungswinkel des einfallenden Strahls gegen die Seitenfläche EF des Prisma, oder ſeine Ergänzung α zu 90°, genau genug zu meſſen; deswegen kann man ſich des folgenden Hülfsmittels bedienen. Man ziehe BV, 44 F.
CW, in der Ebene RES horizontal, und durch E in derſelben Ebene die Horizontallinie YZ, ſo iſt $VBP + BEY = 90°$, und $WCq + CEZ = 90°$, folglich $VBP + WCq = 180° - (BEY + CEZ) = BEC$, oder $VBP + WCq = \varepsilon$. Weiter ſey $VBA = \eta$, $WCD = \vartheta$, ſo iſt VBA die Höhe der Sonne über dem Horizont, und WCD die Neigung des ausfahrenden Strahls gegen den Horizont: man hat aber $VBP + \eta = \alpha$, und $WCq + \vartheta = \delta$, mithin $\alpha + \delta = VBP + WCq + \eta + \vartheta$, oder $\alpha + \delta = \eta + \vartheta + \varepsilon$. Dieſemnach

 hat

hat man in dem Fall, wenn $\alpha = \vartheta$ iſt, $2\alpha = \eta + \vartheta + \varepsilon$, oder $\alpha = \frac{1}{2}(\eta + \vartheta + \varepsilon)$, kann alſo nur für den Augenblick der Beobachtung die Höhe der Sonne und zugleich der Neigungswinkel ϑ gemeſſen werden, ſo hat man zugleich den Winkel α.

Dieſe Vorausſetzung $\alpha = \delta$ erfordert, daß $\beta = QBC = \frac{1}{2}\varepsilon$ ſey. (129. §.) Wenn demnach in eben dieſem Fall der zum erſtenmahl gebrochene Strahl BC horizontal iſt, ſo hat man zugleich $VBP = \frac{1}{2}\varepsilon$, weil der Vorausſetzung gemäß BC mit BV in grader Linie liegt. Es war aber $VBP + WCq = \varepsilon$, alſo nunmehro auch $WCq = \frac{1}{2}\varepsilon$, ſo wie $\alpha = \eta + \frac{1}{2}\varepsilon$, und $\delta = \vartheta + \frac{1}{2}\varepsilon$. Ueberdem iſt $\alpha = \delta$, alſo $\eta = \vartheta$, oder VBA = WCD. Demnach iſt es in dieſem beſondern Fall nur nöthig, daß man die Höhe der Sonne meſſe, weil der zum zweytenmahl gebrochene Strahl CD nun gegen den Horizont eben die Neigung hat, wie der einfallende Strahl AB.

Hätte man umgekehrt $\eta = \vartheta$ gefunden, ſo gäbe dies $\alpha = \eta + \frac{1}{2}\varepsilon = \eta + VBP$, alſo $VBP = \frac{1}{2}\varepsilon = CBQ$, mithin müſte BC mit BV in grader Linie liegen, oder BC wäre horizontal. Weil übrigens allemahl $\alpha = \text{Arc} . \sin \frac{m}{n} \sin\beta$ iſt, ſo hat man in dem jetzt betrachteten beſondern Fall $\alpha = \text{Arc} . \sin . \frac{m}{n} \sin \frac{1}{2}\varepsilon$, und $\eta = \text{Arc} . \sin \frac{m}{n} \sin \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon$. So groß muß die Sonnenhöhe ſeyn, wenn der zum erſtenmahl gebrochene Strahl horizontal liegen ſoll.

Weil

Weil man auch die Neigungswinkel REY, SEZ, der Seitenflächen des Prisma gegen den Horizont meſſen kann, ſo dienen dieſe ebenfals α zu finden, wenn nur die Höhe der Sonne gemeſſen iſt. Setzt man REY $= \lambda$, ſo hat man $\alpha - \eta + \lambda = 90$, alſo $\alpha = 90^\circ + \eta - \lambda$ aus η und λ. Kann man die Neigung der Seitenfläche RS gegen den Horizont meſſen, die ich $= \omega$ ſetzen will, ſo iſt $\lambda = \omega + 90^\circ - \frac{1}{2}\varepsilon$.

133. §.

Noch iſt bey dieſer Art von Verſuchen zu bemerken, daß der bisher mit ε bezeichnete Winkel des Prisma nicht jede willkührliche Gröſſe haben könne, wenn das Licht bey jedem Neigungswinkel PBA $= \alpha$ durch beyde Flächen EF und EG des Prisma durchgehen ſoll. Man gehe nemlich auf den 124. §. zurück, und erinnnere ſich, daß hier BCp $= \gamma$ der Neigungswinkel für die Fläche EG des Prisma ſey, ſo wie qCD $= \delta$ der gebrochene Winkel iſt. Damit nun der Strahl nach CD durchgehen könne, muß $\sin\delta$ nicht gröſſer als 1 43 F.

mithin $\frac{m}{n}\sin\gamma$ nicht gröſſer als 1 ſeyn, und $\sin\gamma$ nicht gröſſer als $\frac{n}{m}$, mithin beym gläſernen Prisma $\sin\gamma$ nicht gröſſer, als $\frac{2}{3}$, und γ nicht gröſſer als $41^\circ\ 48'$: alſo muß $\varepsilon - \beta < 41^\circ\ 48'$ und $\varepsilon < \beta + (41^\circ\ 48')$ ſeyn. Der kleinſte Werth von β iſt 0°, alſo muß $\varepsilon < 41^\circ\ 48'$ ſeyn, wenn das Licht bey jedem Einfallswinkel PBA $= \alpha$ durch das Prisma durchgehen ſoll. Wenn $\varepsilon = 90^\circ$

 wäre,

wäre, ſo könnte der Strahl AB nie durchgehen, weil α nicht über 90° und β nicht über 41° 48′ betragen kann.

Alle bey Betrachtung des Prisma bisher erwieſene Formuln ſind in der Vorausſetzung richtig, daß der Neigungswinkel α auf der Seite des Perpendiculs BP liege, wo der dickere Theil des Prisma liegt. In dem Fall, wenn der einfallende Strahl, mithin der Winkel α, auf der andern Seite liegt, und BA ſich gegen den dünnern Theil vom Prisma neigt, muß α mithin auch β negativ angenommen werden, und alsdenn erfordert die eben erwehnte Vorausſetzung, daß $\varepsilon < (41° 48') - \beta$ ſey, widrigenfals wird das Licht nicht nach CD durchgehen. Weil aber β bis zu 41° 48′ wächſt, wenn α bis zum rechten Winkel anwächſt; ſo müſte $\varepsilon = 0$ ſeyn, wenn der Strahl bei jedem Neigungswinkel α durchgehen ſollte; das heiſt, die Seitenflächen EF, EG des Prisma müſten parallel ſeyn. Dieſemnach geht das Licht nur ſo lange durch, als $\beta < (41° 48') - \varepsilon$ iſt, und

$$\sin\alpha < \frac{m}{n} \sin((41° 48') - \varepsilon).$$

134. §.

Wenn auf die Seitenfläche EF des durchſichtigen Prisma ein Lichtſtrahl fällt, der aus mehrern einfachen parallelen Strahlen zuſammen geſetzt iſt; ſo werden auch die ausfahrenden Strahlen insgeſammt parallel ſeyn, wofern man vorausſetzen kann, daß alle Strahlen nach einerley Geſetz gebrochen werden, aber das Verhältniß der Refraction für alle einerley ſey. Denn bey dieſer Voraus-

ausſetzung iſt in der 44 Fig. der Winkel KND $= \zeta$ (128. §.) für alle einerley. Wofern aber mehrere 44 F.
auf die Seitenfläche EF des Prisma fallende Strahlen AB, Ab, eine ſolche Lage gegen einander haben, als kämen ſie von einerley Punct A her; ſo werden auch die zum zweyten mahl gebrochenen Strahlen CD, cd, eine ſolche Lage gegen einander haben, als kämen ſie von einerley Punct a her. Es ſey PQ das Einfallsloth für den Strahl AB, 45 F.
und $\Pi\Lambda$ für den Strahl Ab, man ſetze PBA $= \alpha$; ſo iſt $\Pi b\mathrm{A} = \alpha + \mathrm{BA}b$. Denn es iſt $\mathrm{E}b\mathrm{A} = \mathrm{EBA} + \mathrm{BA}b$, alſo $\mathrm{E}b\mathrm{A} - 90° = \mathrm{EBA} - 90° + \mathrm{BA}b$, d. i. $\Pi b\mathrm{A} = \mathrm{PBA} + \mathrm{BA}b = \alpha + \Delta\alpha$, wenn $\mathrm{BA}b = \Delta\alpha$ geſetzt wird. Es ſey ferner bey der zweyten Brechung pq das Einfallsloth für den Strahl ABC und $\pi\lambda$ für den Strahl Abc, ſo iſt $q\mathrm{CD} = \delta$ (127. §.), und die Gleichung

$$\sin\delta = \frac{m}{n} \sin\left(\varepsilon - \mathrm{A}\,.\,\sin\,.\,\frac{n}{m}\sin\alpha\right) \text{ ergiebt,}$$

daß δ abnehme, wenn α wächſt. Man ſetze alſo, δ nehme um die Differenz $\Delta\delta$ ab, wenn α um die Differenz $\Delta\alpha$ wächſt, ſo iſt $\lambda cd = \delta - \Delta\delta$, und $\lambda cd < q\mathrm{CD}$; woraus ſchon folgt, das CD, cd, rückwärts nach C, c, zu verlängert irgendwo in a zuſammen ſtoſſen. Nun erhellet, wie vorhin, daß $p\mathrm{C}a = \pi\mathrm{C}a + \mathrm{C}ac$ ſey, oder $q\mathrm{CD} = \lambda cd + \mathrm{C}ac$; es iſt aber $q\mathrm{CD} = \delta$, $\lambda cd = \delta - \Delta\delta$, alſo folgt, es ſey $\mathrm{C}ac = \Delta\delta$.

135. §.

Es iſt der Winkel BAb gegeben, den ein Paar einfallende Strahlen mit einander ein-

ſchlieſſen: man ſoll den Winkel *Cac* finden, unter welchem die zum zweytenmahl gebrochenen Strahlen einander ſchneiden.

Aufl. Wenn man dem 127. und 134. §. gemäß PBA $= \alpha$, BA*b* $= \Delta\alpha$, *q*CD $= \delta$, *Cac* $= \Delta\delta$ ſetzt; ſo hat man

$$\sin\delta = \frac{m}{n} \sin\varepsilon \surd \left(1 - \frac{n^2}{m^2} \sin\alpha^2\right) - \cos\varepsilon \sin\alpha;$$

(127. §.) und wenn in dieſer Gleichung $\alpha + \Delta\alpha$ ſtatt α geſetzt wird, ſo findet man

$$\sin(\delta + \Delta\delta) = \frac{m}{n} \sin\varepsilon \surd \left(1 - \frac{n^2}{m^2} \sin(\alpha + \Delta\alpha)^2\right)$$

$- \cos\varepsilon \sin(\alpha + \Delta\alpha)$. Aus dieſer Gleichung giebt ſich $\delta + \Delta\delta$ vermöge der trigonometriſchen Tafeln, aus der erſtern aber δ. Wird alſo ein Winkel von andern abgezogen, ſo hat man $\Delta\delta$.

Wenn $\Delta\alpha$ ſehr klein iſt, ſo läßt ſich $\Delta\delta$ beynahe vermittelſt der Differentialrechnung finden, und man hat $d\delta = -\frac{m}{n} \cdot \frac{d\beta \cos(\varepsilon - \beta)}{\cos\delta}$ (128. §.) woſelbſt $\beta = A.\sin \frac{n}{m} \sin\alpha$ iſt.

Eben daſelbſt war $d\alpha = \frac{m}{n} \cdot \frac{d\beta \cos\beta}{\cos\alpha}$; hat alſo der Strahl AB die Lage, welche erfordert wird, damit $\beta = \frac{1}{2}\varepsilon$ werde, oder iſt $\alpha = A.\sin \frac{n}{m} \sin \frac{1}{2}\varepsilon$, ſo iſt zugleich $\alpha = \delta$, und $d\delta = -d\alpha$, oder BA*b*, *Cac*, ſind beynahe gleich groß.

136. §.

Es ſtelle VW die Wand eines verfinſterten Zimmers vor, wohin ſonſt kein Licht, ohne nur durch eine kleine kreisförmige Oefnung *xy* fallen kann. 45 F. Durch dieſe falle ein Sonnenſtrahl B*xyb* hinein, und man ſtelle ſich vor, der Strahl *x*B komme vom untern Rande, *yb* aber von obern Rande der Sonne S; ſo iſt alles durch die Oefnung fallende Sonnenlicht in dem Raum des Kegels BA*b* enthalten, (75. §. Optick) und wenn man den Strahl B*xyb* mit einer Ebene ſenkrecht auffängt, ſo projicirt er ſich in ein Kreisförmiges Sonnenbild, das auf der gegen überſtehenden Wand, wenn der Strahl dieſe noch erreichte, oder auf dem Fusboden des Zimmers elliptiſch ausfallen würde.

Man fange den Strahl B*xyb* mit dem gläſernen, oder ſonſt aus einer durchſichtigen Maſſe verfertigten Prisma RES auf, und zwar in der Lage, welche erfordert wird, damit das Bild, welches der gebrochene Strahl DC*cd* auf die gegenüberſtehende Wand wirft, die niedrigſte Stelle einnehme. **Wofern nun alles Licht, woraus der Strahl B*xyb* zuſammen geſetzt iſt, nach einerley Geſetz gebrochen wird, ſo muß das Bild der Sonne auf der Wand, kreisförmig oder elliptiſch erſcheinen, nachdem der Strahl DC*cd* ſenkrecht, oder ſchief auffält.**

137. §.

Wenn man dieſen Verſuch anſtellet, ſo fällt derſelbe ganz anders aus, als er der angenommenen Vorausſetzung gemäß ausfallen müſte. **Newton**, der aus dieſem und mehren andern hieher ge-

hörigen Verſuchen zuerſt ganz neue für die optiſchen Wiſſenſchaften ſehr wichtige Entdeckungen hergeleitet hat, beſchreibt den Erfolg ſo.

In einem verfinſterten Zimmer ſtellte ich an ein rundes Loch, das etwa $\frac{1}{3}$ Zoll breit war, und ſich im Fenſterladen befand, ein gläſern Priſma, wodurch ein Sonnenſtrahl, der durch das Loch hinein kam, aufwärts nach der gegen überſtehenden Wand des Zimmers gebrochen wurde. Die Seitenlinien des Prisma waren in dieſem und andern ähnlichen Verſuchen auf der Verticalfläche durch den Sonnenſtrahl ſenkrecht, und um die mit den Seitenlinien parallele Axe drehete ich das Prisma langſam, und ſahe das gebrochene Licht oder das Sonnenbild an der Wand erſt niederwärts gehen, dann wieder ſteigen. Zwiſchen dem niederwärts gehen und aufſteigen, wo das Bild eine Zeitlang ſtille zu ſtehen ſchiene, hielt ich das Prisma ſtille, und befeſtigte es in dieſer Lage. Alsdenn ließ ich das gebrochene Licht ſenkrecht auf ein Bladt weiſſes Papier fallen, und bemerkte folgende Geſtalt und Abmeſſungen des Bildes. Es war lang und nicht eyförmig, ſondern mit zwoen gradlinichten parallelen Seiten von oben nach unten begränzt, am obern und untern Ende aber von zweenen Halbkreiſen. An den graden Seiten war es ſehr deutlich abgeſchnitten, aber an den kreisförmigen Enden ſehr verwirrt und undeutlich, das Licht nahm daſelbſt nach und nach ab, und verlohr ſich unmerklich. In der Entfernung 18$\frac{1}{2}$ Fuß vom Prisma war die Breite des Bildes etwa 2$\frac{1}{8}$ Zoll, die Länge aber 10$\frac{1}{4}$ Zoll, die Länge ſeiner graden Seiten etwa 8 Zoll, der brechende Winkel des Prisma

ma 64 Grad. Ein kleinerer Winkel gab ein kürzeres Bild, die Breite aber blieb unverändert. Ferner bemerkte ich, daß die Strahlen in graden Linien vom Prisma nach dem Bilde giengen, und alſo beym Ausfahren aus dem Prisma die Neigung gegen einander ſchon hatten, auf welche die Länge des Bildes ankam. Das Bild war gefärbt, und die kenntlichſten Farben lagen in dieſer Ordnung von unten nach oben: Roth, Orange, Gelb, Grün, Blau, Indigo, Violet, mit allen ihren dazwiſchen fallenden Schattirungen in einer beſtändigen Folge.

Daß dergleichen Farben erſcheinen, wenn das Licht der Sonne durch ein Prisma, oder auch ſonſt durch ein eckigtes Stück Glas fällt, iſt zwar ein Erfolg, der lange vor Newton war beobachtet, und deſſen Erklärung von mehrern ſeiner Vorgänger war verſucht worden: allein vor Newton hatte niemand bey dem ſchon erzählten und den übrigen hieher gehörigen Verſuchen, wovon bald mehrere werden angeführt werden, ſo viel Aufmerkſamkeit und Scharfſinn angewandt, als dieſer groſſe Mathematiker, der, wie bey ſeinen übrigen Entdeckungen, alſo auch bey den optiſchen, von der Mathematik den vortreflichſten Gebrauch zu machen wuſte. Sein von der Optick geſchriebenes Werk iſt zum erſtenmahl unter dem Titel: Opticks or a Treatiſe of the Reflexions, Refractions, Inflexions and coleurs of Light, zu London im Jahr 1704 durch den Druck bekannt gemacht, auch im Jahr 1706 vom Herrn Samuel Clarke eine lateiniſche Ueberſetzung davon mit Bewilligung des Verfaſſers herausgegeben worden. Im Jahr 1717 ward

ward vom engliſchen Original, und 1719 von der lateiniſchen Ueberſetzung eine zweyte Auflage veranſtaltet: auch hat man eine franzöſiſche Ueberſetzung nach der zweyten engliſchen Ausgabe durch H. Coſte, Amſterdam 1720. Auſſer dieſer franzöſiſchen Ueberſetzung führt Montucla (Hiſtoire des Mathem. T. II. pag. 314.) eine andre Pariſer vom Jahr 1722 an. Einen Auszug aus den Nachrichten, welche Newton ſelbſt von ſeinen Verſuchen gegeben hat, findet man in dem vom Herrn Kaeſtner überſetzten und zugleich in den analytiſchen Vortrag umgeänderten Lehrbegrif der Optick des Herrn Roberth Schmith 1. Buch 6 Cap. 61 u. f. S. Auch vergleiche man hiemit Prieſtleys Geſchichte und gegenwärtigen Zuſtand der Optick vom Herrn Klügel überſetzt, die 5te Periode 183 u. f. S.

Der XI. Abſchnitt.

Die verſchiedene Brechbarkeit des ungleichartigen und verſchiedene Farben zu wege bringenden Lichts.

138. §.

Der Erfolg bey dem im vor. §. beſchriebenen Verſuch läßt ſich am beſten erklären, wenn man mit Herrn Newton annimmt: das Sonnenlicht

licht beſtehe aus einer Vermiſchung verſchiedener in Abſicht auf die Brechbarkeit ungleichartiger Strahlen, von denen bey einerley Neigungswinkel einige mehr als andre gebrochen werden, die alſo brechbarer heiſſen können. Das Licht, deſſen Strahlen alle gleichviel gebrochen werden, heiſt einfaches, gleichartiges Licht, dasjenige aber, was aus Strahlen beſtehet, davon einige mehr, andre weniger gebrochen werden, zuſammengeſeztes, ungleichartiges Licht. Man behauptet eben nicht, wenn man dieſe Eintheilung macht, daß das ſo genannte einfache Licht in aller Abſicht vollkommen einförmig und gleichartig ſey; jedoch ſind die Strahlen, welche gleich viel gebrochen werden, in allen den Umſtänden, die in den optiſchen Wiſſenſchaften betrachtet werden, einander ähnlich.

Die Farben des einfachen Lichts heiſſen Grundfarben, einfache, gleichartige Farben, die übrigen aber ungleichartige und zuſammengeſezte. Das einfache Licht, welches roth ausſiehet, oder vielmehr, welches verurſacht, daß uns die Sachen, welche es erleuchtet, die rothe Farbe zu haben ſcheinen, heiſt **rothes Licht**, und in eben der Bedeutung braucht man die Ausdrücke: **gelbes Licht**, **grünes Licht**, **blaues Licht**, **violettes Licht**, u. ſ. f. nicht eben, als wenn man vorausſetzte, die Strahlen ſelbſt hätten dieſe Farben, ſondern weil ſie den Sachen, welche ſie erleuchten, dieſe Farben zu geben ſcheinen. M. ſ. Traité d' Optique ſur les reflexions etc. par M. le Chev. Newton, trad. de l' Anglois par M. Coſte Tom. I. Liv. I. Part. II. Definit. I. pag. 161.

139. §.

46 F. Es ſey nun AB*b* ein Lichtſtrahl, der aus zwoen verſchiedentlich brechbaren Lichtarten beſtehet, ſo werden beyde Lichtarten ſowohl beym hinein dringen in das Prisma RES, als auch nochmehr, wenn ſie aus dem Prisma wieder in die Luft fahren, durch die Brechung von einander getrennt werden. Das weniger brechbare Licht wird im Prisma den Weg BC*cb*, auſſer demſelben den Weg CD*dc* nehmen: was aber ſtärker brechbar iſt, nimmt nach der erſten Brechung den Weg B*bf*F, nach der zweyten den Weg F*fg*G. Fängt man nun die beyden ausfahrenden Strahlenkegel mit einer weiſſen Ebene XY ſenkrecht auf, ſo muß ſich jeder derſelben in einen Kreis D*d*, G*g*, projiciren, und es wird auf die Gröſſe der Winkel CBF, *cbf*, als die Differenz der gebrochenen Winkel, ankommen, wie weit XY vom Prisma entfernt ſeyn muß, damit die beyden Kreiſe D*d*, G*g*, einander nicht mehr ſchneiden, ſondern völlig von einander geſondert erſcheinen. Iſt XY würklich ſoweit entfernt, ſo wird jeder von beyden Kreiſen ſeine eigene Grundfarbe haben; ſchneiden aber beyde Kreiſe einander noch, ſo wird die Farbe des Bildes in der Stelle, die zu beyden Kreiſen gehört gemiſcht und von jeder, der beyden Grundfarben verſchieden ſeyn.

140. §.

Nimmt man an, das Sonnenlicht beſtehe aus ſiebenerley Arten von einfachen oder gleichartigen Licht, wovon jedes ſeine eigene von den übrigen verſchiedene Brechbarkeit und Grundfarbe hat; ſo

iſt begreiflich, wie das lange priſmatiſche Sonnenbild KL entſtehen kann. Man nehme bis auf weitere Prüfung an, es beſtehe dies Sonnenbild aus ſieben Kreiſen, deren Mittelpuncte in grader Linie liegen: jeder dieſe Kreiſe habe ſeine eigene Grundfarbe, und zwar, von unten nach oben, die rothe, orange, gelbe, grüne, blaue, indigo, und violette Farbe. Wenn nun jeder dieſer Kreiſe den folgenden ſchneidet, ſo könnten wohl daher in den Stellen *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, wo die Kreiſe einander ſchneiden, die vermiſchten Farben und Schattirungen entſtehen, nur vornemlich zunächſt bey den Mittelpuncten würden die Grundfarben erſcheinen. 47 F.

Daß man Grund hat, dieſe ſieben Arten des Sonnenlichts als einfache Arten zu betrachten, wird aus folgendem Verſuch erhellen. **Newton** machte im Mittel eines ſchwarzen Papiers ein rundes Loch, etwa $\frac{1}{5}$ oder $\frac{1}{6}$ Zoll im Durchmeſſer, darauf ließ er das priſmatiſche Sonnenbild fallen, und zwar ſo, daß etwas von dem gefärbten Licht durch das Loch durchgieng. Dieſen durchgelaſſenen Theil des Lichts brach er mit einem Priſma, und ließ das gebrochene Licht ſenkrecht auf ein weiſſes Papier fallen; nun war die Erſcheinung, welche das von neuen gebrochene Licht auf dem Papier darſtellete, nicht länglicht, wie beym Verſuch, ſo wie er im 137. §. beſchrieben worden, ſondern rund, auch ward die Farbe dieſes Lichts durch die neue Brechung nicht weiter geändert.

Mit etwas veränderter Einrichtung ward der Verſuch auch ſo angeſtellet. Gleich hinter das Priſma, welches das noch ungebrochene Sonnenlicht auffieng, ſtellte **Newton** ein Bret mit einem

nem Loch, etwa $\frac{1}{3}$ Zoll weit, dadurch nur ein Theil des vermittelſt des Prisma gebrochenen ſchon gefärbten Lichts durchgieng. Etwa 12 Fuß hinter dieſem Brett befand ſich ein andres ebenfals durchlöchertes, das von den Strahlen, welche das erſte Brett durchließſe, wiederum den mittlern Theil durchgehen ließ. Hinter dieſem zweyten Brett befand ſich wieder ein Prisma, das die durchgelaſſenen Strahlen von neuen brach. Nun drehete Newton das erſte Prisma nach und nach um ſeine Axe, damit eine Farbe nach der andern durch die Löcher der Bretter durchgieng und auf das zweyte Prisma fiel. Er bemerkte an welchen Ort der Wand jede Farbe von dieſem zweyten Prisma geworfen wurde, und fand, daß das Licht, welches im erſten Prisma am meiſten gebrochen wurde, wie das blaue und violette, auch im zweyten am meiſten aus ſeinem Wege gebracht wurde, das rothe aber in beyden die geringſte Veränderung erlitte. Das blaue Licht fiel auf eine höher liegende Stelle der gegen über ſtehenden Wand, als das grüne, dies wiederum an einer höhern Stelle, als das gelbe, u. ſ. f. Das zweyte Prisma behielte ſeine Stellung unverändert, und die Löcher in beyden Brettern auch, mithin fiel jede Art Strahlen auf das zweyte Prisma in einerley Neigung, und doch ward das blaue Licht ſtärker, als das grüne, dieſes ſtärker als das gelbe gebrochen, und ſo ferner nach der Ordnung weiter. Uebrigens ward die Farbe nie durch die zweyte Brechung verändert, ja auch eben ſo wenig durch die Zurückwerfung. Alle Sachen, was ſie für Farben haben mogten, als Papier, Aſche, Auripigment, Indig,

Gold,

Gold, Silber, Kupfer, Graß, blaue Blumen, Veilchen, farbichte Waſſerblaſen, Pfauenfedern, Tinctur vom ligno rephritico, u. ſ. w. ſahen im einfachen rothen Licht gänzlich roth, im blauen blau aus, u. ſ. f. Alle hatten im einfachen Licht von einerley Art einerley Farbe, nur warfen einige dieſes Licht ſtärker, andre ſchwächer zurück.

141. §.

Alle dieſe Verſuche leiten natürlich auf die Schlußfolge, daß nur eine Farbe in der Welt ſeyn würde, wenn das Sonnenlicht nur aus einerley Art Strahlen beſtünde, und daß die Verſchiedenheit der Farben, welche die körperlichen Dinge in der Natur unſern Augen darſtellen, daher rührt, weil jeder Körper, der ſeine eigene Farbe hat, nur diejenige Art des darauf fallenden Lichts, welches von eben der Farbe iſt, vornemlich zurück wirft; das übrige Licht dringt zum Theil in die Maſſe des Körpers hinein, oder wird ſonſt zerſtreuet. So ſchickt Zinnober vornemlich das rothe Licht, Gras und Laub von Bäumen das grüne Licht vornemlich zurück. Und wenn ein Körper mehr als eine Art des Lichts zurück wirft, ſo entſtehen die vermiſchten oder zuſammengeſetzten Farben nach dem verſchiedenen Verhältniſſe der Menge des von jeder einfachen Art zurückgeworfenen Lichts. Die weiſſe Farbe iſt eine Vermiſchung aller Grundfarben in gehörigem Verhältniß, weil das aus allen einfachen Arten vermiſchte Sonnenlicht die weiſſe Farbe hat. Im folgenden werden über alle dieſe Schlüſſe aus den Verſuchen mit dem Priſma noch umſtändlichere Betrachtungen vor-

kommen: hier iſt nur noch zu bemerken, daß man Grund habe anzunehmen, jede einfache Art der Lichtſtrahlen werde nach einer gewiſſen beſtändigen Regel gebrochen, oder für jeden Farbenſtrahl gehöre, ein beſtimmtes beſtändiges Verhältniß des Sinus des Einfallswinkels zum Sinus des gebrochenen Winkels.

142. §.

47 F. Die im 107. §. vorläufig angenommene Vorſtellung: es beſtehe das priſmatiſche Sonnenbild KL aus ſieben Kreiſen, davon jeder ſeine eigene Grundfarbe habe, und das Sonnenlicht ſelbſt aus ſiebenerley Arten einfachen oder gleichartigen Lichts, dienete nur, die erſten Begriffe von dieſer Zerſtreuung des Lichts bey jeder Brechung feſtzuſetzen, und den Erfolg ſelbſt einigermaſſen begreiflich zu machen. Sonſt iſt die Meinung nicht, daß alle Strahlen die hier als gleichartig betrachtet werden, völlig gleichartig, völlig gleich ſtark brechbar, und von völlig einerley Farbe ſeyn: die Meinung iſt alſo auch nicht, als wenn das priſmatiſche Sonnenbild nur aus ſieben, nicht mehrern, Kreiſen beſtehe, davon jeder ſeine eigene Farbe hat: vielmehr muß man ſich von K bis L unzählig viele nach einander folgende Kreiſe für unzählig viele nach einander folgende Farben vorſtellen, wovon jede folgende von der vorhergehenden durch unmerkliche Stuffen ſich unterſcheidet. Oberhalb und unterhalb α muß man ſich noch Mittelpuncte von Kreiſen vorſtellen, die alle roth ſind, nach β zu verliehrt ſich die Röthe in die Orangefarbe, von β nach γ ins gelbe, und immer ſo weiter. Eben

daher

daher rührt es, daß die kreisförmigen Enden des Bildes bey K und L verwirrt und undeutlich erſcheinen, auch das Licht daſelbſt ſich unmerklich verliert. Wäre unten nur ein rother, und oben nur ein violetter Kreis, ſo müſten die Halbkreiſe, welche das Bild begränzen, eben ſo ſcharf abgeſchnitten ſeyn, wie die graden Seitenlinien deſſelben: ja eben dies erklärt es, warum die Gränzen zu beyden Seiten grade, und ſcharf abgeſchnitten erſcheinen. Eigentlich alſo giebt es unzählig viele rothe, gelbe, grüne, Strahlen u. ſ. f. und ſelbſt das rothe Licht beſtehet aus ungleichartigem rothen, das blaue aus ungleichartigen blauen Licht, u. ſ. f. alle dieſe Arten gränzen durch unmerkliche Stufen aneinander. Weil indeſſen die ſchon oft genannten ſieben Farben hauptſächlich für unſre Empfindung unterſchieden ſind; ſo kann man ganz wohl bey der gewöhnlichen Vorſtellung bleiben, das Licht beſtehe aus ſiebenerley Arten von Farben-Strahlen. Ungleichartige rothe Strahlen ſind nur in den Graden der Röthe unterſchieden, und eben die Bewandniß hat es mit dem übrigen Licht, das hier als gleichartig betrachtet, und dem eine eigene Grundfarbe zugeſchrieben wird.

143. §.

Aus dieſem allen folgt nun, wenn man nach Anleitung des 130, 131, und 132. §, das Verhältniß der Refraction für eine durchſichtige Maſſe ſuchen will, daß dies Verhältniß nicht für alles auffallende Licht ohne Unterſcheid einerley ſey. Es iſt für die violetfarbene Strahlen am gröſten, und für die rothen Strahlen am kleinſten, wenn das

Licht, aus der Luft in eine dichtere durchſichtige Maſſe fällt. Es ſey für die Strahlen, deren Brechbarkeit am gröſten iſt, das Verhältniß der Refraction $= M : 1$, und für diejenigen, deren Brechbarkeit am kleinſten iſt, das Verhältniß der Refraction $= N : 1$; ſo kann man diejenigen, für welche das Verhältniß der Refraction $= \frac{1}{2}(M+N) : 1$ iſt, als Strahlen von mittlerer Brechbarkeit betrachten. Setzt man nun $\frac{1}{2}(M+N) = m$, und $\frac{1}{2}(M-N) = \mu$, ſo iſt $M = m + \mu$, und $N = m - \mu$; alsdenn hat man für das Licht von mittlerer Brechbarkeit das Verhältniß der Refraction $= m : 1$, für das Licht von der gröſten und kleinſten Brechbarkeit aber die Verhältniſſe $m + \mu : 1$, und $m - \mu : 1$.

144. §.

48 F. 1) Es ſey nun RES das Prisma in der Lage, welche erfordert wird, damit nach der erſten Brechung des auffallenden Lichts AB, die Strahlen von mittlerer Brechbarkeit, mit RS parallel laufen, wie BC, nach der zweyten Brechung aber in die Lage CD kommen. Man ſetze, wie bisher die Winkel $PBA = \alpha$, $RES = \varepsilon$, $qCD = \delta$, ſo iſt der Vorausſetzung gemäß $\alpha = \delta$, und $CBQ = BCp = qCH = \frac{1}{2}\varepsilon$. Das Verhältniß der mittlern Refraction ſey $= m : 1$, ſo iſt $\sin\alpha = m \sin \frac{1}{2}\varepsilon$. Ferner ſey BF ein Strahl desjenigen Lichts, welches am wenigſten brechbar iſt, das Verhältniß der kleinſten Refraction $= m - \mu : 1$, und $CBF = \varphi$, ſo iſt auch $\sin\alpha = (m - \mu) \sin(\frac{1}{2}\varepsilon + \varphi)$. Das giebt $m \sin \frac{1}{2}\varepsilon = (m - \mu) \sin(\frac{1}{2}\varepsilon + \varphi)$. Woferne man nun vorausſetzen kann, daß φ ein

ſehr

ſehr kleiner Winkel ſey, ſo iſt beynahe $\sin(\frac{1}{2}\varepsilon + \phi) = \sin\frac{1}{2}\varepsilon + \cos\frac{1}{2}\varepsilon \sin\phi$, wo auch beynahe $\sin\phi = \phi$ genommen werden kann. Weil nun bey eben der Vorausſetzung μ in Vergleichung mit m nur eine kleine Zahl iſt, ſo hat man beynahe $(m-\mu)\sin(\frac{1}{2}\varepsilon + \phi) = m\sin\frac{1}{2}\varepsilon + m.\phi.\cos\frac{1}{2}\varepsilon - \mu\sin\frac{1}{2}\varepsilon$, und man findet $m.\phi.\cos\frac{1}{2}\varepsilon = \mu\sin\frac{1}{2}\varepsilon$.

2) Weiter hat man $BFE = BCE + \phi$, alſo $90° - BFE = 90° - BCE - \phi$, oder $\pi FB = pCB - \phi = \frac{1}{2}\varepsilon - \phi$. Es ſey $\lambda FG = \delta'$, ſo iſt $\sin\delta' = (m-\mu)\sin(\frac{1}{2}\varepsilon - \phi)$, und man findet wie vorhin $\sin(\frac{1}{2}\varepsilon = \phi)$ beynahe $= \sin\frac{1}{2}\varepsilon - \phi.\cos\frac{1}{2}\varepsilon$, alſo $\sin\delta' = m\sin\frac{1}{2}\varepsilon - m.\phi.\cos\frac{1}{2}\varepsilon - \mu\sin\frac{1}{2}\varepsilon$; und wenn der Werth $m\phi\cos\frac{1}{2}\varepsilon = \mu\sin\frac{1}{2}\varepsilon$ geſetzt wird, ſo hat man $\sin\delta' = m\sin\frac{1}{2}\varepsilon - 2\mu\sin\frac{1}{2}\varepsilon$, oder $\sin\delta' = \sin\alpha - 2\mu\sin\frac{1}{2}\varepsilon = \sin\delta - 2\mu\sin\frac{1}{2}\varepsilon$. Wenn nun CD und FG einander in a ſchneiden, ſo iſt $EFa = ECa + CaF$, oder $GFS = DCS + CaF$, und $90° - GFS = 90° - DCS - CaF$, d. i. $\delta' = \delta - CaF$, oder $CaF = \delta - \delta'$. Es ſey $CaF = \psi$, ſo iſt ψ nur klein, und man hat $\delta' = \delta - \psi$, alſo $\sin\delta' = \sin\delta - \psi\cos\delta$. Dieſer Werth dem vorhin gefundenen $\sin\delta' = \sin\delta - 2\mu\sin\frac{1}{2}\varepsilon$ gleich geſetzt giebt $\psi\cos\delta = 2\mu\sin\frac{1}{2}\varepsilon$,

alſo $\psi = \dfrac{2\mu\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\cos\delta}$.

3) Die Strahlen, welche am meiſten brechbar ſind, werden auf der andern Seite von CD ebenfals um einen Winkel $= \psi$ abweichen: mithin iſt der Winkel, unter welchen die am meiſten brechbaren Strahlen die am wenigſten brechbaren ſchnei-

den, $= 2\psi = \frac{4\mu \sin \frac{1}{2}\varepsilon}{\cos\delta}$. Weil oben das Verhältniß der mittlern Refraction, wenn das Licht aus der Luft in das Prisma fällt $= m : 1$ angenommen iſt, ſo folgt, wenn alles Licht im Prisma unter dem Winkel $\frac{1}{2}\varepsilon$ auf die brechende Fläche fiele, und aus dem Prisma in die Luft gienge, daß der Sinus des gebrochenen Winkels für das Licht von mittlerer Brechbarkeit $= m \sin \frac{1}{2}\varepsilon$ wäre, alſo $= \sin\alpha = \sin\delta$. Für das Licht, das die gröſte oder kleinſte Brechbarkeit hat, ſey der gebrochene Winkel $= \delta \pm \varrho$, ſo hat man, weil ϱ in Vergleichung mit δ nur klein iſt, $\sin\delta \pm \varrho \cos\delta = \sin(\delta \pm \varrho)$, und eben dieſes Winkels Sinus iſt $= (m \pm \mu) \sin \frac{1}{2}\varepsilon = \sin\delta \pm \mu \sin \frac{1}{2}\varepsilon$, folglich erhält man $\varrho \cos\delta = \mu \sin \frac{1}{2}\varepsilon$, und $\varrho = \frac{\mu \sin \frac{1}{2}\varepsilon}{\cos\delta}$. Wird alſo

$$2\psi = \frac{4\mu \sin \frac{1}{2}\varepsilon}{\cos\delta} = \omega$$ angenommen, ſo hat man $\varrho = \frac{1}{4}\omega$.

4) Wäre die Sonne ein Punct, der gar keine ſcheinbare Gröſſe hätte, ſo würden ſich die Kreiſe, welche das gefärbte Bild KL (142. §.) ausmachen, in kleinere Kreiſe verwandeln, und der Durchmeſſer eines jeden würde dem Durchmeſſer der Oefnung im Fenſterladen gleich ſeyn; eben ſo groß wäre denn auch die Breite des Bildes. (75. §. Opt.) Würde alsdenn die Breite des Bildes von ſeiner Länge abgezogen, ſo hätte man den Abſtand $\alpha\eta$ der Mittelpuncte der beyden äuſſerſten Kreiſe. Eben das würde der Erfolg ſeyn, wenn man alles übrige Licht abſondern, und nur dasjenige durch die Oef-

nung

nung laſſen könnte, was vom Mittelpunct der Sonne kommt. Alle durch die Oefnung fallende Strahlen würden alsdenn parallel seyn, und unter einerley Winkel α auf das Prisma fallen. Zugleich wäre nun $\alpha\eta$ die Sehne desjenigen Winkels, unter welchem die am meiſten gebrochenen Strahlen die am wenigſten gebrochenen ſchneiden, der im vor. §. ω hies. Weil nun die Breite des Bildes auch alsdenn dem Durchmeſſer eines jeden der gefärbten Kreiſe gleich bleibt, woraus das Bild beſtehet, wenn die Strahlen von der ganzen Sonnenſcheibe durchfallen; ſo findet man in allen Fällen $\alpha\eta$, wenn von der ganzen Länge des gefärbten Bildes die Breite abgezogen wird. Es ſey alſo die Länge des Bildes $= L$, die Breite $= l$, der ſenkrechte Abſtand deſſelben vom Priſma $= D$, ſo iſt $\tang \psi = \tang \tfrac{1}{2}\omega = \frac{\tfrac{1}{2}(L - l)}{D}$. (Man nimmt hiebey an, daß Fa und Ca in Vergleichung mit der Entfernung D ſehr klein ſind, weil CF ſehr klein iſt). Hat man auf dieſe Art ψ oder $\omega = 2\psi$ gefunden, ſo giebt ſich daher $\varrho = \tfrac{1}{4}\omega = \tfrac{1}{2}\psi$, und daraus ferner das Verhältniß der gröſten und kleinſten Refraction $= \sin(\delta \pm \varrho) : \sin \tfrac{1}{2}\varepsilon = m \pm \mu : 1$.

145. §.

Durch dieſe Schlüſſe wird das Verfahren erläutert, deſſen ſich Herr Newton in ſeiner Optick (Lib. I. Part. I. Prop. VII. Theor. 6.) bedient, vermittelſt des Prisma das Verhältniß der Refraction für die Strahlen von mittlerer Brechbarkeit ſowohl, als auch zugleich den Unterſcheid der Re-

fraction der äuſſern und mittlern Strahlen zu finden. Er maß die Höhe der Sonne $= \eta$, und zugleich die Neigung ϑ derjenigen Strahlen gegen den Horizont, welche auf die Mitte des Bildes fielen, und fand $\eta + \vartheta = 44° \; 10'$. Der brechende Winkel ε des Prisma war $= 62° \; 30'$, alſo $\alpha = \delta = \frac{1}{2}(\eta + \vartheta + \varepsilon) = 53° \; 35'$. (98. §.) und $\frac{1}{2}\varepsilon = 31° \; 15'$ Daraus findet man $\frac{m}{n} = \frac{\sin\alpha}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}$ (130. §.) $= \frac{8047211}{5187733} = 1,5512$ beynahe $= \frac{31}{20}$. Dieſer Bruch iſt nun hier nach der Bezeichnung des 143. §. $= m$.

Weiter war $L = 9\frac{7}{8}$ Zoll, $l = 2\frac{1}{8}$ Zoll, alſo $L - l = 7\frac{3}{4}$ Zoll, und $D = 18\frac{1}{2}$ Fuß $= 222$ Zoll, mithin $\text{tang}\,\psi = \text{tang}\,\frac{1}{2}\omega = \frac{7\frac{3}{4}}{444} = \frac{31}{1776}$ $= 0,017455$, und $\psi = \frac{1}{2}\omega = 1°$. (Newton giebt $1° \; 3\frac{1}{2}''$ an). Demnach iſt $\varrho = 30'$, und weil $\frac{1}{2}\varepsilon = 31° \; 15'$, $\delta = 53° \; 35'$ war, ſo hat man $m + \mu : 1 = \sin 54° \; 5' : \sin 31° \; 15' = 8098710 : 5187733$ und $m - \mu : 1 = \sin 53° \; 5' : \sin 31° \; 15' = 7995100 : 5187733$, alſo $m + \mu = \frac{8098710}{5187733} = 1,56113$, und $m - \mu = \frac{7995100}{5187733} = 1,54115$. Die letzte Zahl von der erſten abgezogen giebt $2\mu = 0,01998$, alſo $\mu = 0,00999$. Demnach iſt ſehr nahe $\mu = \frac{1}{100}$,

und

und man hat beynahe

$$m : 1 = 155 : 100 = 77\tfrac{1}{2} : 50,$$
$$m + \mu : 1 = 156 : 100 = 78 : 50,$$
$$m - \mu : 1 = 154 : 100 = 77 : 50.$$

Das ſind die Zahlen, welche Newton a. a. Ort für das Verhältniß der mittlern, der gröſten und kleinſten Refraction findet, wenn das Licht, aus der Luft im Glaß fällt.

146. §.

Man nimmt bey dieſer Rechnung gewöhnlich an, daß die halbe Summe der Sinus des gröſten und kleinſten gebrochenen Winkels vom Sinus der halben Summe beyder Winkel nicht merklich unterſchieden ſey, und das trift um deswillen beynahe zu, weil der Unterſcheid beyder Winkel gewöhnlich nur klein iſt, wie er denn beym Glaſe nur ohngefehr zwey Grad ausmacht. Eigentlich wäre es bey einer ſcharfen Rechnung nicht einerley, ob man die halbe Summe des gröſten und kleinſten gebrochenen Winkels für den mittlern gebrochenen Wiukel annimmt, oder denjenigen Winkel, deſſen Sinus die halbe Summe der Sinus des gröſten und kleinſten gebrochenen Winkels iſt. Die Differenzen der Sinus nehmen ab, wenn die Differenzen der Winkel einerley bleiben: wenn alſo Λ der gröſte λ der kleinſte gebrochene Winkel iſt, und derjenige, ſoll der mittlere heiſſen, dem ein Sinus $= \frac{1}{2} (\sin \Lambda + \sin \lambda)$ zugehört, ſo iſt derſelbe kleiner als $\frac{1}{2} (\Lambda + \lambda)$. Es iſt nemlich vermöge des 451. §. Geom. $\frac{1}{2} (\sin \Lambda + \sin \lambda) = \sin \frac{1}{2} (\Lambda + \lambda) \cos \frac{1}{2} (\Lambda - \lambda)$, alſo $\frac{1}{2} (\sin \Lambda + \sin \lambda) < \sin \frac{1}{2} (\Lambda + \lambda)$: mithin auch $\text{Ang.} \sin. \frac{1}{2} (\sin \Lambda + \sin \lambda) < \frac{1}{2} (\Lambda + \lambda)$. Gehört zu dieſen

gebrochenen Winkeln Λ und λ der Einfallswinkel k, ſo iſt das Verhältniß der gröſten Refraction = $\frac{\sin\Lambda}{\sin k} : 1$, das Verhältniß der kleinſten = $\frac{\sin\lambda}{\sin k} : 1$, und das Verhältniß der mittlern = $\frac{\frac{1}{2}(\sin\Lambda + \sin\lambda)}{\sin k} : 1$, in dem Verſtande des

141. §. Will man das Verhältniß $\frac{\sin\frac{1}{2}(\Lambda + \lambda)}{\sin k} : 1$ dafür annehmen, ſo iſt daſſelbe gröſſer als jenes: wenn indeſſen $\Lambda - \lambda$ nur klein iſt, ſo iſt $\cos\frac{1}{2}(\Lambda - \lambda)$ ſehr nahe = 1, und beyde Werthe ſind beynahe gleich groß.

Was hier Λ, λ, k, ſind, waren im vor. §. $\delta + \varrho$, $\delta - \varrho$, und $\frac{1}{2}\varepsilon$: die Rechnung aber, vermöge welcher $m = 1{,}5512$ gefunden iſt, nimmt $m = \frac{\sin\delta}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}$ an. Weil nun ferner am Ende des 145. §. $m + \mu = 1{,}56113$, und $m - \mu = 1{,}54115$ gefunden iſt, ſo würde die halbe Summe dieſer Zahlen $\mu = 1{,}55114$ geben, welches mit dem vorigen Werth von m in den drey erſten Decimalſtellen übereinkommt. Eben dieſer Zahl iſt vermöge der angeſtellten Rechnung =

$$\frac{\frac{1}{2}(\sin(\delta + \varrho) + \sin(\delta - \varrho))}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon} = \frac{\sin\delta\cos\varrho}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon},$$

und hier iſt $\varrho = 30'$, alſo $\cos\varrho = 0{,}99996$, und man findet $1{,}5512 \times 0{,}9996 = 1{,}55114$, ſo daß beyde Rechnungen nun bis auf die fünfte Decimalſtelle übereinſtimmen.

147. §.

Wenn m ſchon gefunden, und der Winkel ψ oder $\omega = 2\psi$ bekannt iſt, ſo läßt ſich auch μ vermittelſt der Gleichung $\psi = \frac{2\mu \sin \frac{1}{2}\varepsilon}{\cos\delta}$ (144. §. n. 2.) finden. Dieſe giebt nemlich $\mu = \frac{\frac{1}{2}\psi \cos\delta}{\sin \frac{1}{2}\varepsilon}$. Im Exempel des 145 §. war ψ ein Bogen von einem Grad, alſo iſt hier $\frac{1}{2}\psi = \frac{1}{360} . \pi$, wenn π den halben Umfang eines Kreiſes für den Halbmeſſer = 1 bedeutet. Weiter war $\delta = 53^\circ\ 35'$, und $\frac{1}{2}\varepsilon = 31^\circ\ 15'$: man kann alſo auch μ ganz vortheilhaft vermittelſt der Logarithmen finden. Hier giebt die Rechnung folgendes:

$l\pi = 0,4971498$	$l.360 = 2,5563025$
$l\cos\delta = 9,7735327 - 10$	$l\sin\frac{1}{2}\varepsilon = 9,7149776 - 10$
$l\pi.\cos\delta = 0,2706825$	$l.360 \sin\frac{1}{2}\varepsilon = 2,2712801$
$2,2712801$	

$$l\mu = 0,9994024 - 3, \text{ alſo } \mu = 0,00998$$

oder ſehr nahe $\mu = \frac{1}{100}$, wie im 145. §.

148. §.

Sezt man ein hohles Prisma aus dreyen ebenen Glaßtafeln zuſammen mit der Einrichtung, daß man es mit Waſſer füllen, hiernächſt aber verſchlieſſen kann; ſo dient daſſelbe auf eben die Art, wie bisher iſt gewieſen worden, das Verhält-

hältniß der Refraction für Luft und Waſſer zu finden. Es hat nemlich alsdenn der ausfahrende Strahl gegen den einfallenden eben die Lage, die er hätte, wenn auch das Waſſer zwiſchen den Glastafeln nicht eingeſchloſſen wäre. Es ſey *res*
49 F. das Waſſer-Prisma, RE, *re*, imgleichen *es*, ES, die parallelen Seitenflächen der Glaßtafeln, und der einfallende Strahl nehme den Weg AB*bc*CD; ſo hat der zum zweyten mahl gebrochene Strahl *bc* im Waſſer eben die Lage, die er hätte, wenn der Strahl in der Lage *ab* mit AB parallel unmittelbar in *b* auf das Waſſer-Prisma fiele. Auch hat der wieder in die Luft gehende zum vierten mahl gebrochene Strahl CD eben die Lage, die der Strahl *cd* hätte, wenn *bc* bey *c* aus dem Waſſer unmittelbar in die Luft gienge. (126. §.) Mithin hat CD gegen AB eben die Lage die *cd* gegen *ab* hätte. Geht man alſo mit einem ſolchen Prisma eben ſo um, wie im vorhergehenden gewieſen iſt, um vermittelſt des maßiv gläſernen Prisma das Verhältniß der Refraction für Luft und Glaß zu finden; ſo kann auf eben die Art das Verhältniß der Refraction für Luft und Waſſer gefunden werden. Umſtändlichere Lehren von der Strahlenbrechung im Glaſe und andern durchſichtigen Maſſen, beſonders auch in Anſehung der verſchiedenen Brechbarkeit des ungleichartigen Lichts werden in der Dioptrick vorkommen.

Der

Der XII. Abſchnitt.

Die Brechung des gleichartigen Lichts in einer Kugelfläche.

149. §.

Der Punct P wirft einen Lichtſtrahl PM auf die brechende Kugelfläche $KMANL$ und das Verhältniß der Refraction $\mu : 1$ iſt gegeben. Durch P und den Mittelpunct C der Kugelfläche iſt PA als eine Axe der Kugelfläche gezogen, und die Lage des einfallenden Strahls PM gegen die Axe AP iſt gegeben: man ſoll die Lage des gebrochenen Strahls MW finden. 50 F.

Aufl. Die Ebene APM ſtelle einen Schnitt der Kugel durch die Axe AP vor, alſo KMANL einen gröſten Kreisbogen in dieſer Ebene; ſo iſt ſie zugleich die Brechungs-Ebene, worin der gebrochene Strahl MW liegt, und der Halbmeſſer CM nach R verlängert iſt das Neigungsloth. Man nehme an, der gebrochene Strahl MW ſchneide gehörig verlängert, die Axe AP in Π, ſo iſt die Lage des gebrochenen Strahls gefunden, wenn die Stelle des Puncts Π durch CΠ oder AΠ gefunden iſt. Nun ſey der Neigungswinkel $CMV = RMP = \alpha$, und der gebrochene Winkel $CMW = \beta$, mithin $\sin\alpha = \mu \sin\beta$. Ferner ſey $ACM = \gamma$, $APM = \varphi$,

$= \varphi$, $A\Pi M = \psi$, $CA = CM = r$; ſo iſt $\frac{CP}{\sin\alpha} = \frac{r}{\sin\varphi}$, und $\frac{C\Pi}{\sin\beta} = \frac{r}{\sin\psi}$, mithin $\frac{CP \sin\varphi}{\sin\alpha} = \frac{C\Pi \sin\psi}{\sin\beta}$. Daraus folgt $\frac{\sin\alpha \,.\, C\Pi}{\sin\beta} = \frac{CP \sin\varphi}{\sin\psi}$, oder $\frac{\mu \,.\, C\Pi}{CP} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}$. Weiter iſt $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\Pi M}{PM}$, alſo auch $\frac{\mu \,.\, PM}{CP} \,.\, C\Pi = \Pi M$, und $\frac{\mu^2 \,.\, PM^2}{CP^2} \,.\, C\Pi^2 = \Pi M^2$. Im Dreyeck CPM hat man $PM^2 = CP^2 - 2r \,.\, CP \cos\gamma + r^2$, alſo $\frac{PM^2}{CP^2} = 1 - \frac{2r \,.\, \cos\gamma}{CP} + \frac{r^2}{CP^2}$, und dieſe Zahl ſey $= \lambda^2$, ferner im Dreyeck CΠM iſt $\Pi M^2 = C\Pi^2 + 2r \,.\, C\Pi \,.\, \cos\gamma + r^2$, alſo erhält man die Gleichung $\mu^2 \lambda^2 C\Pi^2 = C\Pi^2 + 2r \,.\, C\Pi \,.\, \cos\gamma + r^2$, woraus CΠ gefunden werden kann. Man erhält nemlich $(\mu^2 \lambda^2 - 1)\, C\Pi^2 - 2r \,.\, \cos\gamma \,.\, C\Pi = r^2$, alſo auch $C\Pi^2 - \frac{2r \cos\gamma}{\mu^2 \lambda^2 - 1} \,.\, C\Pi = \frac{r^2}{\mu^2 \lambda^2 - 1}$, und das giebt $C\Pi = \frac{r \cos\gamma}{\mu^2 \lambda^2 - 1} \pm \sqrt{\frac{r^2 \cos\gamma^2 + r^2 (\mu^2 \lambda^2 - 1)}{(\mu^2 \lambda^2 - 1)^2}}$

oder $C\Pi = \frac{r(\cos\gamma \pm \sqrt{\cos\gamma^2 + (\mu^2 \lambda^2 - 1)})}{\mu^2 \lambda^2 - 1}$,

oder

oder auch $C\Pi = \frac{r\,(\mathrm{coſ}\gamma \pm \surd\,(\mu^2\,\lambda^2 - \mathrm{ſin}\gamma^2))}{\mu^2\,\lambda^2 - 1}$.

Die Urſache, weswegen auf ſolche Art zwey verſchiedene Werthe für $C\Pi$ gefunden werden, iſt darin zu ſuchen, weil die Auflöſung eigentlich folgende Frage beantwortet: In welchem Punct wird AP von MW geſchnitten werden, wenn man MW in eine ſolche Lage bringt, daß ſin CMW $= \frac{1}{\mu}$. ſin CMV wird? zum gegebenen Sinus $= \frac{1}{\mu}$ ſin CMV aber gehören zwey verſchiedene Winkel, nemlich CMW und CMw = 180° − CMW: demnach muß die vollſtändige Auflöſung der Aufgabe zwey verſchiedene Durchſchnittspuncte Π und Π', alſo auch zwey verſchiedene Entfernungen $C\Pi$ und $C\Pi'$ des geſuchten Durchſchnittspuncts von C geben.

Hier wird nur derjenige von beyden Winkeln gebraucht, der kleiner als 90° iſt, mithin auch nur derjenige Werth $C\Pi$, welcher dem Winkel CMW zugehört, der kleiner als 90° iſt. Um von beyden gefundenen Werthen denjenigen gehörig zu unterſcheiden, welcher dem Winkel CMW zugehört, und hier allein gebraucht wird, iſt folgendes zu bemerken. Die 50 Fig. ſtellt den Fall vor, wenn $\mu < 1$ iſt, und das Licht aus einer dünnern durchſichtigen Maſſe in eine Dichtere, wie aus Luft in Glaß oder Waſſer, hinüber geht. So lange nun $\mu^2\,\lambda^2 > 1$, mithin $\lambda^2 > \frac{1}{\mu^2}$ iſt, ſo lange iſt

der

der Nenner des Bruchs

$$\frac{\operatorname{coſ}\gamma \pm \sqrt{(\operatorname{coſ}\gamma^2 + \mu^2\lambda^2 - 1)}}{\mu^2\lambda^2 - 1}$$, poſitiv, und der eine Werth des Zählers iſt negativ: daraus ergiebt ſich, daß die geſuchte Linie einen poſitiven, und einen negativen Werth habe, ſo lange $\lambda^2 > \frac{1}{\mu^2}$ iſt. Man ſetze $AP = \delta$, alſo $CP = \delta + r$,

ſo iſt $\lambda^2 = 1 - \frac{2r \operatorname{coſ}\gamma}{\delta + r} + \frac{r^2}{(\delta + r)^2} = 1 - \frac{2r}{\delta + r} + \frac{r^2}{(\delta + r)^2} + \frac{2r(1 - \operatorname{coſ}\gamma)}{\delta + r}$, oder $\lambda^2 = \left(1 - \frac{r}{\delta + r}\right)^2 + \frac{2r \operatorname{ſinv}.\gamma}{\delta + r}$, oder auch $\lambda^2 = \frac{\delta^2}{(\delta + r)^2} + \frac{2r \operatorname{ſinv}.\gamma}{\delta + r}$. Für einerley Winkel γ nähert ſich dieſe Zahl der Einheit deſto mehr, je gröſſer δ angenommen wird, und ſie wird $= 1$, wenn δ unendlich groß wird. Demnach läßt ſich allemahl δ ſo groß annehmen, daß $\lambda^2 > \frac{1}{\mu^2}$ wird, wenn wie hier vorausgeſetzt ward, $\mu > 1$ iſt; alsdenn aber hat $C\Pi$ einen poſitiven und einen negativen Werth, wie es die Figur vorſtellt, und der poſitive iſt derjenige, welcher hier nur gebraucht wird. Ich nehme alſo hinführo

$$C\Pi = \frac{\operatorname{coſ}\gamma + \sqrt{(\mu^2\lambda^2 - \operatorname{ſin}\gamma^2)}}{\mu^2\lambda^2 - 1} \cdot r$$ an.

Man ſetze nun die unbeſtimmte Linie $C\Pi = z$, ſo iſt

iſt $z = \frac{\operatorname{coſ}\gamma + \sqrt{(\operatorname{coſ}\gamma^2 + \mu^2\lambda^2 - 1)}}{\mu^2\lambda^2 - 1} \cdot r$, $=$ $\frac{\operatorname{coſ}\gamma + \sqrt{(\mu^2\lambda^2 - \operatorname{ſin}\gamma^2)}}{\mu^2\lambda^2 - 1} \cdot r$, und dieſer Ausdruck nähert ſich dem Werth $\frac{1 + \mu\lambda}{\mu^2\lambda^2 - 1} \cdot r =$ $\frac{r}{\mu\lambda - 1}$, wenn γ ſehr klein wird: für $\gamma = 0$, wäre $z = \frac{r}{\mu\lambda - 1}$, und $\lambda = \frac{\delta}{\delta + r}$. Man ſetze alſo $\frac{\delta}{\delta + r} = \zeta$ und nehme $C\pi = \frac{r}{\mu\zeta - 1}$ an, ſo iſt $C\pi = \frac{r(\delta + r)}{\mu\delta - \delta - r}$, oder $C\pi =$ $\frac{r(\delta + r)}{(\mu - 1)\delta - r}$. So lange nun γ ſehr klein bleibt, ſo lange bleibt der für z gefundene allgemeine Ausdruck noch ſehr nahe $= \frac{r}{\mu\zeta - 1} = \frac{r(\delta + r)}{(\mu - 1)\delta - r}$, dieſemnach werden alle Strahlen, die wie Pm, $P\mu$, ſehr nahe bey der Axe auffallen, in der Kugelfläche ſo gebrochen, daß ſie nach der Brechung auch ſehr nahe wieder in einerley Punct π zuſammen laufen. Dieſer Punct π iſt ein Bild von P, weil ein Auge in O die aus P kommenden Strahlen ſo empfängt, als kämen ſie von π her.

Die allgemeine Formul läßt ſich ſo ausdrücken $\frac{z}{r} = \frac{1}{\mu^2\lambda^2 - 1} + \frac{\sqrt{(\mu^2\lambda^2 - \operatorname{ſin}\gamma^2)} - \operatorname{ſinv}.\gamma}{\mu^2\lambda^2 - 1}$,

 und

und weil $\frac{\delta}{\delta + r} = \zeta$ geſetzt, iſt, ſo hat man $\lambda^2 = \zeta^2 + \frac{2r \sin v \,.\, \gamma}{\delta + r}$. Setzt man noch $\frac{r}{\delta + r} = \varepsilon$, ſo iſt $\varepsilon \,.\, 4\zeta = 1$, und $\lambda^2 = \zeta^2 + 2\varepsilon \,.\, \sin v \,.\, \gamma$. Das giebt $\mu^2 \lambda^2 - 1 = \mu^2 \zeta^2 - 1 + 2\mu^2 \varepsilon \,.\, \sin v \,.\, \gamma$, oder $\mu^2 \lambda^2 - 1 = (\mu\zeta - 1)\left(\mu\zeta + 1 + \frac{2\mu^2 \varepsilon \,.\, \sin v \,.\, \gamma}{\mu\zeta - 1}\right)$. Ferner ſey $\mu\zeta + \frac{2\mu^2 \varepsilon \,.\, \sin v \,.\, \gamma}{\mu\zeta - 1}$ M, ſo erhält man $\mu^2 \lambda^2 - 1 = (\mu\zeta - 1)(1 + M)$, und $\frac{z}{r} = \frac{1}{(\mu\zeta - 1)(1 + M)} + \frac{\surd(\mu^2 \lambda^2 - \sin\gamma^2) - \sin v \,.\, \gamma}{\mu^2 \lambda^2 - 1}$: überdem iſt $\frac{1}{1 + M} = 1 - \frac{M}{M + 1}$, alſo $\frac{z}{r} = \frac{1}{\mu\zeta - 1} + \frac{\surd(\mu^2 \lambda^2 - \sin\gamma^2) - \sin v \,.\, \gamma - M}{\mu^2 \lambda^2 - 1}$ und $z = \frac{r}{\mu\zeta - 1} - \frac{M + \sin v \,.\, \gamma - \surd(\mu^2 \lambda^2 - \sin\gamma^2)}{\mu^2 \lambda^2 - 1} \,.\, r$. Wie nun dieſe Formul den Abſtand des Durchſchnittspuncts Π vom Mittelpunct C der brechenden Kugelfläche giebt, ſo hat man zugleich den Abſtand des Puncts Π von der Kugelfläche ſelbſt, nemlich $A\Pi = C\Pi + CA = z + r$. Wird alſo $A\Pi = x$ geſetzt, ſo findet man $x = \frac{\mu\zeta r}{\mu\zeta - 1}$

—

$$-\frac{M+\sin v\gamma-\surd(\mu^2\lambda^2-\sin\gamma^2)}{\mu^2\lambda^2-1}.r.$$

150. §.

So lange der Winkel γ nur klein iſt, hat man ſehr nahe $\sin\gamma^2 = 2\sin v\gamma$: überdem iſt $\mu^2\lambda^2 = \mu^2\zeta^2 + 2\mu^2\varepsilon\sin v\gamma$, alſo $\mu^2\lambda^2 - \sin\gamma^2 = \mu^2\zeta^2 \left(1+\frac{2(\mu^2\varepsilon-1)\sin v.\gamma)}{\mu^2\zeta^2}\right)$. So lange ferner $\mu\zeta > 1$ bleibt, ſo lange iſt beynahe $\surd(\mu^2\lambda^2 - \sin\gamma^2) = \mu\zeta\left(1-\frac{(\mu^2\varepsilon-1)\sin v\gamma}{\mu^2\zeta^2}\right)$, oder $\surd(\mu^2\lambda^2 - \sin\gamma^2) = \mu\zeta - \frac{\sin v\gamma}{\mu\zeta} + \frac{\mu\varepsilon\sin v\gamma}{\zeta}$: vergleicht man hiemit den Werth $M + \sin v.\gamma = \mu\zeta + \sin v.\gamma + \frac{2\mu^2\varepsilon\sin v.\gamma}{\mu\zeta-1}$, ſo erhellet, daß bey den angenommenen Vorausſetzungen der letzte Werth gröſſer als der erſte ſey. Wenn demnach $\mu\zeta > 1$ iſt, ſo iſt $x < \frac{\mu\zeta r}{\mu\zeta-1}$, oder $A\Pi < A\pi$, und $\pi\Pi = A\pi - A\Pi =$

$$\frac{M+\sin v\gamma-\surd(\mu^2\lambda^2-\sin\gamma^2)}{\mu^2\lambda^2-1}.r.$$

Es ſey dieſer Werth $= h$, und $\frac{\mu\zeta r}{\mu\zeta-1} = g$, ſo iſt $x = g - h$. In dem Fall, wenn γ ſehr klein iſt, findet man $M + \sin v\gamma - \surd(\mu^2\lambda^2 -$

$\sin\gamma^2) = \left(1 + \frac{1}{\mu\zeta} + \frac{2\mu^2\varepsilon}{\mu\zeta - 1} - \frac{\mu\varepsilon}{\zeta}\right)$ $\sin v . \gamma$, und der in $\sin v\gamma$ multiplicirte Factor iſt $= \frac{\mu\zeta + 1}{\mu\zeta} + \frac{\mu\varepsilon(\mu\zeta + 1)}{(\mu\zeta - 1)\zeta} =$ $\frac{(\mu\zeta - 1 + \mu^2\varepsilon)(\mu\zeta + 1)}{\mu\zeta(\mu\zeta - 1)}$. Weil ferner $\zeta = 1 - \varepsilon$, ſo erhält man $\mu\zeta - 1 + \mu^2\varepsilon = \mu - \mu\varepsilon - 1 + \mu^2\varepsilon = \mu(\mu\varepsilon + 1) - (\mu\varepsilon + 1) = (\mu - 1)(\mu\varepsilon + 1)$, und dieſe Werthe geben $h =$ $\frac{(\mu - 1)(\mu\varepsilon + 1)(\mu\zeta + 1) . r \sin v\gamma}{\mu\zeta(\mu\zeta - 1)}$.

$\frac{1}{\mu^2\lambda^2 - 1}$. Weiter iſt $\mu^2\lambda^2 - 1 = \mu^2\zeta^2 - 1 + 2\mu^2\varepsilon \sin v . \gamma$, alſo $\frac{1}{\mu^2\lambda^2 - 1} = \frac{1}{\mu^2\zeta^2 - 1}$ $- \frac{2\mu^2\varepsilon \sin v\gamma}{(\mu^2\zeta^2 - 1)(\mu^2\zeta^2 - 1 + 2\mu\varepsilon \sin v\gamma)}$ läſt man alſo denjenigen Theil weg, der den Factor $\sin v . \gamma^2$ enthalten würde, ſo wird $h =$ $\frac{(\mu - 1)(\mu\varepsilon + 1) . r \sin v . \gamma}{\mu\zeta(\mu\zeta - 1)^2}$ gefunden. Weil dieſer Ausdruck mit γ wächſt, ſo erhellet, daß nicht alle aus P auf die Kugelfläche fallende Strahlen in einerley Punct der Axe AP nach der Brechung zuſammen laufen. Nur diejenigen, welche wie Pμ, Pm, ſehr nahe bey der Axe auffallen, haben den Vereinigungspunct π, und für die übrigen rückt Π deſto näher gegen A, je gröſſer γ wird, in dem Fall nemlich, wenn $\mu > 1$ iſt. Der Unter-

terſcheid $\pi\Pi = h$ der beyden Entfernungen $C\pi$, $C\Pi$, heiſt die von der Kugelgeſtalt herrührende Abweichung des gebrochenen Strahls PMW.

151. §.

Unter der allgemeinen Auflöſung der Aufgabe des 149 §. iſt eine ziemliche Anzahl beſondrer Fälle enthalten, wovon die merkwürdigſten noch um deswillen eine kurze Erörterung verdienen, weil davon im folgenden Abſchnitt eine fernere Anwendung gemacht werden muß. Zuförderſt bemerke ich, daß ſelbſt die im 119 §. vorgekommene Aufgabe von der zuletzt aufgelöſeten nur ein beſondrer Fall ſey. Wenn nemlich der Halbmeſſer AC 50 F. wächſt, und alles übrige ungeändert bleibt, ſo nimmt der Winkel ACM ab, und der Bogen AM nähert ſich der Natur einer graden Linie, ſo wie die Kugelfläche der Natur einer ebenen Fläche, welche AP in A ſenkrecht ſchneidet, oder die Kugelfläche in A berührt. Wird nun AD $= u$, DM $= w$ geſetzt, ſo iſt $u = r\,\text{ſinv}\,.\,\gamma$, $w = r\,\text{ſin}\gamma$; alſo $x = \frac{\mu\zeta r}{\mu\zeta - 1} - \frac{Mr + u - \sqrt{(\mu^2\lambda^2 r^2 - w^2)}}{\mu^2\lambda^2 - 1}$, (149 §.) und $\zeta r = \frac{\delta r}{\delta + r}$. Ferner war $M = \mu\zeta + \frac{2\mu^2\,\varepsilon\,\text{ſinv}\gamma}{\mu\zeta - 1}$, und $\lambda^2 = \zeta^2 + 2\varepsilon\,\text{ſinv}\,.\,\gamma$, alſo iſt $Mr = \mu\zeta r + \frac{2\mu^2\,\varepsilon\,.\,u}{\mu\zeta - 1}$; weil überdem $2\,\text{ſinv}.\gamma = \text{ſin}\gamma^2 + \text{ſinv}\,.\,\gamma$, ſo erhält man $\lambda^2 r^2 = \zeta^2 r^2 + \varepsilon\,.\,(w^2 + u^2)$. Wenn r unendlich groß wird,

ſo verſchwindet γ, und w wird = AB, $\zeta r = \delta$, $\varepsilon = \frac{r}{\delta + r} = 1$, $\zeta = 0$, $\lambda = 0$, $u = 0$, mithin wird in dieſem Fall

$$x = -\sqrt{(\mu^2 \delta^2 + w^2) - w^2}),$$

wie im 119 §. Was nemlich daſelbſt z war, iſt hier w, und das Zeichen (—) rührt daher, weil in dem Fall des 119 §. der Punct Π mit P auf einerley Seite der brechenden Fläche liegt, im 149. §. aber die Linien AΠ poſitiv genommen ſind, welche ſich von der brechenden Fläche aus nach der Lage erſtrecken, die der Lage AP entgegen geſetzt iſt.

152. §.

51 F. Die 51. Figur ſtellt den Fall vor, wenn der Strahl bey der Brechung in der Kugelfläche aus einer dünnern durchſichtigen Maſſe in eine dichtere fällt. Alsdenn iſt $\mu < 1$, alſo iſt nun $g = -\frac{\mu\zeta r}{1 - \mu\zeta}$ (150. §.) negativ; das will ſagen, die zunächſt bey der Axe auffallenden Strahlen fahren nach der Brechung hinter der Kugelfläche auseinander, und haben alsdenn eine ſolche Lage, als kämen ſie aus dem Punct π her, der vor der Kugelfläche liegt. Dieſer Punct π iſt nun kein Sammlungspunct, ſondern ein Zerſtreuungspunct der gebrochenen Strahlen, kein phyſiſches ſondern ein geometriſches Bild des Puncts P. So lange der Winkel γ wenige Grade faſſet, iſt die Abweichung $h = \frac{(\mu - 1)(\mu\varepsilon + 1) . r \sin v . \gamma}{\mu\zeta(\mu\zeta - 1)^2}$,

(150.

(150. §.) alſo $x = g - h = -\frac{\mu\zeta r}{1 - \mu\zeta} + \frac{(1-\mu)(\mu\varepsilon + 1) . r \sin v . \gamma}{\mu\zeta(\mu\zeta - 1)^2}$, und Π liegt wiederum der brechenden Fläche näher als π. Beym fernern Gebrauch dieſer Formuln in der Photometrie wird nur vornemlich nöthig ſeyn, daß die Entfernung des Bildes π, es ſey übrigens ein Sammlungs- oder Zerſtreuungs-Punct der zunächſt bey der Axe auffallenden Strahlen nach ihrer Brechung, für jeden beſondern Fall bekannt ſey; mehrere Unterſuchungen über die Abweichung wegen der Kugelgeſtalt wird die Dioptrick anſtellen.

153. §.

Es ſey alſo zuerſt $\mu > 1$, ſo hat man $g = \frac{\mu\zeta r}{\mu\zeta - 1}$, und $\zeta = \frac{\delta}{\delta + r}$, alſo $g = \frac{\mu\delta r}{\mu\delta - (\delta + r)}$, oder $g = \frac{\mu\delta r}{(\mu - 1)\delta - r}$, und eben die Formul iſt auch $= \frac{\mu r}{\mu - 1 - r : \delta}$. So lange $\delta > \frac{r}{\mu - 1}$ iſt, ſo lange iſt g poſitiv, π liegt hinter der brechenden Fläche, und iſt ein Sammlungspunct der gebrochenen Strahlen. Wie nun g auſſer der Zahl μ nur von δ und r abhängt, r aber bey einerley Kugelfläche unveränderlich iſt, ſo müſſen noch die Aenderungen erwogen werden, die mit g vorgehen, wenn δ Aenderungen leidet.

1) Demnach nehme man an, daß $\delta = AP$ wachſe, oder P von der brechenden Fläche weiter wegrücke, ſo wird $g = \frac{\mu r}{\mu - 1 - r : \delta}$ kleiner, und π rückt der brechenden Fläche näher. Wächſt δ über alle Gränzen, ſo wird zuletzt $g = \frac{\mu}{\mu - 1} r$. Es ſey $AF = \frac{\mu}{\mu - 1} r$, ſo will die letzte Folge ſoviel ſagen: wenn der Strahl $P'm$ mit der Axe AP parallel, und ſehr nahe bey der Axe auffällt, ſo ſchneidet er nach der Brechung die Axe in F. Eben das gilt für alle Strahlen, die in eben der Lage ſehr nahe bey der Axe auffallen, ihr Vereinigungspunct nach der Brechung iſt F, und dieſer Punct heiſt der Brennpunct der Kugelfläche, ſo wie AF die Brennweite. Die Nahmen werden hier aus einem ähnlichen Grunde, wie beym ſphäriſchen Spiegel (93 §.) gebraucht. Setzt man alſo dieſe Brennweite $= f$, ſo iſt $f = \frac{\mu}{\mu - 1} r$, alſo $\mu r = (\mu - 1) f$, und die allgemeine Formul $g = \frac{\mu \delta r}{(\mu - 1) \delta - r}$ läßt ſich auch ſo ausdrücken $\frac{(\mu - 1) \delta f}{(\mu - 1) \delta - r} = \frac{\delta f}{\delta - r : \mu - 1}$. Weil nun $\frac{\mu}{\mu - 1} = 1 + \frac{1}{\mu - 1}$, ſo iſt auch $f = r + \frac{r}{\mu - 1}$, und $\frac{r}{\mu - 1} = f - r$, mithin

$$g = \frac{\delta f}{\delta - (f - r)} = \frac{f}{1 - (f - r) : \delta}.$$

2) Wenn

2) Wenn δ abnimmt, oder P der brechenden Kugelfläche näher rückt, ſo wächſt $g = \frac{f}{1-(f-r):\delta}$, weil der Nenner dieſes Bruchs bey ungeändertem Zähler kleiner wird. In dem Fall $\delta = f - r$ wird g unendlich groß, das heiſt: die Strahlen laufen nach der Brechung mit der Axe der Kugelfläche parallel, wenn der Abſtand des ſtrahlenden Puncts von der brechenden Kugelfläche dem Ueberſchuß der Brennweite über dem Halbmeſſer der Kugelfläche gleich iſt.

3) Nimmt δ noch weiter ab, ſo daß $\delta < f - r$, oder $\delta + r < f$ iſt, ſo wird $g = -\frac{\delta f}{f-r-\delta} = -\frac{f}{(f-r):\delta - 1}$ negativ, die Strahlen haben nach der Brechnng keinen Sammlungspunct hinter der brechenden Fläche, wohl aber einen Zerſtreuungspunct vor derſelben, und laufen ſo auseinander, als kämen ſie von dieſem Zerſtreuungspunct her. Uebrigens nimmt $g = -\frac{f}{(f-r):\delta - 1}$ deſto mehr ab, je mehr δ abnimmt, und wenn δ verſchwindet, wird $g = 0$.

4) Auf den Punct M der brechenden Kugelfläche könnte wohl ein Strahl QM in einer ſolchen Lage fallen, daß derſelbe verlängert die Axe AC der Kugelfläche hinter derſelben ſchnitte: alsdenn wäre AP was vorhin δ war nur mit entgegen geſetzter Lage. Um alſo für Fälle dieſer Art $A\pi$ zu finden, muß man in der allgemeinen Formul für g die Linie δ negativ annehmen, ſo giebt ſich $g =$ 52 F.

$\frac{\mu\delta r}{(\mu-1)\delta+r}$, oder auch $g = \frac{\delta f}{\delta+f-r}$.
Weil nun $f > r$ iſt, ſo bleibt dieſer Werth allemahl poſitiv, wie groß auch δ von A nach C zu angenommen wird. Strahlen alſo, die vor der Brechung ſchon gegen einerley Punct der Axe hinter der brechenden Kugelfläche zu liefen, bleiben auch nach der Brechung zuſammen laufende Strahlen. So lange $\delta < r$ iſt, ſo lange iſt $g > \delta$ und π iſt von der brechenden Fläche weiter als P entfernt. Wird aber $\delta > r$, ſo wird $g < \delta$, und π liegt der brechenden Fläche näher als P, wie ſolches auch die Betrachtung der Figur von ſelbſt zu erkennen giebt.

154. §.

51 F. Wird nunmehro $\mu < 1$ angenommen, welches der Fall iſt, den die 51 Fig. vorſtellt, ſo hat man

$$g = -\frac{\mu\delta r}{(1-\mu)\delta+r}.$$

1) Dieſe Formul hat allemahl einen negativen Werth, was auch ſtatt δ für ein poſitiver Werth geſetzt wird. Sie wächſt mit δ, und nimmt ab, wenn δ kleiner wird, ſo wie ſie auch mit δ zugleich verſchwindet. In allen Fällen alſo, wenn aus einem Punct der Axe P, der vor der brechenden Fläche liegt, Strahlen ſehr nahe bey der Axe auffallen, fahren dieſe Strahlen hinter der brechenden Fläche ſo aus einander, als kämen ſie von einem Punct in der Axe her, der vor der brechenden Fläche liegt, da dann dieſer Punct ein geometriſches Bild, oder ein Zerſtreuungspunct iſt. In

dem

dem Fall $\delta = \infty$ hat man $g = -\frac{\mu r}{1-\mu}$, und die Brennweite iſt negativ. Das heiſt: es giebt keinen phyſiſchen wohl aber einen geometriſchen Brennpunct für die mit der Axe parallel auffallenden Strahlen. Wird alſo nun $\frac{\mu r}{1-\mu} = f$ geſetzt, ſo iſt auch $g = -\frac{\delta f}{\delta + r : (1-\mu)}$. Weil ferner $\frac{1}{1-\mu} = 1 + \frac{\mu}{1-\mu}$ iſt, ſo hat man $\frac{r}{1-\mu} = r + \frac{r\mu}{1-\mu} = r + f$, und es wird $g = -\frac{\delta f}{\delta + r + f}$.

2) Fallen die Strahlen in einer ſolchen Lage auf, daß ſie verlängert hinter der brechenden Kugelfläche in einem Punct der Axe zuſammen laufen würden, wie im 153. §. n. 4. angenommen ward, ſo iſt δ negativ, alſo $g = \frac{\mu \delta r}{r - (1-\mu)\delta}$, oder $g = \frac{\delta f}{\frac{r}{1-\mu} - \delta} = \frac{\delta f}{f + r - \delta}$. Dieſer Werth bleibt poſitiv, ſo lange $\delta < f + r$ bleibt, auch iſt $g < \delta$ ſo lange $\delta < r$ bleibt; wird aber $\delta > r$, ſo wird $g > \delta$, und g wächſt mit δ bis $\delta = f + r$ wird, da dann g unendlich groß wird, und die Strahlen nach der Brechung mit der Axe parallel laufen.

Wird

Wird $\delta > f + r$, ſo wird $g = - \frac{\delta f}{\delta - (f + r)}$ wieder negativ, und nimmt ab, wenn δ noch weiter wächſt, bis $g = - f$ wird, wenn δ unendlich groß iſt.

155. §.

Bey allen dieſen Schlüſſen iſt noch vorausgeſetzt worden, daß die Lichtſtrahlen auf die erhabene Seite der brechenden Kugelfläche fallen, an ſich aber ſind die Formuln des 149ſten und 150ſten §. ſo allgemein, daß auch der Fall darunter enthalten iſt, wenn das Licht auf die hohle Seite der brechenden Kugelfläche fällt. Die allgemeine Formul war $x = \frac{\mu \zeta r}{\mu \zeta - 1} - h$, und im 151. §. ſind die Aenderungen ſchon zum Theil erwogen, die mit der Formul vorgehen, wenn r Aenderungen leidet, auch iſt gewieſen, daß der beſondre Fall, wenn die brechende Fläche eben iſt, (119. §.) unter der allgemeinen Formul enthalten ſey. Dieſen Fall giebt die allgemeine Formul, wenn man $r = \infty$ ſetzt, und man ſiehet leicht, wenn nunmehro r oder AC negativ angenommen wird, daß ſolches ſoviel heiſſe, als annehmen: der Kugelfläche Mittelpuuct C liege auf der Seite der Kugelfläche, wo das Licht herkommt, oder die hohle Seite der Kugelfläche ſey dem auffallenden Licht zugekehrt. Weil nun hier die Abweichung wegen der Kugelgeſtalt beyſeit geſetzt, und die allgemeine Formul $g = \frac{\mu \zeta r}{\mu \zeta - 1} = \frac{\mu \delta r}{(\mu - 1) \delta - r}$ nur gebraucht wird; ſo

ſo nehme man in derſelben r negativ an, und man erhält $g = - \frac{\mu \delta r}{(\mu - 1)\delta + r}$ für den Fall, wenn das Licht auf die hohle Seite der Kugelfläche fällt.

156. §.

1) Iſt nun zuerſt $\mu > 1$, ſo iſt allemahl g negativ, wenn δ poſitiv iſt, oder: wenn das Licht von einem Punct der Axe vor der Kugelfläche ausgehet, ſo fahren die Strahlen nach der Brechung ebenfals aus einander als kämen ſie von einem Zerſtreuungspunct her, der vor der brechenden Fläche liegt, wie es die 53. Fig. vorſtellt. Wird δ un- 53 F. endlich groß, ſo iſt $g = - \frac{\mu r}{\mu - 1}$ die Brennweite, welche nun negativ iſt, und es giebt in dieſem Fall keinen phyſiſchen ſondern einen geometriſchen Brennpunct für Strahlen, die mit der Axe parallel auffallen. Wird alſo $\frac{\mu r}{\mu - 1} = f$ geſetzt, ſo hat man auch $g = - \frac{\delta f}{\delta + r : (\mu - 1)}$ und $f = r + \frac{r}{\mu - 1}$, alſo $\frac{r}{\mu - 1} = f - r$, und $g = - \frac{\delta f}{\delta + f - r}$. So lange $\delta > r$ iſt, ſo lange iſt $g < \delta$, in dem Fall $\delta = r$, iſt $g = - \delta$, und das Licht geht ungebrochen durch: wird $\delta < r$, ſo iſt $g > \delta$.

2) Mit δ verſchwindet auch g, wenn aber δ ne- 54 F. gativ wird, oder wenn die Strahlen VM in der

Lage

Lage auffallen, daß ſie ſich hinter der brechenden Fläche in einem Punct P der Axe vereinigen würden; ſo iſt $g = \frac{\mu \delta r}{r - (\mu - 1)\delta} = \frac{\delta f}{f - r - \delta}$ ſo lange wieder poſitiv, als $\delta < f - r$ bleibt. In dem Fall $\delta = f - r$, wird g unendlich groß, und die Strahlen ſind nach der Brechung mit der Axe parallel. Wird endlich $\delta > f - r$, ſo iſt $g = - \frac{\mu \delta r}{(\mu - 1)\delta - r} = - \frac{\delta f}{\delta - (f - r)}$ wieder negativ, und nimmt ab, wenn δ wächſt, bis zuletzt in dem Fall $\delta = \infty$ wieder $g = - \frac{\mu r}{\mu - 1} = - f$ wird.

157. §.

55 F. Es bleibe die Vorausſetzung, daß r negativ, oder die Höhlung der Kugelfläche dem auffallenden Licht zugekehrt ſey: überdem aber ſey $\mu < 1$; ſo hat man $g = \frac{\mu \delta r}{(1 - \mu)\delta - r}$.

1) So lange nun δ poſitiv, und gröſſer, als $\frac{r}{1 - \mu}$ iſt, ſo lange iſt g poſitiv, und die Strahlen, welche ſehr nahe bey der Axe auffallen, laufen nach der Brechung in einerley Vereinigungspunct zuſammen. In dem Fall $\delta = \infty$ wird $g = \frac{\mu r}{1 - \mu}$, und dieſer Werth ſey $= f$; ſo iſt f die Brennweite, und die Strahlen haben nach der Brechung einen phyſiſchen Brennpunct. Ueberdem

dem hat man auch $g = \frac{\delta f}{\delta - r : (1 - \mu)}$, und $\frac{r}{1-\mu} = r + \frac{\mu r}{1-\mu} = r + f$, alſo $g = \frac{\delta f}{\delta - r - f}$. Wird $\delta = f + r$, ſo wird $g = \infty$, und die Strahlen ſind nach der Brechung mit der Axe parallel. Wird ferner $\delta < f + r$, ſo iſt $g = - \frac{\delta f}{f + r - \delta}$ negativ, die Strahlen fahren nach der Brechung aus einander, und haben vor der brechenden Fläche einen Zerſtreuungs-Punct.

2) Mit δ verſchwindet g, und wenn δ negativ wird, oder wenn Strahlen in der Lage auf die hohle Kugelfläche fallen, daß ſie hinter derſelben in einem Punct der Axe zuſammen laufen würden; ſo iſt $g = \frac{\mu \delta r}{(1-\mu)\delta + r} = \frac{\delta f}{\delta + r + f}$ allemahl 54 F. poſitiv, und kleiner als δ. Dergleichen für ſich ſchon zuſammen laufende Strahlen werden alſo durch die Brechung in einen Vereinigungspunct geſammlet, welcher der brechenden Kugelfläche noch näher als P liegt. In der 54 Fig. wäre nun $RM\pi > RMP$, und π würde zwiſchen A und P in π' fallen.

158. §.

Ein Punct P der Axe AP wirft den Strahl PM auf die brechende Kugelfläche AMN in 56 F. M, und es iſt $AP = \delta$, $ACM = \gamma$ gegeben; PN iſt ein andrer Strahl in derſelben Ebene APM,

APM, und die Winkel *MPN*, *MCN* ſind in Vergleichung mit *APM*, *ACM* unendlich klein: man ſoll den Punct *Q* finden, worin beyde Strahlen nach der Brechung in die Lage *Mp*, und *Nq* einander ſchneiden.

Aufl. Daß es einen ſolchen Durchſchnittspunct Q giebt, erhellet daraus, weil A$p = x$ (149. 150. §.) abnimmt, wenn γ wächſt, alſo rückt p nach q, wenn ACM um das Differential MCN wächſt, und Mp wird von Nq in Q geſchnitten. Die Lage der Linie MQ iſt gegeben; denn man hat

$$\sin\alpha = \frac{CP \cdot \sin\gamma}{PM} =$$

$$\frac{(\delta + r)\sin\gamma}{\sqrt{(r^2 - 2r(\delta + r)\cos\gamma + (\delta + r)^2)}},$$ und

$\sin\beta = \frac{1}{\mu}\sin\alpha$, alſo kommt die Auflöſung der Aufgabe nur darauf an, daß man die Gröſſe der Linie MQ ſuche. Mit dem Halbmeſſer PN ſey der Bogen NK zwiſchen den Schenkeln des Winkels MPN, und mit dem Halbmeſſer QN der Bogen NL zwiſchen den Schenkeln des Winkels MQN beſchrieben; ſo iſt QM $= \frac{NL}{MQN}$, und PM $=$ $\frac{NK}{MPN}$. Ferner iſt ApM $= \gamma - \beta$, und AqN $=$ $\gamma - \beta + d\gamma - d\beta$, alſo pQq = MQN = AqN − ApM $= d\gamma - d\beta$. Noch ſetze man APM $=$ π, ſo iſt MPN $= d\pi$. Ueberdem iſt NL $=$ MN $\cos\beta$ und NK $=$ MN $\cos\alpha$; alſo erhält man QM

$QM = \frac{MN . \cos\beta}{d\gamma - d\beta}$, $PM = \frac{MN \cos\alpha}{d\pi}$, und das giebt $\frac{QM}{PM} = \frac{d\pi \cos\beta}{\cos\alpha\,(d\gamma - d\beta)}$. Ferner iſt $\gamma = \alpha - \pi$, alſo $d\gamma = d\alpha - d\pi$, und $\sin\alpha = \mu \sin\beta$, alſo $d\alpha \cos\alpha = \mu d\beta \cos\beta$, und $d\alpha = \frac{\mu d\beta \cos\beta}{\cos\alpha}$; mithin $d\gamma = \frac{\mu d\beta \cos\beta}{\cos\alpha} - d\pi$, und $d\gamma \cos\alpha = \mu d\beta \cos\beta - d\pi \cos\alpha$, alſo erhält man $\frac{QM}{PM} = \frac{d\pi \cos\beta}{\mu d\beta \cos\beta - d\pi \cos\alpha - d\beta \cos\alpha}$, oder wenn man $\frac{d\beta}{d\pi} = u$ ſetzt, $QM = \frac{PM . \cos\beta}{(\mu \cos\beta - \cos\alpha) . u - \cos\alpha}$. Noch hat man $\frac{\sin\pi}{r} = \frac{\sin\alpha}{\delta + r} = \frac{\mu \sin\beta}{\delta + r}$, alſo $\frac{d\pi \cos\pi}{r} = \frac{\mu d\beta \cos\beta}{\delta + r}$, und $\frac{d\beta}{d\pi} = u = \frac{(\delta + r) \cos\pi}{\mu r \cos\beta}$, und man findet $QM =$

$$\frac{\mu . PM . r \cos\beta^2}{\mu(\delta + r) \cos\pi \cos\beta - (\delta + r) \cos\pi \cos\alpha - \mu r \cos\alpha \cos\beta}.$$

Auf den verlängerten Strahl PM ſey CD ſenkrecht gezogen, ſo iſt $PD = (\delta + r) \cos\pi = PM + MD = PM + r \cos\alpha$, und wenn dieſer Werth ſtatt $(\delta + r) \cos\pi$ gebraucht wird, ſo verwandelt ſich die gefundene Formul in folgende $QM =$

$$\frac{\mu . PM . r . \cos\beta^2}{(\mu \cos\beta - \cos\alpha) . PM - r \cos\alpha^2}.$$

 Wenn

Wenn r unendlich groß iſt, das heiſt, wenn ſich die Kugelfläche in eine ebene Fläche verwandelt, ſo hat man $QM = - \frac{\mu\, PM \,.\, coſ\beta^2}{coſ\alpha^2}$, wie im 121. §. und das Zeichen (—) rührt hier nur daher, weil die Linien, welche ſich von der brechenden Fläche nach hinten erſtrecken, poſitiv genommen ſind, in dem Fall des 121. §. aber MQ vor der brechenden Fläche liegt.

In dem Fall, wenn die hohle Seite der Kugelfläche das Licht auffängt, iſt r negativ, und man hat $QM = - \frac{\mu \,.\, PM \,.\, r\, coſ\beta^2}{(\mu\, coſ\beta - coſ\alpha) PM + r\, coſ\alpha^2}$.

Nimmt man an, daß dieſe hohle Seite der Kugelfläche polirt ſey, und das Licht zurück werfe, ſo hat man $\beta = - \alpha$, alſo $\mu = - 1$, weil $ſin\alpha = - ſin\beta$, und $coſ\alpha = coſ\beta$, mithin wird alsdenn $QM = - \frac{PM \,.\, r\, coſ\beta}{2PM - r\, coſ\beta}$, wie im 101. §. woſelbſt $r\, coſ\beta = MD$ war, und das Zeichen (—) zeigt hier wiederum an, daß in dem Fall der Zurückwerfung vom ſphäriſchen Hohlſpiegel MQ vor dem Spiegel liege.

Man laſſe CD und CE auf den einfallenden und gebrochenen Strahl MF, MG, ſenkrecht fallen, ſo iſt $MD = r\, coſ\alpha$, $ME = r\, coſ\beta$, und die für QM gefundene allgemeine Formul im Zähler und Nenner mit r multiplicirt giebt $QM =$
$\frac{\mu \,.\, PM \,.\, r^2\, coſ\beta^2}{(\mu r\, coſ\beta - r\, coſ\alpha)\, PM - r^2\, coſ\alpha^2}$, alſo iſt auch

QM

$$QM = \frac{\mu . PM . ME^2}{(\mu ME - MD) . PM - MD^2},$$ und

wenn die hohle Seite der Kugelfläche das Licht auffängt, $QM = - \frac{\mu . PM . ME^2}{(\mu ME - MD) PM + MD^2}$.

Wenn der einfallende und gebrochene Strahl den gröſten Kreis der Kugel, wozu der Bogen AM gehört, zum zweyten mahl in F und G ſchneiden, und man will die Sehnen MF, MG, in Rechnung bringen, ſo hat man $MD = \frac{1}{2} MF$, $ME = \frac{1}{2} MG$, alſo iſt die allgemeine Formul $MQ = \frac{\frac{1}{2} \mu . PM . MG^2}{(\mu MG - MF) PM - \frac{1}{2} MF^2}$.

159. §.

Weil alle Strahlen, die das Element MN auffängt, nach ihrer Brechung in Q zuſammen laufen, und daſelbſt ein Bild des Puncts P machen, deſſen Stelle von der Stelle des Elements MN abhängt, ſo giebt es auch hier wie im 122 §. eine Linie, worin alle Bilder liegen, eine dioptriſche Brennlinie des Kreiſes, die in dem Fall, wenn die erhabene Seite der Kugelfläche das Licht auffängt phyſiſch, wenn aber die hohle Seite das Licht auffängt, geometriſch iſt, weil die Vereinigungspuncte im letzten Fall Zerſtreuungspuncte werden.

Eine Gleichung für dieſe Linie zwiſchen rechtwinklichten Coordinaten lieſſe ſich auf ähnliche Art finden, wie ſie im 114 §. für die catoptriſche Brennlinie des Kreiſes iſt geſucht worden. Man ſetze nemlich QR und MB auf Ap ſenkrecht, und

nehme $CR = x$, $RQ = y$ an, ſo hat man $Mp : Qp = MB : y$, und $Cp - x : y = CB + Cp : BM$; alſo $y = \frac{MB \cdot Qp}{Mp} = \frac{MB\,(Mp - MQ)}{Mp}$, oder $y = MB - \frac{MB \cdot MQ}{Mp}$, und aus der zweyten Proportion $x = Cp - \frac{(CB + Cp)\,y}{BM}$. Nun ſind BM, QM, Mp, CB, Cp, durch γ gegeben, weil auch α nnd β durch γ gegeben ſind, alſo kann man x und y durch γ ausdrücken, hiernächſt aber γ wegſchaffen, und auf ſolche Art eine Gleichung zwiſchen x und y finden. Die Rechnung läßt ſich zwar auf ähnliche Art weiter fortführen, wie im 114 §. für die catoptriſche Brennlinie des Kreiſes, geſchehen iſt; nur iſt zu bemerken, daß dorten derjenige Winkel α hies, der hier mit γ bezeichnet iſt. Wer in der höhern Geometrie geübt iſt, findet eine ſehr gute und deutliche Anweiſung dazu, wie man über die Natur der Brennlinien überhaupt Unterſuchungen anſtellen kann, in der oben im 114 §. ſchon angeführten Analyſe des infiniment petits pour intelligence des lignes courbes par Mr. le Marquis de l' Hopital, Sect. VI. et VII. auch kann man Smiths Lehrbegrif der Optick von H. Käſtner überſetzt, und zwar der Dioptrick 2. Buch 5 Cap. zu Rath ziehen. Ferner gehört hieher aus Io. Bernoulli Lect. Hoſpital. Lect. LVI — LIX. Operum Tom. III. pag. 546. ſqq. Tſchirnhaus hatte zwar der dioptriſchen Brennlinien erwehnt, ihre Natur aber nicht unterſucht: auch hatte Huygen im Tractatu de lumine die

dioptri-

dioptriſche Brennlinie des Kreiſes nur in dem Fall, wenn die Strahlen mit der Axe parallel auffallen, einigermaſſen beſchrieben. M. ſ. Hugenii Opera Reliqua Vol. I. pag. 88. ſqq.) als Jacob Bernoulli anfieng, die erſten allgemeinen analytiſchen Unterſuchungen darüber anzuſtellen. (M. ſ. Iacobi Bernoullii Opera Tom I. pag. 549. ſqq.

Der XIII. Abſchnitt.

Die Brechung des gleichartigen Lichts, wenn es durch eine Glaslinſe fällt.

159. §.

Sind ein paar Kreisbogen BAD, BGD in einer 57 F. Ebene ſo beſchrieben, daß ſie einander in B und D ſchneiden, und man ziehet die grade Linie zwiſchen ihren Mittelpuncten C und E; ſo halbirt dieſe ihre gemeinſchaftliche Sehne BD in R ſenkrecht, (66 §. Geom.) Man ſtelle ſich vor, die Figur werde um die Axe CE gedrehet, ſo entſteht ein körperlicher Raum, der aus zweenen Kugelabſchnitten zuſammen geſetzt iſt, die gleiche Grundflächen haben, und zwar ſo, daß ihrer beyder Grundflächen zuſammen fallen, und CE ihre gemeinſchaftliche Axe iſt, die zugleich die Axe des linſenförmigen Körpers heiſt, der ſolchergeſtalt zuwege gebracht wird. Giebt man einem

Stück Glas durchs Abſchleifen dieſe Geſtalt, ſo heiſt es eine Glaslinſe, wovon zugleich beyde Kugelflächen, damit das auffallende Licht hindurch dringen kann, gehörig polirt ſeyn müſſen. Eine ſolche Glaslinſe hat einen kreisförmigen Umfang, der durch B und D läuſt in einer auf EC ſenkrechten Ebene: es iſt der Umfang des Kreiſes, welcher die gemeinſchaftliche Grundfläche der beyden Kugelſtücke abgiebt, woraus die Linſe zuſammen geſetzt iſt, BD iſt der Durchmeſſer, RB = RD der Halbmeſſer dieſes Kreiſes. Wenn man vom Umkreiſe des Glaſes redet, ſo verſteht man dieſen Kreis, und ſein Durchmeſſer BD heiſt auch der Durchmeſſer des Glaſes.

160. §.

Wenn ein ſtrahlender Punct P in der Axe des Glaſes befindlich iſt, und ſein Licht auf das Glas wirft, ſo leidet jeder Strahl PM beym Durchgang durch das Glas eine zweymahlige Brechung: einmahl nemlich in der Vorderfläche BAD aus der Lage MH in die Lage MN, und hiernächſt in der Hinterfläche BGD, wenn er aus dem Glaſe wieder in die Luft fährt, aus der Lage NΠ in die Lage N*p*. Uebrigens iſt die Ebene APM beydemahl die Ebene der Brechung, und der ganze zweymahl gebrochene Strahl PMN*p* bleibt in einerley Ebene APM. Denn das erſte Einfallsloth iſt CM, alſo liegt MN in der Ebene des Dreyecks CPM, oder der Ebene APM. In eben dieſer Ebene liegt demnach das zweyte Einfalls-Loth EN, mithin auch der zum zweyten mahl gebrochene Strahl N*p*.

161. §.

Aus der gegebenen Lage des einfallenden Strahls PM durch den Winkel ACM $= \gamma$, oder APM, $= \pi$, nebſt der Entfernung AP $= \delta$ und dem Verhältniß der Refraction $\mu : 1$, läßt ſich die Lage des zum erſtenmahl gebrochenen Strahls MN finden, (149. §.) Wenn nun derſelbe verlängert die Axe der Linſe in Π ſchneidet, ſo kann wiederum aus der Lage des Strahls MN im Glaſe, die vermittelſt des Winkels GEN, und der Entfernung GΠ $=$ AΠ $-$ AG gegeben iſt, die Lage des zum zweytenmahl gebrochenen Strahls Mp gefunden werden. (149. 155. §.) Wenn nun die beyden Kugelſtücke BAD, BGD in Vergleichung mit der völligen Halbkugel ſehr klein ſind, mithin die Winkel ACM, GEN, nur wenige Grade faſſen, wo auch die Puncte M und N hinfallen; ſo haben nicht allein die auf die Vorderfläche BAD fallenden Strahlen ſehr nahe einerley Vereinigungspunct Π, (149. §.) ſondern auch die auf die hintere Fläche BGD fallenden Strahlen haben aus demſelben Grunde wiederum ſehr nahe einerley Vereinigungspunct p, und machen daſelbſt ein Bild des Puncts P. Das Bild iſt deſto deutlicher, je kleiner die Winkel ACM und GEN ſind; haben dagegen dieſe Winkel eine etwas beträchtliche Gröſſe, ſo wird das Bild undeutlich, wegen der Abweichung der gegen den Rand des Glaſes zu auffallenden Strahlen, die von der Kugelgeſtalt herrührt. Die Dioptrick wird von der Würkung dieſer Abweichung wegen der Kugelgeſtalt, wenn das Licht durch Glaslinſen fällt, umſtändlicher handeln: hier werde ich nur die Stelle des deutlichen Bildes

für die Strahlen ſuchen, die ſo nahe bey der Axe auffallen, daß ihre Abweichung beyſeit geſetzt werden kann.

163. §.

57 F. Ein Punct P in der Axe der Glaslinſe $BEDG$ wirft ſein Licht auf ihre Vorderfläche BAD: man ſucht die Stelle des Bildes p in der Axe, welches die zunächſt bey der Axe auffallenden Strahlen nach ihrer zweymahligen Brechung verurſachen.

Aufl. Es ſey AP $= \delta$, CA $= r$, das Verhältniß der Refraction für Luft und Glaß $= m : n$; ſo iſt im 149. 150. §. $\mu = \frac{m}{n}$, und man hat AΠ $= \frac{\mu \delta r}{(\mu - 1)\,\delta - r} = \frac{m \delta r}{(m-n)\,\delta - nr}$. Die Dicke des Glaſes AG ſey $= c$, und G$\Pi = \Delta$, ſo hat man $\Delta =$ A$\Pi - c$, oder $\Delta = \frac{m\delta r}{(m-n)\,\delta - nr} - c = \frac{m\delta r - (m-n)\,\delta c + ncr}{(m-n)\,\delta - nr}$. Ferner ſey G$p$ $= x$, und EG $= \varrho$. Weil nun das Verhältniß der Refraction für Glaß und Luft $= n : m$ iſt, 118. §., ſo hat man im 157. §. $\mu = \frac{n}{m}$, und $x = \frac{\mu \Delta \varrho}{(1-\mu)\,\Delta + \varrho} = \frac{n \Delta \varrho}{(m-n)\,\Delta + m\varrho}$. Das giebt $(m-n)\,x \,.\, \Delta + m\varrho x = n\varrho \,.\, \Delta$, mithin $\Delta = \frac{m\varrho x}{n\varrho - (m-n)\,x}$. Beyde Werthe von Δ gleich

gleich geſetzt geben eine Gleichung für x, die man abkürzt, wenn man $(m-n)\,\delta - nr = h$ ſetzt. Man erhält nemlich $\frac{m\varrho x}{n\varrho-(m-n)\,x} = \frac{mr\delta - h\,.\,c}{h}$, und daraus folgt $m\varrho hx = n\varrho\,(mr\delta - h\,.\,c) - (m-n)\,(mr\delta - hc)\,x$, mithin $x = \frac{n\varrho\,(mr\delta - hc)}{m\varrho h + (m-n)\,(mr\delta - hc)}$. Setzt man nun für h den angenommenen Werth $(m-n)\,\delta - nr$; ſo wird in dem gefundenen Werth von x

der Zähler $= n\varrho\,((mr-(m-n)\,c)\,\delta + nrc)$,

der Nenner

$$= m\varrho\,(m-n)\,\delta - mn\varrho r + (m-n)\,mr\delta - (m-n)^2\,c\delta + (m-n)\,nrc$$

$$= (m-n\,(mr-(m-n)\,c + m\varrho)\,\delta + (m-n)\,nrc - mnr\varrho,$$

alſo $x =$

$$\frac{n\varrho\,((mr-(m-n)\,c)\,\delta + nrc)}{(m-n)\,(mr-(m-n)\,c + m\varrho)\,\delta - (m\varrho-(m-n)\,c)\,nr}.$$

Gewöhnlich iſt die Dicke des Glaſes c in Vergleichung mit den übrigen Linien ſo ſehr klein, daß man die mit c multiplicirten Glieder ohne merklich zu fehlen, weglaſſen kann: alsdenn hat man $x = \frac{n\delta r\varrho}{(m-n)\,\delta\,(r+\varrho) - nr\varrho}$.

163. §.

Weil $m > n$, alſo $m > m-n$ iſt, und überdem gewöhnlich $\varrho > c$, ſo iſt $m\varrho > (m-n)\,c$, und $m\varrho - (m-n)\,c$ eine poſitive Gröſſe. Man dividire den Zähler und Nenner des für x gefun-

denen Werths durch δ, ſo iſt auch $x =$

$$\frac{n\varrho\,(mr - (m-n)\,c + nrc : \delta)}{(m-n)\,(mr - (m-n)\,c + m\varrho) - (m\varrho - (m-n)\,c)\,nr : \delta}.$$

Je gröſſer nun δ genommen wird, deſto kleiner wird x, weil der Zähler abnimmt und der Nenner wächſt. Würde δ unendlich groß, ſo erhielte man $x = \frac{n\varrho\,(mr - (m-n)\,c)}{(m-n)\,(mr - (m-n)\,c + m\varrho)}$. Nimmt dagegen δ ab, ſo wächſt x, und in dem Fall $\delta = \frac{(m\varrho - (m-n)\,c)\,nr}{(m-n)\,(mr - (m-n)\,c + m\varrho}$ wird x unendlich groß, das heiſt, der zum zweyten mahl gebrochene Strahl liegt mit der Axe der Glaslinſe parallel. Wird δ noch kleiner, ſo wird x negativ, und p fällt auf der Seite des Glaſes, wo P liegt. Weil übrigens die Formul von der Gröſſe des Winkels ACM $= \gamma$ nicht abhängt, ſo erhellet, daß alle gleichartige Strahlen, die von P auf das Glaß noch näher bey der Axe als PM auffallen, wie Pm, nach der zweyten Brechung ebenfals durch p laufen. Ja wenn das Glaß im Umfang nur ſo klein iſt, daß der Sinus des Winkels ACD für den Halbmeſſer = 1 von ſeinem Bogen noch ſehr wenig unterſchieden iſt; ſo werden alle Strahlen, die von P auf den Bogen AD, mithin auch diejenigen, welche auf AB fallen, nach der zweyten Brechung durch p gehen. Und weil daſſelbe von allen Strahlen gilt, die in einerley durch die Axe EC geführte Ebene liegen, ſo gilt es von den geſammten Strahlen, die P auf die Vorderfläche BAD des Glaſes werfen kann, oder von dem ganzen auffallenden Strahlenkegel BPD: alle in demſelben enthaltene

Strah-

Strahlen werden in der Linſe ſo gebrochen, daß ſie hinter dem Glaſe wiederum in dem Raum eines Kegels BpD liegen, und p iſt ihrer aller Vereinigungspunct. Zugleich iſt p ein Bild des Puncts P, denn ein Auge, das in der Gegend O ſtehet, empfängt die Strahlen ſo, als kämen ſie von dem Punct p her, und P muß demſelben in p zu ſtehen ſcheinen. Doch muß man hiebey die zum Grunde gelegte Vorausſetzung nicht auſſer Acht laſſen, vermöge der alles auffallende Licht als gleichartig betrachtet wird, damit alle Strahlen nach einerley Geſetz gebrochen werden, oder das Verhältniß $m : n$ für alle einerley ſey.

164. §.

Es ſey F der Vereinigungspunct der Strahlen für den beſondern Fall, wenn P vom Glaſe unendlich weit entfernt iſt, oder wenn alle Strahlen mit der Axe des Glaſes parallel auf die Vorderfläche fallen; ſo iſt $GF =$

$$\frac{n\varrho\,(mr - (m-n)\,c)}{(m-n)\,(mr - (m-n)\,c + m\varrho)};$$

und F heiſt der Brennpunct des Glaſes. (Focus). Wäre die Axe des Glaſes grade gegen den Mittelpunct der Sonne gerichtet, ſo würden alle daher auf das Glas fallende Strahlen mit der Axe parallel einfallen, und in F ihren Vereinigungspunct haben. Die vereinigten Kräfte der Sonnenſtrahlen erzeugen alsdenn daſelbſt eine Hitze, die brennbare Sachen entzünden kann, und daher iſt der Nahme Brennpunct entſtanden. Von jedem andern Punct der Sonne fällt ebenfals ein Strahlen-Cylinder auf

das

das Glas, ob aber, und wo die dazu gehörigen Strahlen einen Vereinigungspunct haben, muß noch weiter unterſucht werden.

Der Abſtand GF heiſt die Brennweite, oder Focal-Diſtanz des Glaſes, und wenn man dieſe $= f$ ſetzt, ſo iſt $f = \frac{n\varrho(mr - (m-n)c)}{(m-n)(m(r+\varrho) - (m-n)c)}$.
Weil aber überhaupt der Abſtand des Bildes vom Glaſe $x =$

$$\frac{n\varrho((mr - (m-n)c)\delta + nrc)}{(m-n)(m(r+\varrho) - (m-n)c)\delta - (m\varrho - (m-n)c)nr}$$

war, ſo kann man im Nenner $n\varrho(mr - (m-n)c) : f$ ſtatt $(m-n)(m(r+\varrho) - (m-n)c)$ ſetzen, und man erhält $x =$

$$\frac{\varrho f((mr - (m-n)c)\delta + nrc)}{\varrho(mr - (m-n)c)\delta - (m\varrho - (m-n)c)rf}.$$

Um die Formuln noch mehr abzukürzen kann man $\frac{m}{m-n} = \mu$, $\frac{m}{m-n} = \nu$ ſetzen, ſo hat man $f =$
$\frac{\nu\varrho(\mu r - c)}{\mu(r+\varrho) - c} = \frac{\nu r\varrho(1 - c : \mu r)}{r + \varrho - c : \mu}$, und $x =$
$\frac{\nu\varrho((\mu r - c)\delta + \nu rc}{(\mu(r+\varrho) - c)\delta - (\mu\varrho - c)\nu r}$, oder $x =$
$\frac{\varrho f((\mu r - c)\delta + \nu rc)}{\varrho\delta(\mu r - c) - rf(\mu\varrho - c)} =$

$$\frac{f\left(\delta + \frac{\nu rc}{(\mu r - c)}\right)}{\delta - \frac{r(\mu\varrho - c)}{\varrho(\mu r - c)} f}.$$

In

In dem Fall, wenn die Dicke des Glaſes in Vergleichung mit den Halbmeſſern beyder Kugelflächen ſehr klein iſt, kann man c als verſchwindend betrachten, und man erhält $f = \frac{\nu r \varrho}{r + \varrho} = \frac{n r \varrho}{(m - n)(r + \varrho)}$, und $x = \frac{\nu r \varrho \delta}{(r + \varrho)\delta - \nu r \varrho} = \frac{n r \varrho \delta}{(m - n)(r + \varrho)\delta - n r \varrho}$, oder $x = \frac{\delta f}{\delta - f}$.

Fiele ein Strahlenkegel ſo auf die Linſe, daß P′ ſeine Spitze wäre, oder alle auffallende Strahlen in dem Punct P′ hinter dem Glaſe zuſammen ließen, ſo würden die Strahlen nach der Brechung in der Axe ebenfals einen Vereinigungspunct haben, deſſen Stelle die für x gefundene Formul giebt, wenn man $-\delta$ ſtatt δ ſchreibt, und alsdenn AP′ durch δ verſteht. Das giebt $x = \frac{rf((\mu r - c)\delta - \nu r c)}{\varrho\delta(\mu r - c) . + rf(\mu\varrho - c)}$, und wenn die Dicke des Glaſes beyſeit geſetzt wird, $x = \frac{\delta f}{\delta + f}$.

165. §.

Wenn beyde Kugelabſchnitte, woraus die Glaslinſe zuſammen geſetzt iſt, ein paar Halbkugeln von gleichen Halbmeſſern ſind, ſo verwandelt ſich die Linſe in eine Kugel. Alsdenn hat man $r = \varrho$, $c = 2r$, und das giebt $f = \frac{r(2n - m)}{2(m - n)}$, und $x = \frac{r((2n - m)\delta + 2nr)}{2(m - n)\delta + (m - 2n)r}$, oder auch $x =$

$\frac{f((2n - m)\delta + 2nr)}{(2n - m)\delta - (2n - m)f}$. Bey der ganzen Kugel können übrigens nie alle Strahlen, die aus einerley Punct der Axe kommen, oder auch mit der Axe parallel auffallen, einen gemeinſchaftlichen Vereinigungspunct haben: obgleich bey Linſen, wenn beyde Kugelflächen in Vergleichung der ganzen Kugelfläche, wozu jede derſelben gehört, ſehr klein ſind, die auffallenden Strahlen ſehr nahe wieder in einerley Punct vereiniget werden. Wie groß die Abweichung jedesmahl ſey, darüber wird die Dioptrick umſtändlichere Unterſuchungen anſtellen.

166. §.

Im 149. §. ward $C\Pi =$

57 F. $\frac{r(\cos\gamma + \sqrt{(\mu^2\lambda^2 - \sin\gamma^2)})}{\mu^2\lambda^2 - 1}$ gefunden, und

es war $\lambda = \frac{PM}{CP} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{\sin\gamma}{\mu\sin\beta}$: demnach iſt $\sqrt{(\mu^2\lambda^2 - \sin\gamma^2)} = \sqrt{\left(\frac{\sin\gamma^2}{\sin\beta^2} - \sin\gamma^2\right)} = \frac{\sin\gamma\sqrt{(1 - \sin\beta^2)}}{\sin\beta} =$

$\frac{\sin\gamma\cos\beta}{\sin\beta}$, alſo $\cos\gamma + \sqrt{(\mu^2\lambda^2 - \sin\gamma^2)} =$

$\cos\gamma + \frac{\sin\gamma\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma}{\sin\beta} =$

$\frac{\sin(\gamma + \beta)}{\sin\beta}$, und $\frac{\cos\gamma + \sqrt{(1 - \sin\beta^2)}}{\mu^2\lambda^2 - 1} =$

sin

$\frac{\sin(\gamma+\beta)}{\sin\beta(\mu^2\lambda^2-1)}$. Weiter iſt $\mu^2\lambda^2 - 1 = \frac{\sin\gamma^2}{\sin\beta^2} - 1 = \frac{\sin\gamma^2 - \sin\beta^2}{\sin\beta^2}$, alſo findet man auch $C\Pi = \frac{r\sin(\gamma+\beta)\sin\beta}{\sin\gamma^2 - \sin\beta^2}$, und weil $\sin\gamma + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\gamma+\beta)\cos\frac{1}{2}(\gamma-\beta)$, $\sin\gamma - \sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\gamma+\beta)\sin\frac{1}{2}(\gamma-\beta)$, (451. §. Geom.) ſo hat man $\sin\gamma^2 - \sin\beta^2 = \sin(\gamma+\beta)\sin(\gamma-\beta)$ (424 §. Geom.) mithin $C\Pi = \frac{r\sin\beta}{\sin(\gamma-\beta)}$. Eben dieſe Formul giebt ſich auch unmittelbar aus Betrachtung des Dreyecks $C\Pi M$, woraus alſo erhellet, daß im 149. §. auch dieſe Formul $C\Pi = \frac{r\sin\beta}{\sin(\gamma-\beta)}$ hätte zum Grunde geſetzt, und jene dort angebene daraus hätte hergeleitet werden können. Denn man ſiehet leicht, daß jene aus dieſer Folge, wenn man die eben vorgetragenen Schlüſſe rückwärts fortführet.

Man ſetze nun den Winkel CEN $= \varepsilon$, den Neigungswinkel an der hintern Fläche der Glaslinſe $ENM = KN\Pi = \eta$, den gebrochenen Winkel $KNp = \vartheta$; ſo ſind $\varepsilon, \eta, \vartheta$, für die hintere Fläche der Linſe, was γ, α, β für die Vorderfläche waren. Für eben dieſe Vorderfläche war $\alpha = \gamma + CPM$, und $E\Pi N$ iſt für die hintere Fläche, was CPM für die Vorderfläche war, alſo iſt $\eta = \varepsilon + E\Pi N$, wie auch die Figur ergiebt, aber ϱ und r ſind einander entgegen geſetzt, mithin iſt $Ep = -$

$\varrho \sin\vartheta$

$\frac{\varrho \sin\vartheta}{\sin(\varepsilon - \vartheta)} = \frac{\varrho \sin\vartheta}{\sin(\vartheta - \varepsilon)}$, wie auch aus Betrachtung des Dreyecks EpN folgt. Wie nun $\varepsilon = \eta - \text{E}\Pi\text{N}$ war, oder $\varepsilon = \eta - \text{C}\Pi\text{M}$, und C$\Pi$M $= \gamma - \beta$, ſo iſt $\varepsilon = \eta + \beta - \gamma$, alſo auch E$p$ $= \frac{\varrho \sin\vartheta}{\sin(\vartheta + \gamma - \eta - \beta)}$.

167. §.

57 F. Die beyden Halbmeſſer CM und EN ſchneiden einander in S unter dem Winkel ESM $= \gamma + \varepsilon = \eta + \beta$, und wenn man durch M und N für die Kreisbogen BAD, BGD ein paar Tangenten ziehet, ſo ſchneiden dieſe einander unter dem Winkel MTN, und es iſt auch MTN = 180 − MSN = ESM $= \gamma + \varepsilon$. Man nehme an, daß ſich der Strahl MP um M gegen ML zu drehe, und zwar ſo, daß ſich γ nicht ändert, mithin M derſelbe Punct bleibt; ſo drehet ſich MΠ gegen MC zu, N rückt gegen G, und der Winkel CEN $= \varepsilon$ nimmt zugleich mit α und β ab. Bevor nun MP in die Lage ML kommt, muß MP in die mit AC parallele Lage gekommen ſeyn, in welchem Fall Π in den Brennpunct der Vorderfläche gerückt iſt. Beym fernern Umdrehen der Linie MP um M fällt P auf der andern Seiten von A, wie in P′, wenn MP in die Lage Mμ gekommen iſt. Alsdenn iſt der Winkel MP′A, was vorhin MPA war, mit entgegen geſetzter Lage, alſo nun $\alpha = \gamma$ − AP′M. Fällt endlich MP mit ML zuſammen, ſo verſchwinden α und β, der Strahl geht durch die Vorderfläche des Glaſes ungebrochen durch,

und

und es wird $AP'M = \gamma$, welches auch die Glei chung $\gamma - AP'M = \alpha = 0$ anzeigt.

Es drehe ſich ferner der einfallende Strahl um M noch weiter über ML weg gegen MQ, ſo wird α negativ, und weil auch β negativ wird, ſo iſt nun $\varepsilon = \eta - \beta - \gamma$, und ε verſchwindet, wenn $\eta - \beta = \gamma$ iſt: alsdenn läuft der zum erſten mahl gebrochene Strahl auf G zu, und N fällt in G: beyde Halbmeſſer CM, EN, ſo wie die Tangenten durch M und N ſchneiden einander nun unter dem Winkel $MTN = \gamma$. Wächſt $-\alpha$ noch weiter, ſo rückt N über G hinaus, ε wird negativ, und man hat $MTN = \gamma - \varepsilon$; bis endlich, wenn nun auf der negativen Seite $\varepsilon = \gamma$ wird, MTN verſchwindet, und beyde Tangenten parallel werden. Es ſey alſo $CEN' = \gamma$, ſo werden, wie auch aus Betrachtung der Figur von ſelbſt erhellet, die Tangenten durch M und N' parallel ſeyn. Erfolgt dies nun, wenn $\alpha = LMQ$ iſt, ſo wird der in N' zum zweyten mahl gebrochene Strahl, nachdem er aus dem Glaſe wieder in die Luft gegangen iſt, mit dem einfallenden QM parallel ſeyn. (117. §.) Wenn man ſich nemlich durch M und N' ein paar Ebenen vorſtellt, welche die Glaslinſe berühren; ſo iſt es für dieſen beſondern Fall einerley, ob der ganze Raum zwiſchen den parallelen Ebenen mit Glaſe angefüllt iſt, oder nur der linſenförmige Raum. 58 F.

168. §.

Die Lage des einfallenden Strahls *MQ* zu finden, welche erfordert wird, damit der zum zweyten mahl gebrochene Strahl mit dem einfallenden parallel ſey. 57 58 F.

Aufl. 1) Vermöge der allgemeinen Formuln des 166. §. iſt allemahl $\varepsilon = \eta + \beta - \gamma$; und wenn man, wie im 162. §. $G\Pi = \Delta$, $AG = c$ ſetzt, ſo iſt $\sin\eta = \frac{(\Delta + \varrho)\sin(\gamma - \beta)}{\varrho}$, ſo wie

58 F. $\Delta = C\Pi + r - c = \frac{r \sin\beta}{\sin(\gamma - \beta)} + r - c$. In dieſem beſondern Fall hat $M\Pi$ die Lage $M\pi$, und man ſucht eigentlich den Werth $\Delta = G\pi$: in eben dieſem beſondern Fall aber iſt $\beta = -\eta$, alſo vermöge der erſten Gleichung $\varepsilon = \gamma$, wie erfordert wird. Man ſetze alſo auch in der zweyten und dritten Gleichung $\beta = -\eta$, ſo hat man aus der zweyten $\frac{\varrho \sin\eta}{\sin(\eta + \gamma)} = \Delta + \varrho$, und aus der dritten

$\Delta = r - \frac{r \sin\eta}{\sin(\eta + \gamma)} - c$. Dieſer Werth in der zweyten Gleichung gebraucht giebt $\frac{\varrho \sin\eta}{\sin(\eta + \gamma)}$

$= r - \frac{r \sin\eta}{\sin(\eta + \gamma)} - c + \varrho$, und daraus erhält man $\frac{(r + \varrho)\sin\eta}{\sin(\eta + \gamma)} = r + \varrho - c$, mithin

$$\frac{\sin\eta}{\sin(\eta + \gamma)} = \frac{\tan\eta}{\cos\gamma \,.\, \tan\eta + \sin\gamma} =$$

$\frac{r + \varrho - c}{r + \varrho}$, oder $\cos\gamma + \cot\eta \sin\gamma = \frac{r + \varrho}{r + \varrho - c}$.

Das giebt $\cot\eta = \frac{r + \varrho - (r + \varrho - c)\cos\gamma}{(r + \varrho - c)\sin\gamma}$,

und

und $\tan\eta = \frac{(r+\varrho-c)\sin\gamma}{r+\varrho-(r+\varrho-c)\cos\gamma}$. Eben dieſer Werth iſt alſo $= \tan\beta$, und man kann von nun an, das Zeichen (—) vor β weglaſſen, weil man nur die Gröſſe dieſes Winkels ſucht, da dann ferner $\sin\alpha = \frac{m}{n}\sin\beta$ gefunden wird. Um aber eine Gleichung zwiſchen α und γ zu erhalten, nehme man die Gleichung $\sin\beta = \frac{n}{m}\sin\alpha$, woraus $\cos\beta = \frac{\sqrt{(m^2 - n^2\sin\alpha^2)}}{m}$, und $\tan\beta = \frac{n\sin\alpha}{\sqrt{(m^2 - n^2\sin\alpha^2)}}$ gefunden wird. Dieſem nach erhält man $\frac{n\sin\alpha}{\sqrt{(m^2 - n^2\sin\alpha^2)}} = \frac{(r+\varrho-c)\sin\gamma}{r+\varrho-(r+\varrho-c)\cos\gamma}$. Um abzukürzen, ſetze man den Ausdruck hinter dem Gleichheitszeichen $= G$, ſo iſt $n^2\sin\alpha^2 = m^2G^2 - n^2G^2\sin\alpha^2$, und man findet $\sin\alpha^2 = \frac{m^2G^2}{n^2(1+G^2)}$. Man ſetze $\frac{r+\varrho}{r+\varrho-c} = \lambda$, ſo iſt $G^2 = \frac{\sin\gamma^2}{\lambda^2 - 2\lambda\cos\gamma + \cos\gamma^2}$, und $1 + G^2 = \frac{\lambda^2 - 2\lambda\cos\gamma + 1}{\lambda^2\ 2\lambda\cos\gamma + \cos\gamma^2}$, mithin $\sin\alpha =$

$\frac{m \sin\gamma}{n \surd (\lambda^2 - 2\lambda \cos\gamma + 1)}$. Weil $\lambda > 1$ iſt, ſo iſt $\lambda^2 + 1 > 2\lambda$. Denn es ſey $\lambda = 1 + \omega$, ſo iſt $\lambda^2 + 1 = 2 + 2\omega + \omega^2$, und $2\lambda = 2 + 2\omega$: mithin iſt $\sin\alpha$ allemahl möglich.

2) Setzt man den Werth $\frac{\sin\eta}{\sin(\eta + \gamma)} = \frac{r + \varrho - c}{r + \varrho}$ in die Gleichung $\Delta = r - c - \frac{r \sin\eta}{\sin(\eta + \gamma)}$, ſo erhält man $\Delta = r - c - \frac{r(r + \varrho - c)}{r + \varrho} = \frac{(r - c)(r + \varrho) - r(r + \varrho - c)}{r + \varrho}$, d. i. $\Delta = -\frac{c\varrho}{r + \varrho}$. Das Zeichen (—) zeigt die Lage an, daß $G\pi = \Delta$ negativ ſey, oder π auf der Seite von G liege, wo A liegt. Wenn alſo die Gröſſe der Linie $G\pi$ allein in Betrachtung kommt, ſo hat man $G\pi = \frac{c \cdot r}{r + \varrho}$, woraus auch $A\pi = c - G\pi = \frac{c \cdot r}{r + \varrho}$ gefunden wird. Ferner hat man $C\pi = r - c + G\pi = r - c + \frac{c\varrho}{r + \varrho} = \frac{r(r + \varrho) - cr}{r + \varrho}$, oder $C\pi = \frac{r(r + \varrho - c)}{r + \varrho}$, und jede dieſer drey Gleichungen beſtimmt den Punct π, worin der zum erſten mahl gebrochene Strahl die Axe ſchneiden muß, damit der zum

zwey-

zweyten mahl gebrochene mit dem einfallenden Strahl parallel ſey.

3) Weil der Werth $G\pi = \frac{c\varrho}{r+\varrho}$ von γ nicht abhängt, ſo müſſen alle Strahlen, die in der Linſe ſo gebrochen werden, daß ſie hinter derſelben in die mit dem einfallenden Strahl parallele Lage kommen, nach der erſten Brechung durch einerley Punct π laufen. Und weil für jeden Winkel γ ein möglicher Werth für β und α gefunden wird, ſo kann auf jeden Punct M der Linſe ein Strahl ſo fallen, wie dieſe Vorausſetzung erfordert.

4) Wäre ſtatt der Linſe eine völlige Kugel gegeben, ſo hätte man $r = \varrho$, $c = 2r$, mithin $\tang \beta = 0$, alſo $\beta = 0$, $\alpha = 0$, und $G\pi = r$, wie der Natur der Kugel gemäß iſt, weil jeder Strahl, der ſo auffällt, daß ſeine Richtung durch den Mittelpunct geht, ungebrochen durchdringt.

5) Der einfallende Strahl QM ſchneidet die Axe der Linſe in P′ und es iſt hier AP′, was im 162. §. das dortige δ war. Man hat aber auch im Dreyeck CP′M die Seite $CP' = \frac{r \sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}$, wodurch die Lage des einfallenden Strahls beſtimmt wird, weil derſelbe durch P′ gehen muß. Nachdem α aus γ gefunden iſt, kann demnach auch CP′ gefunden werden.

169. §.

Von einem Punct Q auſſerhalb der Axe 59 F.
CE der Linſe fällt ein Strahl *QM* auf dieſelbe; man ſucht, was *QM* für eine Lage

haben muß, damit die Lage des Strahls nach der zweyten Brechung mit der Lage des auffallenden Strahls parallel ſey.

Aufl. 1) Man ziehe QC nach den Mittelpunct C der Vorderfläche der Linſe, und QP ſey auf ihrer Axe ſenkrecht. Der Strahl QM ſchneide die Axe in O und werde zum erſten mahl in die Lage $M\pi$ gebrochen, ſo iſt $CMO = \alpha$, $CM\pi = \beta$, $ACM = \gamma$, $AOM = \alpha + \gamma$, und CO iſt, was am Ende des vor. §. CP′ war. Weiter ſey $CP = a$, $PQ = b$, $CO = y$, ſo iſt $b = (a - y) \operatorname{tang} (\alpha + \gamma)$.

Es war aber $y = \frac{r \sin\alpha}{\sin (\alpha + \gamma)}$, 168. §. n. 5.)

alſo erhält man $\left(a - \frac{r \sin\alpha}{\sin (\alpha + \gamma)}\right) . \operatorname{tang} (\alpha + \gamma) = b$, oder $a \sin (\alpha + \gamma) - r \sin\alpha = b \cos (\alpha + \gamma)$. Das giebt ferner $a \sin\alpha \cos\gamma + a \cos\alpha \sin\gamma - r \sin\alpha = b \cos\alpha \cos\gamma - b \sin\alpha \sin\gamma$, oder $a \cos\gamma \operatorname{tang}\alpha + a \sin\gamma - r \operatorname{tang}\alpha = b \cos\gamma - b \sin\gamma \operatorname{tang}\alpha$, mithin $\operatorname{tang}\alpha =$

$$\frac{b \cos\gamma - a \sin\gamma}{a \cos\gamma + b \sin\gamma - r}, \ \sec\alpha =$$

$$\frac{\sqrt{(a \cos\gamma + b \sin\gamma - r)^2 + b \cos\gamma - a \sin\gamma)^2}}{a \cos\gamma + b \sin\gamma - r}$$

$$= \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 + r^2 - 2r (a \cos\gamma + b \sin\gamma))}}{a \cos\gamma + b \sin\gamma - r},$$

folglich $\sin\alpha = \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\sec\alpha} =$

$$\frac{b \cos\gamma - a \sin\gamma}{\sqrt{(a^2 + b^2 + r^2 - 2r (a \cos\gamma + b \sin\gamma))}}.$$

Wenn

Wenn nun der auffallende Strahl die verlangte Lage haben ſoll, ſo muß er nach der erſten Brechung die Axe in einem Punct π ſchneiden, deſſen Stelle vermittelſt der Gleichung $C\pi = \frac{r(r+\varrho-c)}{r+\varrho}$ gegeben iſt, und das wird erfolgen, wenn $\sin\alpha = \frac{m \sin\gamma}{n\sqrt{(\lambda^2 - 2\lambda\cos\gamma + 1)}}$ iſt, vermöge des 168 §. n. 1. 2. woſelbſt $\lambda = \frac{r+\varrho}{r+\varrho-c}$ war. Wenn alſo $C\pi = h$ geſetzt wird, ſo hat man $h = r:\lambda$, und $\lambda h = r$. Man multiplicire den Zähler und Nenner des Bruchs, welcher $\sin\alpha$ ausdrückte mit h und nehme $\mu = \frac{m}{n}$ an, ſo hat man $\sin\alpha = \frac{\mu h \sin\gamma}{\sqrt{(r^2 + h^2 - 2rh\cos\gamma)}}$, und dieſer Werth dem vorigen gleich geſetzt, giebt für den Winkel γ die Gleichung $\frac{\mu h \sin\gamma}{\sqrt{(r^2 + h^2 - 2rh\cos\gamma)}} =$

$$\frac{b\cos\gamma - a\sin\gamma}{\sqrt{(a^2 + b^2 + r^2 - 2r(a\cos\gamma + b\sin\gamma))}}.$$

Um noch mehr abzukürzen, ſetze man $a^2 + b^2 + r^2 = p^2$, und $r^2 + h^2 = q^2$, ſo findet man

$$\frac{\mu^2 h^2 \tan g\gamma^2}{q^2 \sec\gamma - 2rh} = \frac{(b - a\tan g\gamma)^2}{p^2 \sec\gamma - 2r(a + b\,tg\gamma)},$$

alſo $\mu^2 h^2 p^2 tg\gamma^2 \sec\gamma - 2\mu^2 h^2 r (a + b\,tg\gamma) tg\gamma^2 = q^2 (a\,tg\gamma - b)^2 \sec\gamma - 2rh (a\,tg\gamma - b)^2$, und $(\mu^2 h^2 p^2 tg\gamma^2 - q^2 (a\,tg\gamma - b)^2) \sec\gamma = 2hr(\mu^2 h (a + b\,tg\gamma) tg\gamma^2 - a\,tg\gamma - b)^2)$,

 oder

oder $(\mu^2 h^2 p^2 - a^2 q^2)\,\mathrm{tg}\gamma^2 + 2abq^2\,\mathrm{tg}\gamma - b^3 q^2)\,\mathrm{sec}\gamma = 2hr(\mu^2 hb\,\mathrm{tg}\gamma^3 + (\mu^2 ha - a^2)\,\mathrm{tg}\gamma^2 + 2ab\,\mathrm{tg}\gamma - b^2)$. Man ſetze $\mu^2 h^2 p^2 - a^2 q^2 = A^4$, und $a - \mu^2 h = f$, ſo hat man $(A^4\,\mathrm{tg}\gamma^2 + 2ab\,q^2\,\mathrm{tg}\gamma - b^2 q^2)\,\mathrm{sec}\gamma = 2hr(\mu^2 hb\,\mathrm{tg}\gamma^3 - af\,\mathrm{tg}\gamma^2 + 2ab\,\mathrm{tg}\gamma - b^2)$; ferner quadrire man auf beyden Seiten und ordne alles nach den Potenzen von $\mathrm{tg}\gamma$, ſo wird folgende Gleichung gefunden.

$$\left.\begin{array}{l} A^8 \\ -4\mu^4 b^2 h^4 r^2 \end{array}\right\} .\,\mathrm{tg}\gamma^6 + \left.\begin{array}{l} 4A^4\,ab\,q^2 \\ +8\mu^2 abfh^3 r^2 \end{array}\right\} .\,\mathrm{tg}\gamma^5$$

$$+\left.\begin{array}{l} 4a^2 b^2 q^4 \\ -2A^4 b^2 q^2 \\ +A^8 \\ -4a^2 f^2 h^2 r^2 \\ -16\mu^2 ab^2 h^3 r^2 \end{array}\right\} .\,\mathrm{tg}\gamma^4 - \left.\begin{array}{l} 4ab^3 q^4 \\ +4A^4 abq^2 \\ +16a^2 bfh^2 r^2 \\ +8\mu^2 b^3 h^3 r^2 \end{array}\right\} .\,\mathrm{tg}\gamma^3$$

$$+\left.\begin{array}{l} b^4 q^4 \\ +4a^2 b^2 q^4 \\ -2A^4 b^2 q^2 \\ -16a^2 b^2 h^2 r^2 \\ -8ab^2 fh^2 r^2 \end{array}\right\} .\,\mathrm{tg}\gamma^2 - \left.\begin{array}{l} 4ab^3 q^4 \\ +16ab^3 h^2 r^2 \end{array}\right\} .\,\mathrm{tg}\gamma$$

$$+\left.\begin{array}{l} b^4 q^4 \\ -4b^4 h^2 r^2 \end{array}\right\} = 0.$$

Es laſſen ſich keine allgemeine Formuln für die ſechs Wurzeln dieſer Gleichung finden, mithin läßt ſich auch die Auflöſung der vorgelegten Aufgabe, ſo wie ſie bisher in der gröſten Allgemeinheit betrachtet iſt, nicht weiter treiben. Wenn übrigens der Winkel γ gefunden iſt, ſo hat man auch $CO = y = \frac{r\,\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}$. Es iſt nemlich

ſinα

$$\sin\alpha = \frac{\mu h \sin\gamma}{\sqrt{(r^2 + h^2 - 2rh \cos\gamma)}},$$ alſo $\cos\alpha =$

$$\frac{\sqrt{(r^2 + h^2 - 2rh \cos\gamma - \mu^2 h^2 \sin\gamma^2)}}{\sqrt{(r^2 + h^2 - 2rh \cos\gamma)}},$$

und man findet $\sin(\alpha + \gamma) =$

$$\frac{\mu h \sin\gamma \cos\gamma + \sin\gamma \sqrt{(r^2 + h^2 - 2rh \cos\gamma - \mu^2 h^2 \sin\gamma^2)}}{\sqrt{(r^2 + h^2 - 2rh \cos\gamma)}}.$$

Demnach erhält man ferner $y =$

$$\frac{\mu h r}{\mu h \cos\gamma + \sqrt{(r^2 + h^2 - 2hr \cos\gamma - \mu^2 h^2 \sin\gamma^2)}}.$$

170. §.

In dem beſondern Fall, wenn das Glaß eine ganze Kugel iſt, hat man $h = 0$, $q^2 = r^2$, $f = a$, alſo $\Lambda^4 = -a^2 r^2$, und die Gleichung verwandelt ſich in folgende

$$a^4 r^4 . \text{tg}\gamma^6 + 4a^3 br^4 . \text{tg}\gamma^5 + \left.\begin{matrix} 4a^2 b^2 r^4 \\ + 2a^2 b^2 r^4 \\ + a^4 r^4 \end{matrix}\right\} . \text{tg}\gamma^4$$

$$\left.\begin{matrix} -4ab^3 r^4 \\ -4a^3 br^4 \end{matrix}\right\} . \text{tg}\gamma^3 + \left.\begin{matrix} b^4 r^4 \\ + 4a^2 b^2 r^4 \\ + 2a^2 b^2 r^4 \end{matrix}\right\} . \text{tg}\gamma^2$$

$-4ab^3 r^4 . \text{tg}\gamma + b^4 r^4 = 0$, oder

$$a^4 \text{tg}\gamma^6 - 4a^3 b . \text{tg}\gamma^5 + a^2 (a^2 + 6b^2) \text{tg}\gamma^4 - 4ab (a^2 + b^2) . \text{tg}\gamma^3 + b^2 (b^2 + 6a^2) \text{tg}\gamma^2 - 4ab^3 . \text{tg}\gamma + b^4 = 0.$$

Dieſe Gleichung läßt ſich auch ſo ausdrücken $(a^2 \text{tg}\gamma^2 - 2ab \text{tg}\gamma + b^2)^2 (\text{tg}\gamma^2 + 1) = 0$, oder $(a \text{tg}\gamma - b)^4 (\text{tg}\gamma^2 + 1) = 0$, und ſo ergiebt ſich gleich, daß entweder $a \text{tg}\gamma - b = 0$,

oder $tg\gamma^2 + 1 = 0$ ſeyn müſſe. Letzteres iſt unmöglich, alſo kann den Bedingungen der Aufgabe, wenn das Glas eine ganze Kugel iſt, nur alsdenn ein Genüge geſchehen, wenn $\tang\gamma = \frac{b}{a}$ iſt. Das heiſt, wenn QM mit QC zuſammen fällt, und der Strahl QM durch der Kugel Mittelpunct gehet. Alsdenn geht, wie ſchon bekannt iſt, der Strahl ungebrochen durch, und keiner von den übrigen aus Q einfallenden Strahlen kann ſo gebrochen werden, daß er nach der zweyten Brechung mit der erſten Lage parallel in die Luft fährt. Vier von den Wurzeln der Gleichung werden in dieſem Fall gleich groß, jede $= \frac{b}{a}$, die beyden übrigen aber ſind unmöglich.

171. §.

59 Ob nun gleich die gefundene allgemeine Glei-
60 F. chung allemahl ſechs Wurzeln hat; ſo ſind ſie doch nicht allemahl insgeſammt möglich, wie davon der eben angeführte beſondre Fall eine Probe giebt. Selbſt unter den möglichen Wurzeln muß noch eine jede geprüft werden, ob ſie für $\sin\alpha$ einerley giebt, man mag dieſe Wurzel in der Gleichung

$$\sin\alpha = \frac{b \cos\gamma - a \sin\gamma}{\sqrt{(a^2 + b^2 + r^2 - 2r(a \cos\gamma + b \sin\gamma)}},$$

$$= \frac{b - a \tang\gamma}{\sqrt{(p^2 \sec\gamma^2 - 2r(a + b\, tg\gamma) \sec\gamma)}},$$ oder in der Gleichung $\sin\alpha = \frac{\mu h \sin\gamma}{\sqrt{(r^2 + h^2 - 2rh \cos\gamma)}}$

=

$= \frac{\mu h \tang\gamma}{\surd(q^2 \sec\gamma^2 - 2rh \sec\gamma)}$ ſtatt $\tang\gamma$ ſetzen. Soll der Strahl, wie vorausgeſetzt wird, aus Q auf das Glas fallen, ſo kann ſich der Strahl QMF = CMS nur nach dem Geſetz mit γ ändern, welches die Gleichung $\sin CMS =$

$\frac{b - a \tang\gamma}{\surd(p^2 \sec\gamma^2 - 2r(a + b \tg\gamma) \sec\gamma}$ ausdrückt. Ich will nun um mehrerer Deutlichkeit willen dieſen Winkel = ζ ſetzen, den Winkel aber, unter welchem der Strahl QM einfallen muß, damit derſelbe nach der erſten Brechung durch π gehe, wie bisher = α; ſo iſt $\sin\alpha =$

$\frac{\mu h \tang\gamma}{\surd(q^2 \sec\gamma^2 - 2rh \sec\gamma)}$, $\sin\zeta =$

$\frac{b - a \tang\gamma}{\surd p^2 \sec\gamma^2 - 2r(a + b \tg\gamma) \sec\gamma}$, und die Aufgabe verlangt, daß $\zeta = \alpha$ ſeyn ſoll. Statt der Winkel werden ihre trigonometriſchen Linien in Rechnung gebracht, und um die Wurzelzeichen wegzuſchaffen, quadrirt man auf beyden Seiten; dadurch gewinnt die Gleichung ſelbſt einen gröſſern Umfang als die vorgelegte Frage, und ſie beſtimmt denjenigen Werth, der ſtatt γ geſetzt werden muß, damit $\sin\zeta^2 = \sin\alpha^2$ werde. Weil nun $\sin\zeta^2$ poſitiv bleibt, wenn gleich $\sin\zeta$ negativ iſt, ſo muß die Gleichung zugleich die Werthe von $\tang\gamma$ angeben, welche erfordert werden, wenn $(-\sin\zeta)^2 = \sin\alpha^2$ ſeyn ſoll. Hierin liegt nun ſchon ein Grund von der Mannigfaltigkeit der Wurzeln; wozu noch kommt, daß zum zweyten mahl quadrirt

werden

werden muſte, um $\sec\gamma$ durch $\tan g\gamma$ rational auszudrücken. Dieſemnach muß die Gleichung alle Werthe angeben, welche ſtatt γ geſetzt werden können, damit die Winkel ζ und α gleiche Sinus und Coſinus erhalten, dieſe Sinus und Coſinus mögen übrigens der Lage nach verſchieden ſeyn, oder nicht. Folgende Betrachtung der Figur wird es ins Licht ſetzen, warum die Anzahl der Wurzeln auf ſechs ſteigen kann.

172. §.

60 F. 1) Zuerſt betrachte man den Winkel $\zeta = QMF = CMS$, ſo erhellet, daß derſelbe $= QAP$ ſey, wenn $\gamma = ACM = 0$ genommen wird. Die Gleichung giebt alsdenn $\sin\zeta = \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2 + r^2 - 2ar)}}$ $= \frac{b}{\sqrt{(b^2 + (a-r)^2}}$, wie erfordert wird. Wächſt γ, ſo nimmt ζ ab, und verſchwindet, wenn $\gamma = ACQ$ oder $\tan g\gamma = \frac{b}{a}$ iſt. Wird γ noch gröſſer, ſo wird ζ negativ, und erhält in Abſicht des Einfallsloths die entgegen geſetzte Lage. Weil es aber hier nur auf die Gröſſe des Winkels oder vielmehr ſeines Sinus ankommt, ohne daß die Lage etwas ändert, ſo erwäge man, daß der Winkel ζ und mit ihm ſein Sinus ſo lange wachſe bis CM durch CN nach CG gerückt iſt, und der auffallende Strahl QG den Kreis berührt, da dann $\zeta = CGQ = 90°$ und $\sin\zeta = 1$ iſt.

Bevor

Bevor man die fernern Aenderungen in Erwägung ziehet, die mit ζ vorgehen, wenn γ noch weiter wächſt, kehre man zuforderſt zur Betrachtung des Winkels α zurück, der die Eigenſchaft haben muß, daß ſein Sinus $= \mu \sin CM\pi$ iſt. Hiebey hat man zu bemerken, daß $C\pi$ eine durch die Geſtalt der Linſe beſtimmte Linie, und $\mu = \frac{m}{n}$ eine gegebene Zahl iſt, daß mithin μ und $C\pi = h$ ſich nicht mit γ ändern. Demnach ändert ſich $\sin\alpha$ allemahl in einerley Verhältniß mit $\sin CM\pi = \sin\beta$. Man ziehe alſo $M\pi$, und nehme CMR ſo groß an, daß $\sin CMR = \mu \sin CM\pi$ ſey, ſo iſt $CMR = \alpha$, ſo wie nun $CM\pi$ durch β verſtanden wird. Nun erhellet, daß β alſo auch α mit γ verſchwinde, und daß jene beyden Winkel β und α mit γ anfangs zugleich wachſen. Es iſt aber $\sin\beta = \frac{h \sin (\beta + \gamma}{r}$, mithin kann $\sin\beta$ nur ſo lange wachſen, bis $\beta + \gamma = 90°$, oder $\beta = 90° - \gamma$ iſt. Alsdenn hat man $\sin\beta = \frac{h}{r}$, und weil $C\pi M = 180° - (\beta + \gamma)$ iſt, ſo wird nun $C\pi M = 90°$; auch iſt $\cos\gamma = \sin\beta = \frac{h}{r}$. Man ſetze πK auf $C\pi$ ſenkrecht, ſo erhellet, daß M nach K gerückt ſeyn müſſe, wenn $\beta = CM\pi$ am gröſten iſt, daß mithin $CK\pi$ der gröſte Werth des Winkels β ſey. Wie nun in eben dieſem Fall $\sin\gamma = \frac{\sqrt{(r^2 - h^2)}}{r}$ iſt, ſo erhellet, daß β und α, ſo

wie

wie ihre Sinus wieder abnehmen, wenn ſin $\gamma >$ $\frac{\sqrt{(r^2 - h^2)}}{r}$ wird.

2) Vergleicht man dieſe Aenderungen des Winkels α mit den Aenderungen des Winkels ζ ſo erhellet nun ſoviel, daß ζ zweymahl $= \alpha$ werden müſſe, indem γ von o bis zur Grenze ACG wächſt. Indem nemlich der Punct M von A bis m rückt, nimmt α zu von o bis zur Gröſſe Cmr, und ζ war anfangs = QAP, nimmt aber bis auf o ab, wenn M nach m rückt, alſo muß es einen Winkel γ zwiſchen o und ACm geben, dem gleiche Werthe von ζ und α zugehören. Indem M nach m rückt, drehet ſich MS bis in MC, und MR drehet ſich gegen MS zu, alſo muß es einen Fall geben, wo MS mit MR zuſammen fällt. Geſetzt, dies trage ſich zu, wenn M bis μ gerückt iſt, ſo iſt tg. ACμ eine Wurzel der Gleichung im 169. §. Zugleich iſt dies eine Wurzel, welche die Aufgabe, ſo wie ſie dort vorgetragen iſt, auflöſet, weil Qμ ein Strahl iſt, der aus Q auf die Linſe fällt. Drehet ſich CM weiter gegen CG in die Lage CN, ſo iſt CNr der Winkel ζ; ob nun gleich derſelbe in Abſicht des vorigen negativ iſt, ſo kommt es hier doch nur auf die Gröſſe nicht auf die Lage ſeines Sinus an. Deswegen iſt nur zu bemerken, daß ζ von o° bis 90° wachſe, wenn ſich CM von der Lage Cm bis in die Lage CG drehet. Zugleich wächſt C$mr = \alpha$, und zwar ſo lange, bis πm ſich in die Lage πK gedrehet hat, die auf Cπ ſenkrecht iſt, und alsdenn hat man ſin$\alpha = \frac{m}{n} \cdot \frac{h}{r} =$ ſin CKT. Dieſer

ſer Ausdruck kann nicht gröſſer als 1 werden, mithin muß h nicht gröſſer als $\frac{n}{m}r$ ſeyn, wenn α dieſe Gränze erreichen ſoll. Dies alſo vorausgeſetzt, wird es möglich ſeyn, daß ζ aufs neue $= \alpha$, werde, bevor noch $\gamma =$ ACK wird, oder Cm in die Lage CK kommt. Es iſt nemlich ſin ACK $= \frac{\sqrt{(r^2 - h^2)}}{r}$, und ſin CKT $= \frac{mh}{nr}$: nachdem alſo $\frac{m^2 h^2}{n^2 r^2} \gtreqless 1 - \frac{h^2}{r^2}$ iſt, oder $\left(\frac{m^2}{n^2} + 1\right) \frac{h^2}{r^2} \gtreqless 1$, oder auch $h^2 \gtreqless \frac{n^2}{m^2 + n^2} \cdot r^2$, nachdem iſt ſin CKT $\gtreqless$ ſin ACK. In der 60. Figur iſt angenommen, daß PQ $= b <$ πK ſey, wenn alſo QW durch K gezogen wird, ſo iſt CKW für dieſe Stelle $= \zeta$, und zugleich CKW $>$ ACK. Iſt alſo $h =$ oder $< \frac{n}{\sqrt{(m^2 + n^2)}} \cdot r$, ſo iſt CKW $>$ CKT, mithin nun ſchon $\zeta > \alpha$, und es muß vorher $\zeta = \alpha$ geweſen ſeyn. Wofern dies erfolgt, wenn Cm in die Lage CN gekommen iſt; ſo iſt tang ACN die zweyte Wurzel der Gleichung des 169. §. aber dieſe Wurzel iſt nicht eigentlich die geſuchte, weil der in der Richtung Nϱ auffallende Strahl nicht von dem gegebenen Punct Q auffallen kann. Für die Strahlen welche von Q auf die Linſe fallen können, muß der Winkel α eine Lage haben,

haben, die der Lage des Winkels CNϱ wie CNε entgegen geſetzt iſt.

3) Die Aenderungen, welche mit ζ vorgehen, wenn γ Aenderungen leidet, hängen auſſer dem Halbmeſſer r des Kreiſes von den Linien CP $= a$, und PQ $= b$ ab, weil ſin$\zeta =$

$$\frac{b \operatorname{coſ}\gamma - a \operatorname{ſin}\gamma}{\sqrt{(a^2 + b^2 + r^2 - 2r(b \operatorname{ſin}\gamma + a \operatorname{coſ}\gamma))}}$$ war.

Um alſo zu finden, wie groß γ ſeyn muß, damit $\zeta = 90°$ werde, ſetze man ſin$\zeta = 1$, ſo wird erfordert, daß $a^2 + b^2 + r^2 - 2r(b \operatorname{ſin}\gamma + a \operatorname{coſ}\gamma) = (b \operatorname{coſ}\gamma - a \operatorname{ſin}\gamma)^2$ ſey. Man ſetze ACQ $= \omega$, alſo $\frac{b}{a} = \operatorname{tang}\omega$, $\frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} = \operatorname{ſin}\omega$; $\frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} = \operatorname{coſ}\omega$; überdem ſey ε der ſcheinbare Halbmeſſer des Kreiſes oder der Kugel aus Q geſehen: ſo iſt $\frac{r}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} = \operatorname{ſin}\varepsilon$, $\operatorname{coſ}\varepsilon = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 - r^2)}}{\sqrt{)a^2 + b^2)}}$, und man erhält $1 + \operatorname{ſin}\varepsilon^2 - 2\operatorname{ſin}\varepsilon(\operatorname{ſin}\omega \operatorname{ſin}\gamma + \operatorname{coſ}\omega \operatorname{coſ}\gamma) = (\operatorname{ſin}\omega \operatorname{coſ}\gamma - \operatorname{coſ}\omega \operatorname{ſin}\gamma)^2$, oder $1 + \operatorname{ſin}\varepsilon^2 - 2\operatorname{ſin}\varepsilon \operatorname{coſ}(\gamma - \omega) = \operatorname{ſin}(\gamma - \omega)^2 = 1 - \operatorname{coſ}(\gamma - \omega)^2$, mithin $\operatorname{coſ}(\gamma - \omega)^2 - 2\operatorname{ſin}\varepsilon \operatorname{coſ}(\gamma - \omega) + \operatorname{ſin}\varepsilon^2 = 0$, das giebt $\operatorname{coſ}(\gamma - \omega) = \operatorname{ſin}\varepsilon$, alſo $90° - \gamma + \omega = \varepsilon$, oder $\gamma = \omega + 90° - \varepsilon$, wie auch aus Betrachtung der Figur ſogleich erhellet. Man erhält alſo $\operatorname{ſin}\gamma = \operatorname{coſ}(\varepsilon - \omega) = \operatorname{coſ}\varepsilon \operatorname{coſ}\omega + \operatorname{ſin}\varepsilon \operatorname{ſin}\omega$

$$= \frac{a\sqrt{(a^2 + b^2 - r^2)} + rb}{a^2 + b^2} = \operatorname{ſin} ACG,$$ und

oben

oben war ſin ACK $= \frac{\sqrt{(r^2 - h^2)}}{r}$: je gröſſer alſo r in Vergleichung mit $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ und in Vergleichung mit h iſt, deſto kleiner iſt ACG, aber ACK deſto gröſſer, welches ebenfals aus Betrachtung der Figur klar iſt. Demnach kann ACG kleiner als ACK ſeyn, ſo daß G zwiſchen m und K fällt, und alsdenn wird $\zeta = 90°$, bevor noch α den gröſten Werth CKT erreicht hat.

4) Geſetzt G fiele in g, wie wenn der Strahl aus q auffiele; ſo iſt $\zeta = 90°$, wenn Cm bis Cg gerückt iſt, aber noch iſt alsdenn α nicht am gröſten. Rückt alſo Cg weiter gegen CK, ſo nimmt ζ ſchon wieder ab, aber α wächſt noch, mithin könnten wohl beyde Werthe von ζ und α von neuen ſo zuſammen treffen, daß $\sin\zeta^2 = \sin\alpha^2$ würde, und alsdenn würde der dazu gehörige Werth γ die dritte Wurzel der Gleichung des 169. §. geben, wiewohl dieſe Wurzel eben ſo wenig, wie die zweyte, die Aufgabe des 169. §. eigentlich auflößt, weil ζ und α einander noch entgegen geſetzt ſind. Erfolgt dies würklich, und zwar noch vorher, ehe γ bis zu dem gröſten Werth ACK gewachſen iſt, ſo muß zum vierten mahl $\sin\alpha = \sin\zeta$ werden, bevor $\gamma = 180°$ wird. Wenn nemlich $\gamma >$ ACG wird, ſo wird zwar ζ ſtumpf, wie z. E. $\zeta =$ QDO für den Werth $\gamma =$ ACD: weil es aber bey dieſer Unterſuchung nur auf den Sinus des Winkels ζ ankommt, ſo kann man CDQ als die Ergänzung des Winkels QDO zu 180° dafür annehmen, weil beyde einerley Sinus haben. Für $\gamma = 180° =$ ACB verſchwindet α, wenn M oder N den Halb-

 kreis

kreis beſchrieben hat und in B fällt, aber ζ verſchwindet noch nicht, ſondern hat von 90° bis zum Winkel CBQ abgenommen, indem CG den Winkel GCB beſchrieben hat. Gab es nun eine Stelle zwiſchen g und K, wo $\alpha = \zeta$ war, ſo muß gleich nach dieſer Stelle $\alpha > \zeta$ werden, weil α noch wachſend und ζ ſchon abnehmend einander gleich wurden, für den Werth $\gamma =$ ACK iſt alſo nun $\alpha > \zeta$ und für den Werth $\gamma = 180$, ſchon $\alpha = 0$, aber noch $\zeta =$ CBQ, obgleich ζ mit α zugleich abgenommen hat, indem CK den Winkel KCB beſchrieben hat: mithin muß es zwiſchen K und B eine Stelle geben, wo zum vierten mahl $\sin\alpha = \sin\zeta$ wird, und für dieſe Stelle giebt der dazu gehörige Werth $\tang\gamma$ die vierte Wurzel der Gleichung des 169. §., welche aber noch weniger als die zweyte und dritte die Aufgabe in dem Verſtande, wie ſie vorgetragen iſt, aufzulöſen dient, weil kein Strahl aus Q unter einem ſtumpfen Neigungswinkel auf die Glaßlinſe fallen kann.

5) Für $\gamma = 180°$ war $\alpha = 0$ und $\zeta = 180° -$ CBQ, oder $\sin\alpha = 0$, $\sin\zeta = \sin$ CBQ. Man verlängere QC nach E, ſo erhellet, daß α von 0 bis zum Winkel CEX wachſe, wenn CB nach CE rückt, aber ζ wächſt zugleich bis zu 180° oder $\sin\zeta$ nimmt bis auf 0 ab: alſo giebt es zwiſchen B und E zum fünften mahl eine Stelle wo $\sin\zeta^2 = \sin\alpha^2$ wird, woraus die fünfte Wurzel der Gleichung des 169. §. entſpringt, die aber eben ſo wenig, wie alle vorigen, die erſte ausgenommen, zur eigentlichen Auflöſung der Aufgabe dient. Beym fernern Fortrücken des Halbmeſſers aus der Lage CE nach CH, wachſen $\sin\zeta^2$ und $\sin\alpha^2$ wie-

der

der beyde zugleich, $\sin\zeta$ wird $= 1$, wenn der Halbmeſſer in H anlangt, aber $\sin\alpha$ erreicht den ganzen Sinus nicht, mithin iſt in der Stelle H $\sin\zeta^2 > \sin\alpha^2$, und in der Stelle E war $\sin\zeta^2 < \sin\alpha^2$: alſo müſſen $\sin\zeta^2$ und $\sin\alpha^2$ zwiſchen E und H zum ſechſten mahl gleich groß werden, und daher muß die ſechſte Wurzel der Gleichung des 169. §. ihren Urſprung haben; wiewohl ſie die Aufgabe, ſo wie ſie vorgelegt iſt, wiederum nicht auflößt, weil auf keine der Stellen zwiſchen E und H aus Q ein Strahl fallen kann.

6) So wie in der Figur die data angenommen ſind, iſt α ſchon wieder im Abnehmen, wenn $\sin\zeta^2 = 1^2$ wird, oder der Halbmeſſer in die Lage CH genommen iſt. Drehet ſich CH weiter gegen CA ſo nehmen $\sin\zeta^2$ und $\sin\alpha^2$ beyde ab, $\sin\alpha^2$ verſchwindet früher, als $\sin\zeta^2$, und es giebt nun weiter keine Stelle mehr zwiſchen H und A, wo $\sin\zeta^2 = \sin\alpha^2$ werden könnte. Uebrigens iſt $AG = Am + mG$, $AH = mH - Am$, und $mG = mH$, alſo $AG - AH = 2Am$, ſo wie $AH = AG - 2Am$. Aber $AG = AK + KG = AL + KG$, mithin $AH = AL + KG - 2Am$. Wäre $AG < AK$, ſo wäre KG negativ, (wie wenn G in g fiele, wie im n. 4. angenommen ward) alsdenn iſt allemahl $AH < AL$, und $\sin\zeta^2$ alsdenn allerſt $= 1$, wenn $\sin\alpha^2$ ſchon wieder abnimmt: mithin kann es bey dieſer Vorausſetzung nicht mehr als ſechs Fälle geben, die der Gleichung $\sin\zeta^2 = \sin\alpha^2$ genügen. Wäre dagegen $KG > 2Am$ und poſitiv, ſo wäre $AH > AL$. Nun würde es zwar in dem Bogen NGDB keine Stelle geben, wo $\sin\zeta^2 = \sin\alpha^2$ werden könnte: fiele aber H etwa in h, ſo

würde $\sin\zeta^2$ abnehmen, und $\sin\alpha^2$ noch wachſen, wenn C*h* gegen CL rückte, und das könnte nun zum fünftenmahl $\sin\zeta^2 = \sin\alpha^2$ geben, da dann derſelbe Fall zum ſechſten mahl eintreten müſte, bevor C*h* in die Lage CA fiele. Geſetzt aber, dies erfolgte auch würklich, wenn CH in die Lage C*n* gekommen iſt; ſo würde doch der auf *n* fallende Strahl, wenn er nach der erſten Brechung durch π gehen ſollte, in der Lage *nt* einfallen müſſen, und könnte mithin nicht aus Q kommen. Dieſemnach löſet unter allen ſechs Fällen, welche die Wurzeln der Gleichung des 169. §. anzeigen, nur derjenige die vorgelegte Aufgabe eigentlich auf, wenn der Strahl aus Q auf μ fällt.

173. §.

Wenn ein ſtrahlender Punct Licht auf eine Glaslinſe wirft, ſo iſt unter allen auffallenden Strahlen gewiß einer, der nach der zweyten Brechung in eine Lage kommt, die mit der Lage parallel iſt, worin er auffiel; dieſer Strahl liegt in der Ebene durch den ſtrahlenden Punct und die Axe der Linſe: von den übrigen auf die Linſe fallenden Strahlen aber, die in eben dieſer Ebene liegen, kann keiner eben die Eigenſchaft haben.

Beweis. Wenn der ſtrahlende Punct in der Axe der Linſe liegt, ſo erhellet die Richtigkeit des Satzes zwar für ſich ſchon ohne alle Rechnung indeſſen leitet auch die Gleichung des 169. §. auf eben die Folge. In dem erwehnten Fall muß man $b = 0$ ſetzen, ſo verwandelt ſich die dortige

Glei-

Gleichung in folgende;

$$A^8 \operatorname{tg}\gamma^6 + (A^8 - 4a^2 f^2 h^2 r^2) \operatorname{tg}\gamma^4 = 0;$$

mithin ſind vier von den Wurzeln der Gleichung $= 0$, und man hat zugleich $A^4 = \mu^2 h^2 (a^2 + r^2) - a^2 (h^2 + r^2)$, ſo wie $f = a - \mu^2 h$. Die übrigen beyden Wurzeln giebt alsdenn die Gleichung

$$\operatorname{tang}\gamma = \pm \frac{\sqrt{(4a^2 f^2 h^2 r^2 - A^8}}{A^4},$$ und beyde

ſind nur möglich, wennn $4a^2 f^2 h^2 r^2 > A^8$ iſt. Geſetzt aber, daß auch beyde möglich ſind, ſo erhellet doch leicht in Rückſicht auf die im vor. §. vorgetragenen Schlüſſe, daß derjenige Werth von γ, welcher erfordert wird, wenn der einfallende Strahl die verlangte Eigenſchaft haben ſoll, unter den vier verſchwindenden Wurzeln begriffen ſey.

Liegt der ſtrahlende Punct auſſer der Axe, ſo iſt die Richtigkeit des Satzes ebenfals auſſer Zweifel geſetzt, ſobald nur erwieſen iſt, daß die Wurzeln der Gleichung des 169. §. nie alle ſechs zugleich unmöglich ſeyn können. Die Schlüſſe des vorigen §. beweiſen, daß unter den ſechs Wurzeln nur diejenige den geſuchten Winkel γ beſtimme, welche $\operatorname{tang}\gamma < \frac{b}{a}$ giebt. Aber eben dieſe Schlüſſe beweiſen auch, (ebendaſ. n. 2.) daß zwiſchen den Gränzen $\operatorname{tg}\gamma = 0$ und $\operatorname{tang}\gamma = \frac{b}{a}$ nothwendig ein Winkel γ falle, dem gleiche Winkel ζ und α zugehören. Demnach iſt eine ſolche Wurzel der Gleichung, welche $\operatorname{tang}\gamma < \frac{b}{a}$

 giebt,

giebt, gewiß allemahl möglich, und unter den Strahlen welche von Q auf die Linſe fallen, iſt gewiß einer, der die verlangte Eigenſchaft hat. Eben die Schlüſſe des vor. §. beweiſen übrigens, daß in der Ebene durch Q und die Axe der Linſe nur ein Strahl liegen könne, der nach der zweyten Brechung in eine Lage kommt, die mit derjenigen parallel iſt, worin er einfiel: vorausgeſetzt, daß der Strahl von Q ausgehen ſoll.

174. §.

61 F. Wenn der ſtrahlende Punct Q ſo nahe bey der Axe CP der Linſe liegt, daß ſeine ſcheinbare Entfernung PAQ von dieſer Axe aus dem Pol A der Vorderfläche des Glaſes geſehen wenige Grade beträgt, ſo iſt auch PCQ $= \omega$ ſehr klein: mithin auch derjenige Winkel AC$m = \gamma$, welcher die Stelle beſtimmt, wo der Strahl auffallen muß, wenn der aus dem Glaſe in die Luft fahrende Strahl dem einfallenden parallel ſeyn ſoll. Ueberdem iſt AO$m = \alpha + \gamma <$ PAQ, alſo auch α ein kleiner Winkel, wenn es PAQ iſt, folglich ſind es β, und O$mn = \alpha - \beta$ ebenfals. Weil ferner wegen der parallelen Lage des einfallenden und ausfahrenden Strahls Enm = nmC $= \beta$, alſo knq = CmO $= \alpha$, mithin K$nq = \alpha - \beta$, gleichfals ein kleiner Winkel iſt; ſo wird der Strahl Qmnq bey m und n nur ſo wenig gebrochen, daß man ihn beynahe für eine grade Linie nehmen kann, die durch π gehet. Ich werde ihn künftig den mittlern unter denjenigen Strahlen nennen, die von Q auf das Glas fallen können, und vermöge der vorgetragenen Gründe berechtiget ſeyn, anzunehmen,

men, daß dieſer mittlere Strahl ungebrochen durchgehe, wenn der Winkel PAQ nur klein iſt.

Weil für den mittlern Strahl $\gamma < \omega$ iſt, ſo iſt in eben dieſem Fall auch γ ſehr klein, alſo beynahe $\cos\gamma = 1$. Wenn demnach was in $\sin\gamma^2$ multiplicirt iſt, weggelaſſen wird, ſo findet man am Ende des 169. §. $y = \frac{\mu h r}{\mu h + r - h} = CO$. Es iſt aber $r - h = A\pi$, weil $h = C\pi$ war, alſo $h = r - A\pi$, und $y = \frac{\mu r (r - A\pi)}{\mu (r - A\pi) + A\pi}$. Ferner iſt $AO = r - y$, alſo $AO = \frac{r \cdot A\pi}{\mu (r - A\pi) + A\pi}$, oder $AO = \frac{r \cdot A\pi}{\mu r - (\mu - 1) \cdot A\pi}$, da dann $\mu = \frac{m}{n}$ iſt, und $A\pi = \frac{cr}{r + \varrho}$: (168. §. n. 2.) Demnach iſt

$$AO = \frac{n \cdot cr^2}{mr(r + \varrho) - (m - n) cr}.$$

Der zum zweytenmahl gebrochene Strahl nq ſchneide die Axe der Linſe in ω, ſo iſt das Dreyeck $En\omega \backsim CmO$; alſo $Cm : CO = En : E\omega$, und $Cm : Cm - CO = En : En - E\omega$, (189. §. Geom. n. II.) oder $r : AO = \varrho : G\omega$. Das giebt $G\omega = \frac{\varrho \cdot AO}{r} = \frac{ncr\varrho}{mr(r + \varrho) - (m - n) cr}$.

175. §.

Wenn *PQ* eine grade auf *CP* ſenkrechte Linie und der Winkel *PAQ* nur klein iſt; ſo lau-

laufen alle Strahlen, die aus dem Punct *Q* nahe bey der Axe *QC* der Vorderfläche *BAD* auf die Linſe fallen, nach der zweyten Brechung beynahe in einerley Vereinigungspunct *q* zuſammen, der in dem mittlern Strahl $Q\pi$ beynahe eben ſoweit hinter der Linſe liegt, als das Bild *p* des Puncts *P* in der Axe der Linſe *PC*.

Beweis. Alle Strahlen, die von Q auf die
61 F. Vorderfläche BAD fallen, laufen nach der erſten Brechung in einerley Vereinigungspunct K zuſammen, der in der Axe QC liegt, und wenn man bemerkt, daß im 153. §. $g = \frac{\mu\delta r}{(\mu - 1)\delta - r}$ das ſey, was hier AΠ iſt; ſo hat man $A\Pi = \frac{\mu \,.\, AP \,.\, r}{(\mu - 1) \,.\, AP - r}$, und eben ſo auch $aK = \frac{\mu \,.\, aQ \,.\, r}{(\mu - 1) \,.\, aQ - r}$. Nun iſt ſehr nahe CQ = CP, wenn PAQ und PCQ ſehr klein ſind, alſo auch AP = *a*Q, mithin beynahe *a*K = AΠ, und CK = CΠ. Man ziehe KE, ſo werden CEK, CKE ſehr kleine Winkel ſeyn, wenn ΠCK = PCQ ſehr klein iſt, und es iſt beynahe EC + CK oder EΠ = EK, mithin auch beynahe GΠ = *g*K. Weil nun alle Strahlen nach der erſten Brechung gegen den Punct K in der Axe EK der hintern Fläche BGD der Linſe laufen, ſo haben ſie nach der zweyten Brechung in CK einen Vereinigungspunct *q*. Was im 157. §. n. 2. $g = \frac{\mu\delta r}{(1 - \mu)\delta + r}$ war,

war, das iſt hier Gp, wenn man ϱ ſtatt r und $G\Pi$ ſtatt δ ſchreibt: alſo $Gp = \frac{\mu . Gp . \varrho}{(1-\mu) Gp + \varrho}$, und eben ſo $gq = \frac{\mu . gK . \varrho}{(1-\mu) gK + r}$. Demnach iſt beynahe $Gp = gq$ und $Ep = Eq$. Noch war vermöge der Vorausſetzung qnk ein kleiner Winkel, alſo ſind es auch nEq und Eqn, und es iſt beynahe $En + nq = Eq = Eg + gq$, folglich beynahe $nq = gq = Gp$, oder auch $\pi q = \pi p$.

Iſt das Glaß eine ganze Kugel, wie in der 80. Fig. ſo fallen die Mittelpuncte C und E in einerley Punct zuſammen, der mittlere Strahl geht durch C oder E, und wird würklich gar nicht gebrochen. So lange nun CQ nicht ſehr merklich gröſſer, als CP iſt, ſo lange werden auch die aus Q nahe bey der Axe QC auffallenden Strahlen, in einem Vereinigungspunct q nach der zweyten Brechung zuſammen laufen, der beynahe eben ſo weit hinter der Kugel liegt, als das Bild p des Puncts P, und es wird beynahe $Cq = Cp$ ſeyn, oder $Gp = gq$.

176. §.

Der Vereinigungspunct q aller aus Q auf die Linſe fallenden Strahlen iſt in eben dem Verſtande ein Bild von Q, in welchem p ein Bild von P war. (163. §.) Wenn alſo PQ eine grade auf der Axe der Linſe ſenkrechte Linie iſt, ſo hat jeder Punct S von ihr ſein Bild s hinter der Linſe in dem mittlern Strahl $S\pi$, ſo daß πs beynahe $= \pi p$ iſt, und die Bilder aller Puncte zwiſchen P und Q lie- 61 F.

gen in einem kleinen Kreisbogen *pq*, deſſen Halbmeſſer *πp* iſt. Eben dieſer kleine Bogen *pq* wird von ſeiner Tangente nicht merklich verſchieden ſeyn, und man kann auch *pq* als eine grade auf *πp* ſenkrechte Linie betrachten, die alſo ein Bild von PQ iſt.

Es ſey die Axe der Linſe gegen die Mitte eines ſichtbaren Objects QR gerichtet, ſo daß P den mittlern Punct deſſelben vorſtellet, der ſcheinbare Halbmeſſer deſſelben aus der Mitte A des Glaſes geſehen, ſey ſehr klein; ſo werden alle Puncte des Objects, welche auf das Glas Strahlen werfen können, ſehr nahe gleich weit von A, oder auch von dem Mittelpunct C der Vorderfläche, entfernt, mithin ſo zu betrachten ſeyn, als wenn ſie alle in einerley auf der Axe PC ſenkrechten Ebene lägen. Jeder Punct wird alſo hinter dem Glaſe ſein Bild haben, und dieſe Bilder werden in einem kleinen Stück *qr* einer Kugelfläche liegen, deren Mittelpunct *π* iſt, das auch als eine kleine ebene Fläche betrachtet werden kann, welche auf der Axe der Linſe ſenkrecht iſt. Alle Bilder derjenigen Puncte des Objects zuſammen genommen, welche auf die Linſe Strahlen werfen können, machen das Bild des Objects ſelbſt aus, mithin wird *qr* das Bild von QR ſeyn.

Fängt man das durch die Glaslinſe fallende Licht in der Entfernung *Gp* vom Glaſe mit einem weiſſen Papier oder einer andern weiſſen Ebene ſenkrecht auf; ſo zeigt ſich auf derſelben deswegen ein deutliches Bild des Objects, weil auf jeden Punct der weiſſen Fläche nur Licht von einem und demſelben Punct des Gegenſtandes fällt, nicht von mehrern. Entfernt man aber die weiſſe Fläche weiter

weiter als um den Abſtand *Gp* vom Glaſe, oder rückt man ſie dem Glaſe näher, ſo ſchneidet ſie alle Lichtkegel, deren Spitzen in *qr* liegen, das von jedem Punct des Objects kommende Licht iſt über der Fläche eines ſolchen Kreiſes verbreitet, und weil alle dieſe Kreiſe einander ſchneiden, ſo fällt auf jeden Punct der weiſſen Fläche Licht von mehrern Puncten des Gegenſtandes: deswegen iſt nun das Bild undeutlich.

Die Betrachtung der Figur ergiebt von ſelbſt, daß das deutliche Bild in Anſehung der Axe der Linſe eine umgekehrte Lage erhalte. Der Punct *q*, welcher Q abbildet, liegt nicht mit Q auf einerley Seite der Axe der Linſe, ſondern auf der andern Seite gegen über. Was im Object ſelbſt oben liegt, bildet ſich unten ab, und was im Object zur Rechten liegt, bildet ſich zur Linken ab.

Daß und wie dies alles auch bey der ganzen Kugel ſeine Anwendung finde, iſt aus der dem vor. §. ſchon beygefügten Anmerkung leicht abzunehmen. Liegen die Puncte R, P, S, Q, (80. Fig.) in einer Kugelfläche, die mit der gläſernen Kugel einerley Mittelpunct hat; ſo liegen ihre Bilder ebenfals in einer Kugelfläche, die mit der gläſernen Kugel concentriſch iſt.

177. §.

Wenn die Dicke der Glaslinſe in Vergleichung mit den Entfernungen des Objects und des Bildes von der Linſe ſehr klein auch die ſcheinbare Ausdehnung des Objects aus der Mitte des Glaſes geſehen nicht beträchtlich groß iſt; ſo verhalten ſich die Halbmeſſer

ſer oder Durchmeſſer des Objects und des Bildes, beyde in der Ebene durch die Axe der Linſe genommen, gegen einander, wie die Entfernungen des Objects und des Bildes von der Linſe.

61 F. Beweis. Weil der Strahl nq mit Qm parallel iſt, ſo iſt das Dreyeck $OPQ \backsim \omega pq$, und man hat $AP + AO : G\omega + Gp = PQ : pq$. Es iſt aber $AO = \frac{ncr^2}{mr(r+\varrho) - (m-n)cr} = \frac{nc}{m(1+(\varrho:r)) - (m-n)c:r}$, und $G\omega = \frac{ncr\varrho}{mr(r+\varrho) - (m-n)cr} = \frac{nc}{m(1+r:\varrho) - (m-n)c:\varrho}$: wenn alſo c in Vergleichung mit r und ϱ ſehr klein iſt, ſo iſt nicht allein AO ſondern auch $G\omega$ noch kleiner als c, mithin ebenfals ſehr klein, und man hat ſehr nahe $AP : Gp = PQ : pq$. Aus eben dem Grunde hat man auch $AP : Gp = PR : pr$, folglich $PQ + PR : pq + pr = AP : Gp$, (191. §. G.) oder $QR : qr = AP : Gp$.

Iſt das Glaß eine ganze Kugel, ſo hat man $r = \varrho$, und $c = 2r$, alſo $AO = r$, und $G\omega = r$, wie der Natur der Kugel gemäß iſt. Demnach verhalten ſich die Durchmeſſer des Objects und des Bildes wie ihre Entfernungen vom Mittelpunct der Kugel. (80. Fig.)

Wird der durch P auf der Axe AP ſenkrechte Schnitt des Objects $= E^2$ die Fläche des Bildes

=

$= \varepsilon^2$ geſetzt; ſo hat man $\frac{E^2}{OP^2} = \frac{\varepsilon^2}{\omega p^2}$, und beym Glaſe deſſen Dicke ſehr klein iſt $\frac{E^2}{AP^2} = \frac{\varepsilon^2}{Gp^2}$, alſo die Fläche des Bildes $\varepsilon^2 = \frac{\omega p^2}{OP^2} \cdot E^2$. Für die ganze Kugel (81. Fig.) hat man $\varepsilon^2 = \frac{Cp^2}{CP^2} \cdot E^2$. Liegen die Puncte R, P, S, Q, in einer mit dem Glaſe concentriſchen Kugelfläche, ſo iſt RPQ ein zu dieſer Kugelfläche gehöriger gröſter Kreisbogen, und *rpq* ſtellt ebenfals einen Kreisbogen vor. Beyde Bogen ſind einander ähnlich und verhalten ſich wie ihre Halbmeſſer. Das ganze Bild des Objects iſt nun ein Stück von einer mit dem Halbmeſſer ωp^2 beſchriebenen Kugelfläche. Wenn alſo dieſes nun ε^2 geſetzt wird, und das Stück einer mit dem Halbmeſſer OP zwiſchen den Gränzen des Pyramidenförmigen Raums QOR beſchriebenen Kugelfläche $= E^2$, ſo iſt wie vorhin $\varepsilon^2 = \frac{\omega p^2}{OP^2} \cdot E^2$.

Der XIV. Abſchnitt.

Die verſchiedenen Arten der linſenförmigen Gläſer.

178. §.

Beym Glaſe iſt das Verhältniß der Refraction für die Strahlen von mittlerer Brechbarkeit $= 31 : 20$, und wenn eben nicht die gröſte Schärfe verlangt wird, ſo nimmt man es $= 3 : 2$ an. Demnach hat man in den Formuln des XIII. Abſchnitts $m : n = 3 : 2$, und das giebt im 164. §. $\mu = \frac{m}{m - n} = 3$, $\nu = \frac{n}{m - n} = 2$: mithin die Brennweite eines auf beyden Seiten erhaben geſchliffenen Glaſes $f = \frac{2\varrho\,(3r - c)}{3\,(r + \varrho) - c}$, und den Abſtand des Bildes $x = \frac{2\varrho\,((3r - c)\,\delta + 2rc)}{(3\,(r + \varrho) - c)\,\delta - 2\,(3\varrho - c)\,r}$, oder $x = \frac{\varrho f\,((3r - c)\,\delta + 2rc)}{\varrho\delta\,(3r - c) - rf\,(3\varrho - c)}$. Für die Lage des aus Q auffallenden mittlern Strahls hat man (174. §.) $G\pi = \frac{c\varrho}{r + \varrho}$, oder $A\pi = \frac{cr}{r + \varrho}$, und $AO = \frac{2r\,.\,A\pi}{3r - A\pi}$, oder $AO =$

$2r^2 c$

$\frac{2r^2 c}{3r(r+\varrho)-cr}$. Für die Lage des zum zweyten mahl gebrochenen Strahls iſt $G\omega =$ $\frac{2cr\varrho}{3r(r+\varrho)-cr}$; und beyde Formuln laſſen ſich auch ſo ausdrücken $AO = \frac{2c}{3(1+\varrho:r)-c:r}$, $G\omega = \frac{2c}{3(1+r:\varrho)-c:\varrho}$.

Gewöhnlich iſt die Dicke des Glaſes c in Vergleichung mit beyden Halbmeſſern ſo klein, daß man ſie in den Formuln für f und x als verſchwindend betrachten kann, da dann $f = \frac{2r\varrho}{r+\varrho}$, und $x = \frac{2r\varrho\delta}{(r+\varrho)\delta - 2r\varrho}$, oder $x = \frac{\delta f}{\delta - f}$ gefunden wird. Allemahl bezeichnet r den Halbmeſſer der vordern gegen das Object gekehrten, und ϱ den Halbmeſſer der hintern Fläche. Iſt alſo c ſehr klein, ſo leidet die Brennweite, und der Abſtand des Bildes bey einerley Entfernung des Objects, keine merkliche Aenderung, man mag welche Seite man will dem Object zu kehren. Sind beyde Halbmeſſer gleich groß, ſo iſt $f = r$, und $x = \frac{\delta r}{\delta - r}$.

Für die ganze Kugel hat man $f = \frac{1}{2}r$ und $x = \frac{r(\delta + 4r)}{2\delta - r}$. (165. §.) oder $x = \frac{f(\delta + 4r)}{\delta - f}$.

179. §.

179. §.

Wenn die Strahlen, nachdem ſie in der Vorderfläche die erſte Brechung gelitten haben, in einerley durchſichtigen Maſſe blieben, ſo würden die-
61 F. jenigen, welche von einem Punct P der Axe kommen, und zunächſt bey der Axe auffallen, in dem Vereinigungspunct Π zuſammen laufen, und man hätte $A\Pi = \frac{m r \delta}{(m-n)\delta - nr}$. (153. §.) Dieſer Ausdruck wächſt mit r, wird unendlich groß, wenn $r = \frac{m-n}{n}\delta$ iſt, und negativ, wenn r dieſen Werth übertrift. Je gröſſer aber r wird, deſto weniger krümmt ſich die Kugelfläche BAD, und wenn r unendlich groß würde, ſo würde ſich
62 F. BAD gar nicht mehr krümmen, ſondern eine ebene Fläche werden. Alsdenn hat man $A\Pi = -\frac{m}{n}\delta$, welches mit dem 120. §. übereinſtimmt. Die Linſe verwandelt ſich nun in ein Planconvex-Glaß, wie es die 62. Fig. vorſtellt, der Strahl PM wird zum erſtenmahl in die Lage MN gebrochen, ſo daß er rückwärts verlängert die Axe in Π ſchneidet: nach der zweyten Brechung in N aber läuft er auf den Punct p der Axe zu, und man hat $Gp = x = \frac{\nu\varrho(\mu\delta + \nu c)}{\mu\delta - \nu(\mu\varrho - c)}$, die Brennweite $f = \nu\varrho$, oder auch $x = \frac{\varrho f(\mu\delta + \nu c)}{\mu\varrho(\delta - f) + cf}$, (164. §.) und wenn man c weglaſſen kann $x = \frac{\delta f}{\delta - f}$.

Wird

Wird alſo das Verhältniß der Refraction $= 3 : 2$ angenommen, ſo iſt $f = 2\varrho$, und $x = \frac{2\varrho(3\delta + 2c)}{3\delta - 2(3\varrho - c)}$, oder die Dicke des Glaſes $= 0$ geſetzt, $x = \frac{2\varrho\delta}{\delta - 2\varrho}$.

180. §.

Es ſey Q ein Punct auſſerhalb der Axe des Plan- 62 F.
convex-Glaſes, ſo wird es unter den aus Q auffallenden Strahlen auch hier einen mittlern Strahl geben, der beynahe ungebrochen durchgehet. Wäre das Glaß auf beyden Seiten erhaben, ſo müſte der Strahl nach der erſten Brechung durch einen Punct π der Axe durchgehen, den die Formul $G\pi$ 61 F.
$= \frac{c\varrho}{r + \varrho}$ giebt, (178. §.) und dieſer Werth verſchwindet, wenn r unendlich groß wird, das heiſt, wenn ſich die Vorderfläche in eine ebene Fläche verwandelt. Alſo hat man $G\pi = 0$, und π fällt 62 F.
mit G zuſammen, oder der Strahl muß nach der erſten Brechung durch G gehen. Daß dies der Sache gemäß ſey, erhellet daraus, weil ſonſt kein Element der gebogenen Hinterfläche mit der ebenen Vorderfläche parallel iſt, das einzige in G ausgenommen, weswegen alſo der zum erſtenmahl gebrochene Strahl in G die Hinterfläche treffen muß. Der auffallende Strahl Qm ſelbſt muß durch einen Punct O der Axe laufen, der gefunden wird, wenn man $AO = \frac{2r \cdot A\pi}{3r - 2A\pi}$ nimmt, und $A\pi$

$= \frac{cr}{r + \varrho}$, (178. §.) hier alſo $A\pi = c$, und AO $= \frac{2}{3}c$, weil r unendlich groß iſt. Es bleibt nemlich allemahl die Vorausſetzung zum Grunde, daß PQ in Vergleichung mit AP nur klein, mithin PAQ, alſo auch AOQ, welches hier der Neigungswinkel α iſt, ein kleiner Winkel ſey. Nun ergiebt die Betrachtung der Figur, daß hier AO : $A\pi =$ cotα : cotβ ſeyn müſſe, und weil für kleine Winkel die Cotangente und Coſecante beynahe gleich groß ſind, ſo hat man beynahe AO : $A\pi$ = coſecα : coſecβ, oder AO : $A\pi$ = ſinβ : ſinα = $n : m$, folglich AO $= \frac{n}{m} c = \frac{2}{3}c$, weil hier $A\pi = c$ iſt, $\mathrm{tg}\beta = \frac{e}{c}$, alſo $\sec\beta = \frac{\sqrt{(c^2 + e^2)}}{c}$ und $\sin\beta = \frac{\mathrm{tg}\beta}{\sec\beta} = \frac{e}{\sqrt{(c^2 + e^2)}}$, mithin $\sin\alpha = \frac{me}{n\sqrt{(c^2 + e^2)}}$, und das beſtimmt ſchon die geſuchte Lage des Strahls.

Uebrigens hat man AO $= e \,.\, \cot\alpha$, und $\cos\alpha = \frac{\sqrt{(n^2 (c^2 + e^2) - m^2 e^2)}}{n\sqrt{(c^2 + e^2)}}$, $\mathrm{tang}\alpha = \frac{me}{\sqrt{(n^2 c^2 - (m^2 - n^2) e^2)}}$, alſo AO $=$ $\sqrt{\left(\frac{n^2 c^2}{m^2} - \frac{m^2 - n^2}{m^2} e^2\right)}$.

181. §.

Man ziehe nun die Axe Qa für die aus Q auf die Vorderfläche fallenden Strahlen; ſo iſt vermöge der Vorausſetzung der Winkel aQm für alle auffallende Strahlen ſehr klein: mithin werden ſie in der Vorderfläche ſo gebrochen werden, als kämen ſie aus dem Punct K her, und man hat $A\Pi = \mu . AP$, $aK = \mu . aQ$, (120. §.) alſo $aK = A\Pi$, weil $aQ = AP$ iſt: zugleich iſt beynahe $A\Pi = aK = AE + EK$, mithin beynahe $EK = E\Pi$. Man ziehe alſo KE, ſo iſt KE eine Axe der hintern Fläche, wie es ΠG war, alle aus K kommende Strahlen werden ſo gebrochen, daß ſie ſich in einem Punct q der Axe KE vereinigen, und weil beynahe $EK = E\Pi$ iſt, ſo hat man auch beynahe $Eq = Ep$, alſo beynahe $gq = Gp = Gq$. 62 F.

Was alſo von einer auf beyden Seiten erhaben geſchliffenen Linſe im 176. und 177. §. bewieſen iſt, findet auch beym Planconvex-Glaſe ſeine Anwendung, pq iſt ein Bild von PQ, das aber in Anſehung der Axe des Glaſes eine Lage hat, die der Lage des Objects PQ entgegen geſetzt iſt; auch verhalten ſich die Durchmeſſer des Bildes und des Objects, wie ihre Entfernungen vom Glaſe, denn es iſt hier $AO = \frac{n}{m} c$ kleiner als c, und $G\omega = 0$.

182. §.

Eben das behält noch ſeine Richtigkeit, wenn man gleich das Planconvex-Glas umkehrt, ſo daß die erhabene Fläche dem Object zugekehrt iſt. Es war nemlich für die Linſe im 164. §. die Brenn- 63 F.

weite $f = \frac{\nu\varrho(\mu r - c)}{\mu(r+\varrho) - c} = \frac{\nu(\mu r - c)}{\mu - c:(r+\varrho)}$.
$\frac{\varrho}{r+\varrho}$, und dieſer Ausdruck wächſt mit ϱ, weil $\frac{\varrho}{r+\varrho}$ wächſt, und $\frac{c}{r+\varrho}$ ſich ſehr wenig ändert. Ferner war der Abſtand des Bildes $Gp = x = \frac{\varrho f((\mu r - c)\delta + \nu rc)}{\varrho\delta(\mu r - c) - rf(\mu\varrho - c)} = \frac{f((\mu r - c)\delta + \nu rc}{\delta(\mu r - c) - rf(\mu - c:\varrho)}$, und dieſer Ausdruck wächſt ebenfals mit ϱ, weil f mit ϱ wächſt. Nimmt man ϱ unendlich groß an, ſo heiſt das, die hintere Fläche der Linſe ſoll ſich in eine ebene Fläche verwandeln, und man erhält $f = \nu r - \frac{\nu c}{\mu}$, woraus $f = \nu r$ wird, wenn c ſehr klein iſt. In dem zuletzt erwehnten Fall alſo iſt die Brennweite einerley, man mag die ebene oder erhabene Seite dem Object zukehren. (179. §.) Ferner hat man, $\varrho = \infty$ geſetzt, $Gp = x = \frac{f((\mu r - c)\delta + \nu rc}{\delta(\mu r - c) - \mu rf}$, und wenn man $c = 0$ ſetzen kann, $x = \frac{\delta f}{\delta - f}$.

183. §.

63 F. Soll nun aus einem Punct Q auſſerhalb der Axe des Glaſes ein Strahl ſo auffallen, daß er nach der zweyten Brechung in eine Lage kommt, die mit derjenigen parallel iſt, worin er auffiel; ſo

muß

muß er nach der erſten Brechung durch einen Punct π der Axe laufen, der vermittelſt der Formul $G\pi = \frac{c\varrho}{r+\varrho}$ gefunden wird. (168. §. n. 2.) Weil nun in dem jetzt zu betrachtenden Fall ϱ unendlich groß iſt, ſo muß $G\pi = c$ ſeyn, das heiſt, der Strahl muß in A auf das Glas fallen, wie auch der Natur der Sache nach nicht anders ſeyn kann, da dann zugleich $C\pi = h = \frac{r(r+\varrho-c)}{r+\varrho} = r$ wird. (168. §. n. 2.) Im 169. §. war das letzte Glied der daſelbſt gefundenen Gleichung $= b^4(q^4 - 4h^2r^2)$ und $q^2 = r^2 + h^2$, alſo das erwehnte letzte Glied $= b^4(r^2 - h^2)^2$. Weil nun hier $h = r$ iſt, ſo verſchwindet daſſelbe, und eine Wurzel der dortigen Gleichung iſt $\mathrm{tg}\gamma = 0$. Der Coefficient des nächſtletzten Gliedes $-4ab^3(q^4 - 4h^2r^2)$ verſchwindet ebenfals, und das giebt noch eine Wurzel $= 0$. Dieſer Werth $\gamma = 0$, in der für y im 169. §. gefundenen Formul angenommen giebt $y = CO = r$ wie erfordert wird. Eben ſo giebt im 178. §. die Vorausſetzung $\varrho = \infty$ den Werth $A\pi = 0$, alſo auch $AO = \frac{2r \cdot A\pi}{3r - A\pi} = 0$.

Man kann demnach den Strahl $Qmnq$ wie im 174. §. als den mittlern betrachten. Ziehet man ferner QC, ſo haben alle aus Q auffallende Strahlen nach der erſten Brechung einen Vereinigunspunct K in QC, und es iſt beynahe $CK = C\Pi$, weil beynahe $CQ = CP$ iſt. Von K falle Kg auf die hintere ebene Fläche des Glaſes ſenkrecht, ſo

 iſt

iſt auch beynahe $gK = G\Pi$, und es haben alle aus Q auffallende Strahlen nach der erſten Brechung eine ſolche Lage, daß ſie auf K zulaufen, ſo wie die aus P auffallenden nach der erſten Brechung in Π laufen. Demnach kommen ſie nach der zweyten Brechung in eine Lage, vermöge welcher jene in q dieſe in p laufen, (120. §. n. 4.) und es iſt beynahe $gq = Gp$, weil beynahe $gK = G\Pi$ iſt. Dieſemnach bildet ſich PQ in pq umgekehrt ab, auch verhalten ſich die Durchmeſſer des Bildes und des Gegenſtandes wiederum, wie ihre Entfernungen vom Glaſe. (177 §.) Denn es iſt

$AO = 0$, und $G\omega = \frac{n}{m} c$ kleiner als c.

184. §.

Im 179. §. wurden die Aenderungen betrachtet, welche die Eigenſchaften der Glaslinſe leiden, wenn der Halbmeſſer r der Vorderfläche wächſt, und zuletzt unendlich groß wird. Der Abſtand

$A\Pi$ (61 Fig.) $= \frac{mr\delta}{(m-n)\delta - nr}$ wird negativ,

wenn $r > \frac{m-n}{n}\delta$ wird, und wenn r unendlich

groß wird, ſo hat man $A\Pi = -\frac{m}{n}\delta$. Nach dem bekannten Geſetz der Stetigkeit kann nun auch r negativ werden, und hiernächſt wieder abnehmen: alsdenn hat man $A\Pi = -$

$\frac{mr\delta}{(m-n)\delta + nr}$, (155. §.) und dieſer Ausdruck

nimmt

nimmt mit r wieder ab, und bleibt ſo lange negativ, als es r iſt. Das heiſt nun annehmen, der Mittelpunct C der Vorderfläche falle auf der Seite des Glaſes, wo das Object befindlich iſt, und die Vorderfläche kehre dem Object eben ſo, wie die Hinterfläche, die hohle Seite zu, wie es die 64. Fig. vorſtellt. Ein Glas, dem man durch Schleifen und poliren dieſe Geſtalt gegeben hat, heiſt ein Concav-convex-Glas, oder Meniſcus.

Der Strahl PM wird zum erſten mahl in die Lage MN gebrochen, ſo daß er rückwärts verlängert die Axe in Π ſchneidet: nach der zweyten Brechung aber läuft er auf den Punct p zu. Wenn man nun in den Formuln des 164. §. den Halbmeſſer r negativ nimmt, ſo findet man die Dicke des Glaſes, wie gemeiniglich geſchehen kann, beyſeit geſetzt, $Gp = x = \frac{-vr\varrho\delta}{(\varrho - r)\delta + vr\varrho}$, oder 64 F.

$x = \frac{vr\varrho\delta}{(r-\varrho)\delta - vr\varrho}$, und die Brennweite $f = \frac{-vr\varrho}{\varrho - r} = \frac{vr\varrho}{r-\varrho}$. Für die Strahlen von mittlerer Brechbarkeit iſt ſehr nahe $v = 2$, alſo $f = \frac{2r\varrho}{r-\varrho}$, und $x = \frac{\delta f}{\delta - f} = \frac{2r\varrho\delta}{(r-\varrho)\delta - 2r\varrho}$. So lange $r > \varrho$ iſt, ſo lange iſt die Brennweite poſitiv, und die auf das Glas mit der Axe parallel fallenden Strahlen haben nach der zweyten Brechung hinter demſelben einen würklichen Vereinigungspunct. Zugleich bleibt x poſitiv, ſo lange $\delta > f$ iſt. In dem Fall $r = \varrho$, wird f unend-

unendlich groß, und $x = -\delta$. In dem Fall $r < \varrho$ iſt allemahl f negativ, und $x = -\frac{\delta f}{\delta + f}$ ebenfals. In dieſen Fällen, wenn f und x negativ werden, giebt es hinter dem Glaſe keinen Vereinigungspunct, worin die Strahlen zuſammen laufen: ſie gehen vielmehr hinter dem Glaſe immer weiter aus einander und haben eine ſolche Lage, als kämen ſie aus einem Punct der Axe der vor dem Glaſe liegt. Derſelbe iſt alſo wenigſtens als ein geometriſcher Vereinigungspunct anzuſehen, worin die Strahlen zuſammen laufen würden, wenn man ſie rückwärts verlängerte. Uebrigens iſt noch zu bemerken, daß die angegebenen Formuln nur gebraucht werden können, wenn c in Vergleichung mit r, ϱ, und δ ſehr klein iſt.

Genauer hat man für den Meniſcus $f = -\frac{\nu r \varrho\,(1 + c : \mu r)}{\varrho - r - c : \mu}$, oder $f = \frac{\nu r \varrho\,(1 + c : \mu r)}{r - \varrho + c : \mu}$, und $x = \frac{f\left(\delta + \frac{\nu r c}{(\mu r_{,} - c)}\right)}{\delta - \frac{r\,(\mu\varrho - c)}{\varrho\,(\mu r_{,} + c)}\, f}$. Mithin iſt in dem Fall $r = \varrho$ eigentlich $f = \frac{\nu r \varrho}{c}\left(\mu + \frac{c}{r}\right)$, und es wird erſtlich f unendlich groß, wenn $r = \varrho$

— c

$-c:\mu$ iſt, zugleich aber iſt $x = -\frac{\varrho(\mu r + c)}{r(\mu\varrho - c)}$ $\left(\delta + \frac{\nu r c}{\mu r + c}\right)$. Ueberhaupt muß man auch beſtändig in Erinnerung behalten, daß die Formuln nur ſo lange richtig ſind, als beyde Flächen des Glaſes ſolche Kugelſtücke bleiben, die in Vergleichung mit der ganzen oder halben Kugelfläche ſehr klein ſind, da ſie denn noch wenig gekrümmt ſind. Eben daher kommt es, daß hier f unendlich groß wird, wenn man $r = \varrho$, oder richtiger $r = \varrho - c:\mu$ annimmt. Beyde Flächen ſind nemlich nun beynahe ein paar ebene parallele Flächen, mithin ſind parallel auffallende Strahlen auch nach der zweyten Brechung beynahe parallel.

185. §.

Von dem Punct Q auſſerhalb der Axe des Glaſes falle ein Strahl Qm auf die Vorderfläche, ſo kann derſelbe nach der zweyten Brechung in eine Lage kommen, die mit Qm parallel iſt, wenn der Strahl nach der erſten Brechung durch einen Punct π der Axe läuft, den die Formul $G\pi = \frac{c\varrho}{r+\varrho}$ beſtimmt. (168. §. n. 3.) Demnach muß hier $G\pi = \frac{c\varrho'}{\varrho - r}$ ſeyn, wenn ſolches erfolgen ſoll. So lange nun $r > \varrho$ iſt, mithin ſo lange die aus P auffallenden Strahlen hinter dem Glaſe einen würklichen Vereinigungspunct haben; ſo lange iſt $G\pi$ negativ, und π liegt nicht im Glaſe ſelbſt. 64 F.

So lange indeſſen $r > 2\varrho$ iſt, ſo lange bleibt $G\pi < c$, und π liegt ſehr nahe bey G, da dann wie bisher Qm als der mittlere von dem aus Q auffallenden Strahlen betrachtet werden kann, der beynahe ungebrochen durchgehet. Weil übrigens auch $A\pi = \frac{cr}{r+\varrho}$ war (168. §. n. 2.) ſo hat man hier $A\pi = -\frac{cr}{\varrho - r} = \frac{cr}{r - \varrho}$: mithin $A\pi > c$, ſo lange $r > \varrho$ iſt, welches mit dem vorigen überein ſtimmet.

Die aus Q auf die Fläche BAD fallenden Strahlen werden in derſelben in die Lage gebrochen, als kämen ſie aus dem Punct K her, (156. §.) und es iſt beynahe $aK = A\Pi$, weil beynahe $aQ = AP$ iſt, alſo auch beynahe $EK = E\Pi$. Wenn man alſo KE zieht, ſo fallen die Strahlen nach der zweyten Brechung auf die Fläche bGd ſo, als kämen ſie aus dem Punct K der Axe KE, deswegen haben ſie in derſelben einen Vereinigungspunct q, (157. §.) und es iſt beynahe $Eq = Ep$, weil $EK = E\Pi$ war. So lange demnach $r > \varrho$ iſt, und die Strahlen hinter dem Glaſe einen würklichen Vereinigungspunct haben, ſo lange bildet ſich PQ eben ſo, wie hinter einer eigentlichen Glaslinſe umgekehrt ab. So lange ferner $r > 2\varrho$ bleibt, ſo lange findet auch noch der Satz des 177. §. ſeine Anwendung, vermöge deſſen beynahe die Durchmeſſer des Bildes und Gegenſtandes ſich wie ihre Entfernungen vom Glaſe verhalten. Es iſt nemlich hier AO (178. §.) $= \frac{2c}{3(1-\varrho:r)+c:r}$

und

und $G\omega = -\frac{2c}{3(r:\varrho - 1) + c:\varrho}$, alſo $G\omega$ negativ, ſo lange $r > \varrho - \frac{1}{3}c$ iſt, und es iſt vermöge des 177. §. eigentlich $AP + AO : Gp - G\omega = PQ : pq$. Sind nun $\frac{c}{r}$ und $\frac{c}{\varrho}$ ſehr kleine Brüche, ſo iſt beynahe $AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{r}{r - \varrho} \cdot c$, und $G\omega = -\frac{2}{3} \cdot \frac{\varrho}{r - \varrho} \cdot c$. So lange $r > 2\varrho$ iſt, ſo lange wird AO nicht gröſſer als $\frac{4}{3}c$, und $G\omega$ nicht gröſſer, als $\frac{2}{3}c$, mithin noch ohne merklichen Fehler $AP : Gp = PQ : pq$. Wird aber $r < 2\varrho$, und nähert ſich dem Werth ϱ, ſo werden $1 - \frac{\varrho}{r}$ und $\frac{r}{\varrho} - 1$ ſehr klein, und man kann $\frac{c}{r}$, $\frac{c}{\varrho}$ nicht mehr weglaſſen. Alſo nähert ſich AO dem Werth $= 2r$, und $G\omega$ dem Werth $= -2\varrho$. Demnach wird der Satz des 177. §. deſto unrichtiger, je mehr ſich r dem Halbmeſſer ϱ nähert. Indeſſen wird bey eben dieſer Vorausſetzung auch $f = \frac{2r\varrho}{r - \varrho}$ ſehr groß, alſo r und ϱ gegen f ſehr klein, ſo wie auch gegen δ, ſo lange $\delta > f$ und der Abſtand x des Bildes poſitiv bleibt. Weil nun $\delta = AP$, $x = Gp$ iſt; ſo hat man noch immer ziemlich nahe $AP : Gp = PQ : pq$.

186. §.

Aendert ſich ϱ, ſo bleibt der Abſtand AΠ (61. Fig.) $= \frac{mr\delta}{(m-n)\delta - nr}$ (179. §.) ungeändert, aber die Brennweite der Glaslinſe $f = \frac{\nu r\varrho}{r+\varrho}$, mithin auch der Abſtand des Bildes $x = \frac{\delta f}{\delta - f}$, (die Dicke des Glaſes ſehr klein angenommen, (178. §.) leiden Aenderungen. Es wächſt nemlich $f = \frac{\nu r}{1+(r:\varrho)}$, wenn ϱ wächſt, und man hat $f = \nu r$, wenn ϱ unendlich groß wird, wie im 182. §. Wird nun ϱ negativ, ſo hat man $f = -\frac{\nu r\varrho}{r-\varrho} = \frac{\nu r\varrho}{\varrho - r}$, und dieſer Ausdruck bleibt poſitiv, ſo lange $\varrho > r$ iſt, mithin auch x ſo lange $\delta > f$ iſt. Man erſiehet aus dieſen Formuln in Vergleichung mit dem 184. §. ſogleich, daß der Meniſcus Bild und Brennpunct gleich weit hinter ſich werfe, man mag welche Seite man will dem Gegenſtande zukehren, vorausgeſetzt, daß die Dicke des Glaſes ſehr klein, und der Halbmeſſer der hohlen Fläche des Glaſes gröſſer als der Halbmeſſer der erhabenen ſey. Iſt $\varrho < r$, ſo iſt f negativ, mithin auch $x = -\frac{\delta f}{\delta + f}$ negativ, wie groß übrigens δ ſeyn mag.

187. §.

Aus Q falle der Strahl Qm auf die Vorderflä- 65 F.
che, ſo wird derſelbe nach der zweyten Brechung wieder in die mit Qm parallele Lage kommen, wenn derſelbe nach der erſten Brechung die Axe in π ſchneidet, $G\pi = -\frac{c.\varrho}{r-\varrho} = \frac{c.\varrho}{\varrho-r}$ genommen, weil hier ϱ negativ iſt. (168. §. n. 2.) So lange $\varrho > r$ iſt, ſo lange iſt dieſer Ausdruck poſitiv, und $G\pi > c$: alſo fällt π auſſerhalb des Glaſes, auf der Seite, wo das Object liegt, wie denn auch $A\pi = \frac{cr}{r-\varrho} = -\frac{cr}{\varrho-r}$ (168 §. n. 2.) negativ wird. Man ziehe QC als die Axe der Vorderfläche für den Punct Q, ſo laufen alle aus Q auffallende Strahlen nach der erſten Brechung in einem Punct K dieſer Axe zuſammen, ſo daß CK beynahe = CΠ iſt, weil beynahe CQ = CP iſt. Weil ferner beynahe CE = CΠ + EΠ = CK + EK, ſo iſt auch beynahe EK = EΠ, und gK = GΠ. Man ziehe EK, ſo iſt EK eine Axe der hintern Fläche, und alle aus Q kommende Strahlen liegen nach der erſten Brechung ſo, daß ſie auf K zu laufen. Mithin haben ſie in der Axe EK einen Vereinigungspunct q, und es iſt beynahe $Eq = Ep$, weil $gK = G\Pi$ war: mithin iſt auch beynahe $gq = Gp$, und PQ bildet ſich in pq umgekehrt ab, wie denn auch beynahe $nq = gq = Gp$ iſt.

Noch hat man $AO = \frac{2c}{3(1-\varrho:r)-c:r}$, und $G\omega = \frac{2c}{3(1-r:\varrho)+c:\varrho}$. Es iſt alſo

AO

$AO = -\frac{2c}{3(\varrho:r-1)+c:r}$ negativ, ſo lange $\frac{3\varrho}{r}+\frac{c}{r} > 3$ oder $3\varrho + c > 3r$, oder $\varrho > r - \frac{1}{3}c$ iſt. Demnach iſt im 177 §. $AP - AO : Gp + G\omega = PQ : pq$. So lange nun $\varrho > 2r$ bleibt, ſo lange wird AO nicht gröſſer als $\frac{2}{3}c$, und $G\omega$ nicht gröſſer als $\frac{4}{3}c$, mithin iſt noch ſehr nahe $AP : Gp = PQ : pq$. Nähert ſich ϱ dem Werth r, ſo nähert ſich AO dem Werth $-2r$, und $G\omega$ dem Werth 2ϱ. Aber auch $f = \frac{2r\varrho}{\varrho - r}$ wird ſehr groß, ſo wie $x = \frac{\delta f}{\delta - f}$, ſo lange $\delta > f$ iſt, deswegen weicht die Proportion $AP : Gp = PQ : pq$ auch alsdenn nicht ſehr von der Wahrheit ab.

188. §.

Um die Würkung der Strahlenbrechung, wenn das Licht durch den Meniſcus fällt, vollſtändig kennen zu lernen, muß man auf den im 184. §. betrachteten Fall nochmahl zurück gehen, wenn die hohle Seite der beyden Kugelflächen deſſelben dem Object zugekehrt iſt. So lange $r > \varrho$ war, ſo lange war die Brennweite $f = \frac{2r\varrho}{r-\varrho}$ poſitiv, ſo wie der Abſtand des Bildes $x = \frac{\delta f}{\delta - f}$, wenn nur $\delta > f$ bleibt. War dagegen $r < \varrho$, ſo war $f = -\frac{2r\varrho}{\varrho - r}$ negativ, mithin auch $x = -\frac{\delta f}{\delta + f}$

alle-

allemahl negativ. Dieſen Fall ſtellt die 66 Figur vor. Der Strahl PM kommt nach der erſten Brechung in die Lage MN, worin er rückwärts verlängert die Axe in Π ſchneidet, die auf die hintere Fläche *bGd* fallenden Strahlen liegen demnach ſo, als kämen ſie aus Π her, und werden in N von neuen ſo gebrochen, daß ſie rückwärts verlängert die Axe vor dem Glaſe in *p* ſchneiden. Demnach iſt *p* kein würklicher ſondern nur ein geometriſcher Vereinigungspunct. Die Strahlen fahren hinter dem Glaſe immer weiter aus einander, ihre Lage iſt indeſſen ſo, als kämen ſie aus dem Punct *p* her, und um die Aehnlichkeit mit den bisher betrachteten Eigenſchaften linſenförmiger Gläſer, die entweder auf beyden Seiten erhaben, oder nur auf der einen erhaben, auf der andern platt ſind, beyzubehalten, nennt man *p* das geometriſche Bild von *P*, und dies wird der geometriſche Brennpunct, wenn AP unendlich groß iſt. 66 F.

Eben der Punct *p* heiſt auch der Zerſtreuungspunct des Glaſes, ſo wie er bey den bisher betrachteten Gläſern ein Vereinigungs- oder Sammlungspunct war. Wenn demnach beym Concav-convex-Glaſe der hohlen Fläche Halbmeſſer kleiner als der Halbmeſſer der erhabenen Fläche iſt; ſo kann das Glas ein Zerſtreuungs-Meniſcus heiſſen, ſo wie es im umgekehrten Fall ein Sammlungs-Meniſcus iſt, wenn der hohlen Fläche Halbmeſſer gröſſer iſt, als der Halbmeſſer der erhabenen Fläche. Der Meniſcus der letztern Art wirft bey einerley Entfernung des ſtrahlenden Puncts das Bild gleich weit hinter ſich, man mag die hohle oder erhabene Seite gegen das

Object

Object kehren, (186. §.) vorausgeſetzt, daß das Glas eine ſehr geringe Dicke habe: es wird ſich aber bey fernerer Betrachtung der Eigenſchaften des Zerſtreuungs-Meniſcus ergeben, daß derſelbe, wenn die erhabene Seite gegen das Object gekehrt wird, nicht allein ebenfals die Strahlen zerſtreue, und deswegen in allen Fällen der ihm beygelegte Nahme der Sache angemeſſen ſey, ſondern auch ſeinen Zerſtreuungspunct bey gleicher Entfernung des Objects, wenn das Glas eine geringe Dicke hat, in gleicher Entfernung vor dem Glaſe behalte. Hier verbindet man am beſten mit dem bisherigen zugleich folgende Anmerkung.

Für den Zerſtreuungs-Meniſcus, die hohle Seite gegen das Object gekehrt, iſt $f = - \frac{2r\varrho}{\varrho - r}$, und $x = - \frac{\delta f}{\delta + f}$, oder $f = - \frac{2r}{1 - r : \varrho}$. Demnach iſt f allemahl gröſſer, als $2r$, weil $1 - \frac{r}{\varrho}$ ein eigentlicher Bruch iſt. Weil aber $1 - \frac{r}{\varrho}$ mit ϱ wächſt, ſo nimmt f ab, wenn ϱ wächſt, und man erhält $f = - 2r$, wenn ϱ unendlich groß wird, das heiſt, wenn die erhabene Fläche, ſich
67 F. in eine ebene Fläche verwandelt, wie es die 67. Fig. vorſtellt. Das Glas heiſt nun ein einfaches Hohlglas, ein Plan-concav-Glaß. Daſſelbe iſt alſo ebenfals ein Zerſtreuungsglas und hat ſeinen Zerſtreuungspunct in der Entfernung $x = \frac{2\delta r}{\delta + 2r}$ vor dem Glaſe.

189. §.

Iſt Q ein Punct auſſerhalb der Axe des Zer- 66
ſtreuungsglaſes, ſo giebt es unter den aus Q auf- 67 F.
fallenden Strahlen noch wie bisher einen mittlern, der beynahe ungebrochen durchgeht. Er muß in der Lage auffallen, daß er durch den Punct O der Axe läuft, deſſen Stelle die allgemeine Formul $AO = \frac{2c}{3(1 + \varrho : r) - c : r}$ beſtimmt. Nach der erſten Brechung läuft er durch π und man hat $A\pi = \frac{cr}{r + \varrho}$; nach der zweyten Brechung aber durch ω und man hat überhaupt $G\omega = \frac{2c}{3(1 + r : \varrho) - c : \varrho}$ (178. §.) Weil nun hier r negativ und kleiner als ϱ iſt, ſo iſt $A\pi = -\frac{cr}{\varrho - r}$ negativ. Weiter iſt $AO = \frac{2c}{3(1 - \varrho : r) + c : r}$ ſo lange negativ als $\frac{3\varrho}{r} > 3 + \frac{c}{r}$, oder $3\varrho > 3r + c$, oder ſo lange $r < \varrho - \frac{1}{3}c$ iſt. Alſo iſt auch $AO = -\frac{2c}{3(\varrho : r - 1) - c : r}$, und $G\omega = \frac{2c}{3(1 - r : \varrho) - c : \varrho}$. Demnach liegen die Puncte O, π, nicht innerhalb des Glaſes, ſondern auf der Seite, wo das Object befindlich iſt.

67 F. Für das Planconcav-Glas iſt ϱ unendlich groß, alſo verſchwinden $A\pi$ und AO, und der mittlere Strahl muß in A auffallen, wie denn auch hier kein andres Element der Kugelfläche BAD mit *bd* parallel ſeyn kann, das einzige in A ausgenommen. Der zum zweyten mahl gebrochene Strahl geht durch ω, wenn man $G\omega = \frac{2}{3}c$ nimmt.

Man ziehe nun die Axe QC*a* der Vorderfläche, ſo haben alle aus Q auffallende Strahlen einen Vereinigungspunct in K, auch iſt beynahe *a*K = AΠ, mithin CK = CΠ, wenn beynahe CQ = CP iſt. Weiter ziehe man die Axe EK*g* der hintern Fläche, die beym Planconcavglaſe mit der Axe PC parallel liegt, weil E von A oder G unendlich weit entfernt iſt, ſo iſt auch beynahe *g*K = GΠ, und weil aus Q die auf die hintere Fläche *b*G*d* fallenden Strahlen ſo liegen, als kämen ſie aus dem Punct K her, ſo haben ſie in *g*K einen Vereinigungspunct *q*, und es iſt beynahe *gq* = G*p*, weil *g*K = GΠ war. Indeſſen iſt hier *q* kein Sammlungs- ſondern ein Zerſtreuungspunct: er iſt ein geometriſches Bild von Q, wie *p* ein geometriſches Bild von P. Eben ſo hat jeder Punct zwiſchen P und Q ein geometriſches Bild zwiſchen *p* und *q*. Die ganze Reihe der Bilder von *p* bis *q* iſt ein geometriſches Bild von PQ, welches hier mit dem Object einerley Stellung nicht wie beym Sammlungsglaſe die umgekehrte Stellung hat.

Die Regel des 177. §. findet übrigens auch hier ihre Anwendung: nur iſt zu bemerken, weil beym Zerſtreuungsglaſe nicht der zum zweytenmahl gebrochene, ſondern der auffallende Strahl Q*m* ſelbſt

durch

durch q läuft, daß eigentlich AP — AO : Ap — AO = PQ : pq ſey, vorausgeſetzt, daß O wie in der 66 Fig. vor dem Glaſe liegt. Beym Planconcav-Glaſe, wenn $\varrho = \infty$ iſt, hat man AO = o, (67. Fig.) alſo iſt die Regel des 177. §. hier völlig richtig. Beym Zerſtreuungs-Meniſcus iſt beynahe AO 66 F.
$= -2r$, wenn r noch ſehr nahe $= \varrho$ iſt. Indeſſen iſt alsdenn $f = -\frac{2r\varrho}{\varrho - r}$ ſehr groß, ſo wie $x = -\frac{\delta f}{\delta + f}$, wenn $\delta > f$ iſt; alſo iſt doch AO in Vergleichung mit AP und A$p = x$ nur klein. Je kleiner übrigens r gegen ϱ iſt, deſto kleiner werden AO, wie denn beynahe AO $= -\frac{2}{3}c$ iſt, wenn $r = \frac{1}{2}\varrho$ genommen wird. Demnach behält die Regel des 177. §. ihre Richtigkeit.

190. §.

Es ſey nun die erhabene Seite des Zerſtreuungs- 68
Meniſcus dem Object zugekehrt, ſo daß r poſitiv 69 F.
bleibt, aber ϱ negativ, und überdem $\varrho < r$ iſt, ſo hat man aus dem 178. §. $f = -\frac{2r\varrho}{r - \varrho}$ und $x = -\frac{\delta f}{\delta + f}$, woraus alſo erhellet, daß der Brennpuncts Abſtand, ſo wie der Abſtand des Bildes, wiederum negativ ſey. Für das Plan-concav-Glaß wird $f = -2\varrho$, wenn r unendlich groß wird, und $x = -\frac{2\delta\varrho}{\delta + 2\varrho}$, alles in der Vorausſetzung, daß die Dicke des Glaſes in Ver-

gleichung mit den Halbmeſſern ſehr klein ſey. Der Abſtand des Zerſtreuungspuncts und des geometriſchen Bildes ſind alſo in der erwehnten Vorausſetzung einerley, man mag welche Seite man will dem Object zukehren. Zugleich rechtfertiget ſich nun der Nahme des Zerſtreuungsglaſes. (188. §.)

Fällt aus Q ſeitwärts der Axe ein Strahlenkegel auf das Glas; ſo giebt es unter denſelben einen mittlern, deſſen ganze Lage aus dem 178. §. (ϱ negativ genommen), die Formuln $AO = \frac{2c}{3(1-\varrho:r)-c:r}$, $A\pi = \frac{cr}{r-\varrho}$, und $G\omega = \frac{2c}{3(1-r:\varrho)+c:\varrho}$ oder $G\omega = -\frac{2c}{3(r:\varrho-1)-c:\varrho}$ beſtimmen. Weil nun $\varrho < r$ angenommen wird, ſo iſt $A\pi > c$ und π fällt hinter das Glas.

Für das Planconcav-Glaß, r unendlich groß angenommen, iſt $A\pi = c$ und $G\omega = 0$, alſo fallen π und ω in G zuſammen. Weiter iſt $AO = \frac{2}{3}c$, alſo ſehr nahe $AP : Ap = PQ : pq$. Der Regel des 177. §. gemäß.

Für den Zerſtreuungs-Meniſcus iſt zwar beynahe $AO = -2r$, wenn ϱ ſehr nahe $= r$ iſt. Doch iſt alsdenn $f = -\frac{2r\varrho}{r-\varrho}$ ſehr groß, und $x = Ap = -\frac{\delta f}{\delta + f}$ ebenfals, wenn $\delta > f$ iſt; mithin noch beynahe $AP : Ap = PQ : pq$. Je kleiner

kleiner ϱ gegen r iſt deſto kleiner wird AO, und die Vorausſetzung $\varrho = \frac{1}{2}r$ würde $AO = \frac{4}{5}c$ geben.

191. §.

So wie der Zerſtreuungs-Meniſcus ſich in ein Planconcav-Glas verwandelt, wenn der Halbmeſſer der erhabenen Fläche unendlich groß wird; ſo kann eben dieſer Halbmeſſer hiernächſt in den entgegen geſetzten Zuſtand übergehen. Auf ſolche Art erhält man ein doppelt Hohlglas, wovon beyde Seitenflächen hohl ſind. Auch dies behält die Natur eines Zerſtreuungsglaſes. Wenn nemlich in der Formul für die Brennweite, die Dicke des Glaſes ſehr klein angenommen, (178. §.) beyde Halbmeſſer r und ϱ negativ angenommen werden; ſo hat man $f = -\frac{2r\varrho}{r+\varrho}$ allemahl negativ, mithin iſt auch der Abſtand des Bildes $x = \frac{-\delta f}{\delta + f}$ allemahl negativ, und das Bild p des Puncts P liegt vor dem Glaſe. Aus dem Punct Q ſeitwärts der Axe falle ein Strahlenkegel auf das Glas, ſo geht der mittlere Strahl Qm durch O, wenn man $AO = \frac{2c}{3(1+\varrho:r)+c:r}$ nimmt; der zum erſtenmahl gebrochene Strahl geht durch π, wenn $A\pi = \frac{cr}{r+\varrho}$ genommen wird, ſo wie der zum zweytenmahl gebrochene durch ω geht, $G\omega = \frac{2c}{3(1+r:\varrho)+c:\varrho}$ genom- 70 F.

genommen. Demnach iſt allemahl AO $< \frac{2}{3}c$, ſo wie auch $G\omega < \frac{2}{3}c$, und alle drey Puncte O, π, ω, liegen innerhalb des Glaſes.

Durch Q ziehe man die Axe QCa der Vorderfläche, ſo haben alle aus Q auffallende Strahlen in derſelben einen Vereinigungspunct K, und es iſt beynahe CK = CΠ, weil beynahe aQ = AP iſt. Durch K ſey die Axe KE der hintern Fläche gezogen, ſo fallen die zum erſten mahl gebrochenen Strahlen auf die hintere Fläche ſo, als kämen ſie aus K her: mithin haben ſie in gK einen Vereinigungspunct q, und weil beynahe EK = EΠ, oder gK = GΠ iſt, ſo hat man auch beynahe gq = Gp, und pq iſt ein geometriſches Bild von PQ. Zugleich iſt, wie im 177. §. AP : Ap = PQ : pq, weil AO in Vergleichung mit AP und Ap verſchwindet.

192. §.

Wenn der Abſtand des Objects vom Glaſe kleiner iſt, als die Brennweite, ſo nimmt die auf beyden Seiten erhabene Linſe ebenfals die Natur eines Zerſtreuungsglaſes an. Die Brennweite $f = \frac{2r\varrho}{r+\varrho}$ iſt allemahl poſitiv, aber der Abſtand des Bildes $x = \frac{\delta f}{\delta - f}$ negativ, wenn $\delta < f$

71 F. iſt. Dieſen Fall ſtellet die 71. Fig. vor, wo AP $< f$ genommen iſt: der aus P auffallende Strahl PM wird in die Lage MN gebrochen, worin er rückwärts verlängert die Axe in Π ſchneidet: und wenn man das Einfallsloth EN ziehet, ſo ſiehet man

man, daß der Strahl zum zweyten mahl in die Lage $N\nu$ gebrochen werde, ſo daß er rückwärts verlängert die Axe in p ſchneidet, da dann p kein Sammlungs ſondern ein Zerſtreuungspunct iſt. Wird aus Q der mittlere Strahl $Qm\pi n$ gezogen, imgleichen die Axe QC der Vorderfläche; ſo liegen alle aus Q auffallende Strahlen nach der erſten Brechung ſo, als kämen ſie aus K her, und haben nach der zweyten Brechung einen Vereinigungspunct q in der Axe KEg der hintern Fläche, und dieſer Punct q liegt zugleich im mittlern Strahl Qm. Das Object, PQ aber hat ſein geometriſches Bild in pq, auch iſt dem 177. §. gemäß $AP : Ap = PQ : pq$.

Die übrigen Sammlungsgläſer haben mit der auf beyden Seiten erhabenen Linſe die eben erwehnte Eigenſchaft gleichfals gemein. Ihre Brennweite iſt allemahl poſitiv, ſo wie im Gegentheil die Brennweite der Zerſtreuungsgläſer allemahl negativ iſt. Für die Sammlungsgläſer iſt alſo $x = \frac{\delta f}{\delta + f}$ negativ, wenn $\delta < f$ iſt: im Gegentheil bleibt für die Zerſtreuungsgläſer $x = -\frac{\delta f}{\delta + f}$ allemahl negativ. Noch unterſcheidet ſich das Sammlungsglas vom Zerſtreuungsglaſe darin, daß bey jenem $x = -\frac{\delta f}{f - \delta}$ ($\delta < f$ genommen) allemahl gröſſer als δ, bey dieſem $x = -\frac{\delta f}{\delta + f}$ allemahl kleiner als δ iſt. Das heiſt beym Samm-

lungsglaſe, wenn das Object dem Glaſe näher liegt, als der Brennpunct, iſt die Entfernung des geometriſchen Bildes vom Glaſe gröſſer, als die Entfernung des Objects; beym Zerſtreuungsglaſe aber iſt die Entfernung des geometriſchen Bildes vom Glaſe kleiner; als die Entfernung des Objects. Eben deswegen iſt auch beym Sammlungsglaſe, wenn es ein Zerſtreuunsglas wird, des Bildes Durchmeſſer gröſſer als des Objects Durchmeſſer, beym Zerſtreuungsglaſe hingegen iſt jener Durchmeſſer allemahl kleiner, als dieſer:

denn es iſt in allen Fällen $pq = \frac{x}{\delta} \cdot PQ$.

193. §.

Alle Sammlungsgläſer ſind zugleich Brenngläſer. Wenn die Axe eines ſolchen Glaſes gegen den Mittelpunct der Sonne gerichtet iſt, ſo verurſachet das deutliche Bild der Sonne hinter dem Glaſe, wenn man es auf eine brennbare Maſſe fallen läßt, eine ſolche Hitze, daß eine Entzündung erfolgt, weil in jedem Punct des Bildes ſoviele Strahlen zuſammen gebracht ſind, als von einem damit zuſammengehörigen Punct der Sonnenfläche auf das Glas fallen, und ſich über deſſen Vorderfläche verbreiten. Was bey einem ſolchen Glaſe der focus heiſt, und gewöhnlich Brennpunct, beſſer aber der Brennraum genannt wird, das iſt eigentlich das Bild der Sonne hinter dem Glaſe: es iſt ein kleiner Kreis, deſſen Halbmeſſer $= \frac{x}{\delta}\,PQ$, oder hier $= \frac{f}{\delta}\,PQ$, weil

wegen

wegen der ſehr groſſen Entfernung der Sonne von der Erde δ als unendlich groß, und $x = f$ (178. §.) angenommen werden kann. Richtiger heiſt nur der Mittelpunct des Bildes der Brennpunct. Weil übrigens in dieſem Fall $\frac{PQ}{\delta}$ die Tangente des ſcheinbaren Halbmeſſers der Sonne iſt, den man $= 16'$ annehmen kann, ſo iſt der Halbmeſſer des Brennraums oder des Sonnenbildes $= 0{,}0046542 \,.\, f$. Wäre demnach die Brennweite 1 Fuß, ſo wäre dieſer Halbmeſſer $=$ 0,6702048 Duodecimal-Linien.

194. §.

Wenn man die Halbmeſſer beyder Kugelflächen einer Glaslinſe unendlich groß ſetzt, ſo verwandelt ſich die Linſe in ein Plan-Glas. Ein ſolches Planglas gehört in die Claſſe der Zerſtreuungsgläſer, und die Formuln $f = \frac{2r\varrho}{r+\varrho}$, $x = \frac{\delta f}{\delta - f}$, geben f unendlich groß, ſo wie $x = -\delta$ Man ſiehet leicht, daß der Natur der Plangläſer gemäß Strahlen, die auf das Glaß in paralleler Lage auffallen, nach der zweyten Brechung hinter dem Glaſe wieder in die parallele Lage kommen müſſen; daß mithin der Vereinigungspunct ſolcher Strahlen, die von einem unendlich weit entlegenen Punct auf das Glaß fallen, ebenfals vom Glaſe unendlich weit entfernt ſey. Vermöge der zweyten Gleichung $x = -\delta$ iſt die Stelle des Bildes mit der Stelle des Objects einerley, jedoch nur alsdenn, wenn die Dicke des Glaſes c in Vergleichung mit

der Entfernung δ des Objects ſehr klein iſt, welches die Formuln $f = \frac{2r\varrho}{r+\varrho}$ und $x = \frac{\delta f}{\delta - f}$ vorausſetzen. Richtiger iſt $f = \frac{2\varrho(3r-c)}{3(r+\varrho)-c}$, und $x = \frac{\varrho f((3r-c)\delta + 2rc)}{\varrho\delta(3r-c) - rf(3\varrho - c)}$, und für das Planglas giebt zwar die erſte Formul ebenfals f unendlich groß, dagegen aber erhält man $x = -$
72 F. $\delta - \frac{2}{3}c$, oder $Gp = -(\delta + \frac{2}{3}c)$. Es iſt nemlich dies x die Entfernung Gp des Bildes p von der hintern Fläche bd des Glaſes, und $\delta = AP$ die Entfernung des Objects P von der vordern Fläche BD. Ferner iſt die Dicke des Glaſes $AG = c$, mithin die Entfernung des Bildes von der vordern Fläche BD, oder $Ap = Gp - AG = \delta + \frac{2}{3}c - c$, d. i. $Ap = \delta - \frac{1}{3}c$. Mithin liegt das Bild p der Vorderfläche um $\frac{1}{3}$ der Dicke des Glaſes näher, als das Object P.

Uebrigens ſind dieſe Sätze dahin eingeſchränkt, daß der Winkel APM nur klein ſeyn muß. So lange dieſe Vorausſetzung zum Grunde liegt, wird der Punct Π, worin der zum erſtenmahl gebrochene Strahl MN die Axe AP ſchneidet, vermittelſt der Formul $A\Pi = \frac{m}{n}\delta$ (120. §.) gefunden. Auf die hintere Fläche bd alſo fällt der Strahl MN ſo, als käme er von dem Punct Π der Axe her in einer Entfernung $G\Pi = \frac{m}{n}\delta + c$ von der Fläche bd; mithin ſchneidet er nach der Brechung die

die Axe in einem Punct p, deſſen Entfernung Gp

$$= \frac{n}{m} \cdot G\pi = \delta + \frac{n}{m} c \text{ iſt, (120. §. n. 2.)}$$

oder $Gp = \delta + \frac{2}{3}c$, $m : n = 3 : 2$ angenommen: und dies iſt eben der Ausdruck, welchen die allgemeine Formul für die Glaslinſe gab.

Der XV. Abſchnitt.

Theorie der Erleuchtung des Bildes linſenförmiger Gläſer und ſphäriſcher Hohlſpiegel.

195. §.

Ein Sonnenſtrahl AB der im finſtern Zimmer 73 F. mit einer ebenen Glastafel RPQS aufgefangen wird, ſtellet folgende Erſcheinungen dar. Wenn derſelbe in B auffält, ſo wird ein Theil der geſammten Lichtmenge, die den Strahl AB ausmacht, von der Vorderfläche PQ nach B b den Geſetzen des 81. §. gemäß zurück geworfen, der übrige Theil aber in die Lage BC, wie es den Geſetzen des 115. u. f. §. gemäß iſt, gebrochen. Man kann im finſtern Zimmer nicht allein den einfallenden Strahl AB, ſondern auch den zurück geworfenen Bb, deutlich ſehen; denn gewöhnlich werden ſich in dem ganzen Raum AB, ſo wie in Bb, unzählig viele erleuchtete Stäubchen zeigen. Ferner wird

wird nicht allein die Stelle B, wo der Strahl auf≠fällt, ſondern auch in der Glaßtafel ſelbſt der Raum BG, durch welchen das gebrochene Licht durchdringt, überal, von welcher Seite man ihn auch betrachtet, zu ſehen ſeyn. Bey C erfolgt, wie bekannt iſt, die zweyte Brechung, wenn da≠ſelbſt das Licht aus dem Glaſe wieder in die Luft gehet, jedoch ſo, daß wiederum nicht alles in C auffallende Licht nach D durchgehet, ſondern ein Theil nach D zurück geworfen wird.

Wenn PQ die Fläche eines ſtillſtehenden klaren in einem Gefäß befindlichen Waſſers iſt, welche den Lichtſtrahl auffängt; ſo wird ebenfals ein Theil des in B auffallenden Lichts nach B*b* zurück gewor≠fen, ein Theil aber dringt nur in die durchſich≠tige Maſſe Waſſer hinein. Soviel bisher bekannt iſt, kennt man noch keine durchſichtige Maſſe in der Natur, die gar nichts von dem auffallenden Licht zurück ſchickte: man muß vielmehr allemahl den gebrochenen Theil des Lichts, der in die Maſſe hinein dringt, von dem zurück geworfenen un≠terſcheiden. Weil ferner der ganze Raum BC von allen Seiten betrachtet ſichtbar iſt; ſo muß ein Theil des in B gebrochenen und in die Maſſe hin≠eindringenden Lichts von den Theilchen der Maſſe zwiſchen B und C nach allen Seiten zerſtreuet wer≠den. Dieſemnach leidet das Licht, welches der auffallende Strahl AB enthält, bevor es bis zur hintern Fläche RS durchgedrungen iſt, einen zwie≠fachen Abgang, einmahl wegen der Zurückwer≠fung nach B *b*, und hieher gehört nur alles dasje≠nige, was unter einerley Winkel nach dem Ge≠ſetz des 81. §. zurück ſtrahlet, in Anſehung deſſen

alſo

alſo die Fläche PQ als Spiegelfläche zu betrachten iſt, denn ſelbſt die Stelle B zerſtreuet etwas Licht um ſich her: zweytens wird von demjenigen, welches in die Maſſe ſelbſt hinein dringt, noch ein Theil nach allen Seiten zerſtreuet, und dieſen Theil mit demjenigen zuſammen genommen, welches die Stelle B nach allen Seiten und nicht mit dem übrigen unter einerley Winkel zurück ſendet, kann man das zerſtreuete Licht nennen.

196. §.

Je kleiner der zerſtreuete Theil des Lichts iſt, deſto durchſichtiger iſt die Maſſe: wenn gar kein Licht zerſtreuet würde, und alles bey B in die Maſſe eindringende Licht auf C fiele, ſo wäre die Maſſe vollkommen durchſichtig. Es giebt nemlich gar keine durchſichtige Maſſen, die ſchlechthin alles auffallende Licht durchlaſſen, und gar nichts zurückwerfen. Deswegen können nur diejenigen Maſſen hieſelbſt als vollkommen durchſichtig betrachtet werden, die gar nichts von dem hineindringenden Licht zerſtreuen. Ob es in dieſem Verſtande vollkommen durchſichtige Maſſen in der Natur gebe? iſt eine Frage, deren völlig beſtimmte Entſcheidung hier eben nicht nothwendig iſt. Bisher kennet man keine dergleichen vollkommen durchſichtige Maſſe. Man kann indeſſen dieſen Begrif einer vollkommen durchſichtigen Maſſe zum Grunde legen, und einer jeden andern Maſſe deſto mehr Durchſichtigkeit zuſchreiben, je kleiner die Menge des zerſtreueten Lichts iſt; im Gegentheil aber deſto weniger Durchſichtigkeit, und deſto mehr Undurchſichtigkeit, je gröſſer die Menge des

zer-

zerſtreueten Lichts in Vergleichung mit dem durchfallenden iſt.

Geſetzt aber die Maſſe RPQS wäre auch in dem 73 F. eben erklärten Verſtande vollkommen durchſichtig, ſo würde doch der zum erſten mahl gebrochene Strahl BC bey der zweyten Brechung in der Fläche RS einen neuen Abgang leiden. Denn in C, wo der zum erſten mahl gebrochene Strahl auf die Fläche RS fällt, erfolgt auſſer der Brechung in die Lage C*c* eine neue Zurückſtrahlung nach CD, und dies auf D fallende Licht wird abermahl zum Theil in D*d* gebrochen, zum Theil nach DE zurückgeworfen. Was auf E fällt, leidet eine neue Brechung in E*e* und ein Theil davon ſtrahlt nach EF zurück. Auch dieſer auf F fallende Theil wird nach F*f* gebrochen, ein Theil davon aber ſtrahlt nach FG zurück, leidet in G eine neue Brechung in G*g*, jedoch ſo, daß abermahl ein Theil nach GH zurück ſtrahlt. Die Stellen B, C, D, E, F, G, H, I, u. ſ. f. ſind ſehr kenntlich, auch iſt der gebrochene Weg des Lichts BCDEFGHI u. ſ. f. im finſtern Zimmer ganz wohl wahrzunehmen, wenn RPQS eine etwas dicke Glastafel iſt, fängt man die Strahlen, welche zu beyden Seiten aus der Glastafel in die Luft fahren, mit einem weiſſen Papier auf, ſo zeigen ſich auf demſelben eben ſo viele kleine Sonnenbilder. Das erſte, welches von dem zurückgeworfenen Strahl B*b* herrührt, iſt ſchwächer als dasjenige, welches der zum zweyten mahl gebrochene Strahl C*c* auf das Papier wirft. Die folgenden Bilder, welche die Strahlen D*d*, E*e*, F*f*, G*g*, H*h*, I*i*, u. ſ. f. auf das Papier werfen, werden nach der genannten Ordnung

immer

immer ſchwächer, bis endlich das zehnte oder zwölfte kaum mehr merklich bleibt. Vergröſſert man den Einfallswinkel PBA, ſo rücken dieſe kleinen Sonnenbilder näher zuſammen, und verlieren ſich deſto früher in einander, je geringer die Dicke der Glastafel, und je gröſſer die Oeſnung iſt, durch welche das Sonnenlicht einfällt.

197. §.

Dieſe Erfahrungen beſtättigen ſoviel, daß nie alles Licht, was auf ein Stück Glaß, oder ſonſt eine durchſichtige Maſſe fällt, hindurch gehe. Es wäre ſehr intereſſant, in jedem beſondern Fall genau zu wiſſen, in welchem Verhältniß das zurück geworfene und das zerſtreuete Licht gegen das hindurch gehende ſtehe, und in wiefern dies Verhältniß ſowohl von der Beſchaffenheit der durchſichtigen Maſſen ſelbſt, als auch von der Gröſſe des Einfallswinkels, abhänge. Was insbeſondre das zerſtreuete Licht betrift, ſo iſt leicht zu erachten, daß die Menge deſſelben bey einer und eben derſelben durchſichtigen Maſſe von der Tiefe abhängen werde, um welche das Licht hineindringt. Eine dickere Glaßtafel wird mehr Licht zerſtreuen, als eine dünnere, wenn das Licht unter einerley Winkel auffällt. Wenn dagegen zwey Glaßtafeln gleiche Dicke haben, und das Licht unter einerley Winkel auffällt, ſo muß die Menge des zerſtreueten Lichts in beyden gleich groß ſeyn, fals beyde gleich durchſichtig ſind: wäre aber die eine durchſichtiger, als die andre, ſo würde in der erſten die Menge des zerſtreueten Lichts nicht ſo groß, als in der andern ſeyn. Doch könn-

könnten wohl beyde bey ungleicher Durchſichtigkeit gleich viel Licht, das unter einerley Winkel auffiele, zurück werfen. Weitere Unterſuchungen hierüber werden unten vorkommen: hier war es genug, der Sache vorläufig zu erwehnen. Weil nemlich nunmehro die Theorie von der Erleuchtung desjenigen Bildes vorgetragen werden ſoll, das ein linſenförmiges Glaß wegen der Strahlenbrechung darſtellet, ſo iſt leicht zu erachten, daß eigentlich nicht alles dasjenige Licht dabey in die Rechnung gezogen werden müſte, was auf die Vorderfläche des Glaſes fällt, ſondern dasjenige, was nach Abzug des zurück geworfenen und zerſtreueten Lichts würklich hindurch gehet. Hier aber wird beydes ſowohl die Zurückwerfung, als auch die Zerſtreuung des Lichts noch beyſeit geſetzt, und die Sache ſo betrachtet werden, als wenn alles Licht, das von dem Object auf die Vorderfläche des Glaſes fällt, durch die Linſe hindurch gienge, und im Bilde wieder vereiniget würde.

198. §.

74 F. Es ſey alſo ADGB ein Schnitt durch die Axe AP eines linſenförmigen Sammlungs-Glaſes; die Axe deſſelben ſey gegen die Mitte P eines Objects gerichtet, das aus der Mitte des Glaſes betrachtet, eine kreisförmig ſcheinende Gränze hat, deren Ebene auf der Axe des Glaſes ſenkrecht iſt, und PQ = PR ſey der Halbmeſſer des Objects. Ferner ſey KB = KD der Halbmeſſer des kreisförmigen Umfangs der Linſe, der hier kurz der Halbmeſſer des Glaſes heiſſen ſoll, und von den Halbmeſſern, der vordern und hintern Fläche der Linſe

unter-

unterſchieden werden muß. Auf die Ebene des kreisförmigen Umfangs der Linſe würde das Object QR eben ſoviel Licht werfen, als es auf die Vorderfläche des Glaſes wirft, und man weis nun, daß es mit der Brechung des Lichts im Glaſe, fals nichts davon zurück geworfen oder zerſtreuet würde, folgende Bewandniß hätte. Von jedem Punct P, Q, R, des Objects, es mag für ſich leuchtend ſeyn, oder das anderswoher empfangene Licht auf das Glas zurück werfen, fällt auf das Glas ein Strahlenkegel PBD, QBD, RBD, alle zu einerley Kegel gehörige Strahlen werden durch die zweymahlige Brechung im Glaſe in die Lage gebracht, daß ſie einen Kegel zuſammen gehender Strahlen BpD, BqD, BrD ausmachen, wovon die Spitzen p, q, r, wieder beynahe in einerley Ebene liegen, die auf der Axe der Linſe ſenkrecht iſt. Jede Spitze eines dieſer Kegel zuſammengehender Strahlen iſt das Bild der Spitze des dazu gehörigen Kegels aus einander fahrender Strahlen vor dem Glaſe, und alle Bilder zuſammen machen das Bild des Objects aus, wovon $pq, = pr$ den Halbmeſſer, qr den Durchmeſſer vorſtellt.

Man ſetze nun, wie im 178. §. den Halbmeſſer der Vorderfläche $= r$, den Halbmeſſer der Hinterfläche $= \varrho$, $AP = \delta$, $Gp = g$, ſo iſt g, was im 178. §. x war, und man hat $g =$

$$\frac{2r\varrho\delta}{(r+\varrho)\,\delta - 2r\varrho}$$, wenn vorausgeſetzt wird, daß die Dicke des Glaſes in Vergleichung mit δ und r, ϱ, ſehr klein ſey, wie ich bey den folgenden Unterſuchungen allemahl annehmen werde: nur ver-

ſteht es ſich von ſelbſt, daß der Fall nicht hieher gehört, wenn das Glas eine ganze Kugel iſt. Noch ſetze man $PQ = PR = p$, $pq = pr = q$, ſo iſt $\delta : p = g : q$ (177. §.) alſo $q = \frac{g \cdot p}{\delta}$,

oder $q = \frac{2r\varrho \cdot p}{(r + \varrho)\delta - 2r\varrho}$.

199. §.

74 F. Der Glanz einer kreisförmigen Ebene QR iſt bekannt, nebſt ihrer Entfernung von der Linſe BD, deren Axe den leuchtenden Kreis in ſeinem Mittelpunct ſenkrecht trift: auch iſt des letztern Halbmeſſer nebſt den Abmeſſungen der Linſe gegeben: man ſoll die mittlere Klarheit des deutlichen Bildes qr finden.

Aufl. 1) Nimmt man den Glanz des Objects $QR = 1$ an, und die von demſelben auf die Linſe fallende Lichtmenge $= M$, ſo hat man M aus dem 77. §. wenn man bemerkt, daß daſelbſt a, r, diejenigen Linien waren, die hier δ, p, heiſſen, und daß ϱ daſelbſt der Halbmeſſer des erleuchteten Kreiſes war, der hier $KB = KD$ iſt. Es ſey alſo hier $KB = b$, ſo hat man $M = \frac{1}{2}\pi^2 (\delta^2 + p^2 + b^2 - \sqrt{((\delta^2 + p^2 + b^2)^2 - 4p^2 b^2)})$. Weil nun mit Beyſeitſetzung der Zurückwerfung und Zerſtreuung des Lichts eben dieſe Lichtmenge ſich in dem Bilde pq hinter dem Glaſe wieder vereinigen muß, deſſen Fläche $= \pi q^2$ iſt, ſo findet man die mittlere Erleuchtung des Bildes $Y = \frac{M}{\pi q^2} = \frac{1}{2}\pi$.

$\frac{1}{q^2} \cdot (\delta^2 + p^2 + b^2 - \sqrt{((\delta^2 + p^2 + b^2)^2 - 4b^2 p^2)})$.

2) Das Dreyeck BQD ſtellet einen Schnitt durch die Axe eines der äuſſerſten auf die Linſe fallenden Strahlenkegel vor, der zugleich auf ſeiner Grundfläche BD ſenkrecht iſt, und BQ, DQ ſind die in dieſem Schnitt liegenden Seitenlinien des Kegels QBD. Es iſt aber $BQ = \sqrt{(\delta^2 + (p+b)^2)}$, $DQ = \sqrt{(\delta^2 + (p-b)^2)}$, folglich $\frac{1}{2}(BQ^2 + DQ^2) = \delta^2 + p^2 + b^2$, und $BQ^2 . DQ^2 = (\delta^2 + p^2 + b^2) - 4p^2 b^2$, alſo $M = \pi^2 (\frac{1}{4}(BQ^2 + DQ^2) - \frac{1}{2} BQ . DQ)$, oder $M = \frac{1}{4}\pi^2 (BQ - DQ)^2$, und man hat auch $Y = \frac{1}{4}\pi (BQ - DQ)^2 : q^2$.

3) Vermöge der im 78. §. n. 2. erwieſenen Eigenſchaft des Trapezii BDQR hat man $DQ^2 + QR . BD = BQ^2$, und $BQ^2 - DQ^2 = QR . BD = 4pb$, alſo $BQ - DQ = \frac{4pb}{BQ + DQ}$, und man erhält auch $M = \frac{\pi^2 p^2 b^2}{\frac{1}{4}(BQ + DQ)^2}$, ſo wie die mittlere Klarheit des Bildes $Y = \frac{\pi p^2 b^2}{\frac{1}{4} q^2 (BQ + DQ)^2}$, oder auch $Y = \frac{\pi \delta^2 b^2}{\frac{1}{4} g^2 (BQ + DQ)^2}$, und weil $\frac{b}{g} = \text{tang } KpD$, ſo iſt auch $Y = \frac{\pi \delta^2 \text{ tang } KpD^2}{\frac{1}{4}(BQ + DQ)^2}$.

4) Wenn das Object ſehr weit entlegen iſt, und der Bruch $\frac{b}{\delta}$ als verſchwindend betrachtet

werden kann; ſo hat man $BQ + DQ = 2\sqrt{(\delta^2 + p^2)}$, und $Y = \frac{\pi p^2\, b^2}{q^2\,(\delta^2 + p^2)}$, oder auch $Y = \frac{\pi \delta^2\, b^2}{g^2\,(\delta^2 + p^2)}$. Weil ferner $\frac{b}{g} = \text{tang}\, GpD$, und $\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + p^2}} = \text{coſ}\, PAQ$, ſo erhält man $Y = \pi \,.\, \text{coſ}\, PAQ^2 \,.\, \text{tang}\, GpD^2$.

80 F. 5) Iſt das Sammlungsglaß eine ganze Kugel, wie ADGB, (80. Fig.) und $BAD = 2AD = 2AB$, dasjenige Segment der Kugel, welche das von QR auffallende Licht auffängt, den übrigen Theil der Kugel bedeckt angenommen; ſo hat man ebenfals $M = \frac{\pi^2 \,.\, p^2 \,.\, b^2}{\frac{1}{4}(BQ + DQ)^2}$, wenn $KD = KB = b$ geſetzt wird, und $Y = \frac{\pi \,.\, p^2\, b^2}{\frac{1}{4} q^2\,(BQ + DQ)^2}$, oder $Y = \frac{\pi \,.\, CP^2 \,.\, KD^2}{\frac{1}{4} Cp^2 \,.\, (BQ + DQ)^2}$. Man verzeichne das Rechteck CKDE, und ziehe Ep, ſo iſt $\frac{CE}{Cp} = \frac{KD}{Cp} = \text{tang}\, CpE$, und man hat $Y = \frac{\pi \,.\, CP^2 \;\text{tg} \,.\, CpE^2}{\frac{1}{4}(BQ + DQ)^2}$: wenn demnach b ſo klein iſt, daß man $BQ + DQ = 2\sqrt{(\delta^2 + p^2)}$ annehmen kann, ſo wird $Y = \pi \,.\, \text{coſ}\, PCQ^2 \,.\, \text{tg}\, CpE^2$, weil hier $\delta = CP$, $g = Cp$ iſt.

6) Es ſey m ein Element der leuchtenden Fläche, die ihr Licht auf die Linſe wirft, und n dasjenige

nige Element der Fläche des Bildes, woſelbſt das aus *m* ausgehende Licht ſich wieder vereiniget. Verſtehet man alsdenn durch *p* den unbeſtimmten Halbmeſſer P*m*, ſo iſt unbeſtimmt $pn = q = \frac{g}{\delta}$. *p*. Wächſt P*m* = *p* um das Differential $m\mu = dp$, ſo wächſt $pn = q$ um das Differential $n\nu = dq = \frac{g}{\delta} \cdot dp$. Von allen gleichen Elementen des Ringes zwiſchen den Kreiſen durch *m* und *μ* fällt gleich viel Licht auf die Linſe, und die dazu gehörigen Elemente des Bildes liegen in dem Ringe zwiſchen den Kreiſen durch *n* und *ν*. Demnach iſt der Ring, deſſen Breite *nν* vorſtellt, gleichförmig erleuchtet, wenn man annimmt, daß das Object QR in allen Elementen einen gleichen eigenen oder anders woher entlehnten Glanz haben.

200. §.

Wenn man ſich an die Lehren von der Wirkung desjenigen Lichts erinnert, das von den Kugelſpiegeln, und beſonders von ſphäriſchen Hohlſpiegeln zurück geworfen wird, und dabey in Erwägung ziehet, daß das Licht, welches der Hohlſpiegel zurück wirft, ein ähnliches Bild mache, wie dasjenige, was im Sammlungsglaſe gebrochen wird; ſo nimmt man leicht war, daß die Sätze des 198. und 199. §. nur mit geringer Aenderung auch beym Hohlſpiegel ihre Anwendung finden. Es ſey nemlich BAD ein Schnitt durch die Axe AP eines ſphäriſchen Hohlſpiegels, und dieſe Axe ſey 33 F.

Aa 3 gegen

gegen die Mitte P eines Objects gerichtet, das aus der Mitte A des Spiegels geſehen eine kreisförmige Gränze hat, deren Ebene auf der Axe AP ſenkrecht iſt, und PQ = PR ſey der Halbmeſſer des Objects. Ferner ſey KD = KB der Halbmeſſer vom kreisförmigen Umfange des Spiegels, der hier der Halbmeſſer der Oefnung des Spiegels heiſſen ſoll, und dieſer Halbmeſſer KD ſey in Vergleichung mit dem Halbmeſſer AC des Spiegels ſelbſt ſehr klein. Auf dieſe Ebene der Oefnung des Spiegels würde das Object QR eben ſoviel Licht werfen, als es auf die Fläche des Spiegels wirft, und man weis aus dem VIII. Abſchnitt, daß es mit der Zurückwerfung des Lichts von der Spiegelfläche, wenn nichts davon verlohren gienge, folgende Bewandniß hätte. Von jedem Punct P, Q, R des Objects, (es mag übrigens dies Object kreisförmig ſeyn, oder ſonſt eine andre Geſtalt haben,) fällt auf den Spiegel ein Strahlenkegel, wie PBD, QBD, RBD, und alle zu einerley Kegel gehörige Strahlen werden durch die Zurückwerfung in die Lage gebracht, daß ſie einen Kegel zuſammen gehender Strahlen $B\pi D$, BkD, BrD, ausmachen, wovon die Spitzen π, k, r wieder beynahe in einerley Ebene liegen, die auf der Axe des Spiegels ſenkrecht iſt. Jede Spitze eines dieſer Kegel zuſammen gehender Strahlen iſt das Bild der Spitze des dazu gehörigen Kegels auseinander fahrender Strahlen, und alle Bilder zuſammen machen das Bild des Objects aus, wovon $\pi k = \pi r$ den Halbmeſſer, kr den Durchmeſſer in der Ebene PAQ genommen vorſtellet. Wenn nun $A\pi = g$, $AP = \delta$, $AC = r$, $PQ = PR = p$,

πk

$\pi k = \pi r = q$ geſetzt wird; ſo iſt $q = \frac{g \cdot p}{\delta}$, oder

$q = \frac{\frac{1}{2}r}{\delta - \frac{1}{2}r} \cdot p$ (109. §.) weil dorten $f = \frac{1}{2}r$

war, ſo wie $g = \frac{\frac{1}{2}\delta r}{\delta - \frac{1}{2}r} = \frac{\delta r}{2\delta - r}$.

201. §.

Der Glanz eines überal gleichförmig leuchtenden Körpers, der ſein Licht auf einen ſphäriſchen Hohlſpiegel, oder ein linſenförmiges Sammlungsglas wirft, iſt gegeben; nebſt den Abmeſſungen des Hohlſpiegels, oder der Linſe: man ſoll die mittlere Klarheit des Bildes, welches die vom Spiegel zurückgeworfenen, oder die in der Linſe gebrochenen Strahlen darſtellen, wenigſtens in ſolchen Fällen finden, wenn die ſcheinbare Ausdehnung des leuchtenden Objects aus der Mitte des Spiegels, oder der Mitte der Linſe geſehen, nicht beträchtlich groß iſt.

Aufl. Die Auflöſung dieſer Aufgabe in ihrer völligen Allgemeinheit erfordert, daß man diejenige Lichtmenge, welche das leuchtende Object auf die Spiegelfläche, oder die Vorderfläche des Glaſes wirft, den Gründen gemäß finden könne, welche im IV. und V. Abſchnitt umſtändlich ſind auseinander geſetzt worden. Wenn das Object nicht kreisförmig iſt, und dabey eine etwas beträchtliche ſcheinbare Gröſſe hat, ſo erfordert es gewöhnlich eine ziemlich weitläuftige Rechnung, um dieſe

Lichtmenge genau zu finden: die Aufgabe findet aber in den optiſchen Wiſſenſchaften am meiſten nur in ſolchen Fällen ihre Anwendung, wenn die ſcheinbare Gröſſe des leuchtenden Objects nicht ſehr beträchtlich iſt, mithin jeder ſcheinbare Durchmeſſer oder Halbmeſſer des Objects, wie PAQ (33. 74. Fig.) nur wenige Grade beträgt, geſetzt auch, daß für eine andre Lage der Ebene PAQ die Gröſſe dieſes ſcheinbaren Halbmeſſers nicht wie bey kreisförmig ſcheinenden Objecten einerley wäre. Wird in Fällen dieſer Art mit dem Halbmeſſer AP aus A eine Kugelfläche beſchrieben, ſo kommt das Stück dieſer Kugelfläche, was zwiſchen den ſcheinbaren Gränzen des leuchtenden Objects enthalten iſt, einer in P auf AP ſenkrechten ebenen Fläche ſehr nahe. Es ſey QPR dies Kugelſtück, ſo würde daſſelbe bey einerley Glanz eben ſoviel Licht auf den Spiegel, oder das Sammlungsglas ſenden, als die dagegen ſcheinende Fläche des leuchtenden Objects dahin ſendet. Die Oefnung des Spiegels oder des Glaſes iſt, gewöhnlich in Vergleichung mit δ ſehr klein, mithin würde das Licht, was die Fläche QPR dahin ſchickt, insgeſammt beynahe unter einem rechten Winkel aus allen Elementen dieſer Fläche QPR ausflieſſen. Wäre die Fläche des Spiegels oder des Glaſes leuchtend, und eben ſo ſtark glänzend als RPQ, ſo würde ſie nach QPR eben ſo viel Licht werfen, als ſie ſelbſt von QPR empfängt, und das Licht würde auf alle Elemente von QPR beynahe ſenkrecht fallen. Demnach kann man die ſenkrechte Erleuchtung ſuchen, welche der Kreis BD nach P ſchicken würde, und dieſe mit der Fläche QR multipliciren, ſo giebt

das wenigſtens beynahe die Lichtmenge, welche QPR auf den Spiegel oder das Glas wirſt. Dieſe Lichtmenge ſey $= M$, die Fläche des Bildes $kr = \varepsilon^2$, und die geſuchte mittlere Erleuchtung $= Y$; ſo hat man $Y = \frac{M}{\varepsilon^2}$.

Der Glanz der leuchtenden Fläche ſey $= 1$, ſo weis man, wenn das kreisförmige Object BD den Glanz $= 1$ hätte, daß es nach P die ſenkrechte Erleuchtung $\pi \sin APD^2 = \frac{\pi KD^2}{PD^2}$ ſchicken würde. Es ſey alſo $KD = b$, die Fläche $QPR = E^2$, ſo iſt die Lichtmenge, welche BD nach QR ſchicken würde, beynahe $= \frac{\pi E^2 . b^2}{\delta^2}$, und eben ſo groß kann die geſuchte Lichtmenge M angenommen werden, ſo wie die geſuchte Erleuchtung $Y = \frac{\pi E^2 . b^2}{\varepsilon^2 \delta^2}$ gefunden wird.

In dem Fall, wenn das leuchtende Object kreisförmig, und $PQ = PR = p$ deſſen Halbmeſſer, ſo wie q des Bildes Halbmeſſer iſt; hat man $\frac{E^2}{\varepsilon^2} = \frac{p^2}{q^2}$, alſo $Y = \frac{\pi p^2 b^2}{q^2 \delta^2}$. Dieſe Formul kommt mit derjenigen überein, welche im 199. §. n. 4. für den Fall des kreisförmigen Objects, wenn es vom Glaſe weit entlegen iſt, bereits iſt gefunden worden. Es iſt nemlich der Vorausſetzung gemäß auch δ in Vergleichung mit p ziemlich groß,

alſo $Y = \frac{\pi p^2 b^2}{q^2 (\delta^2 + p^2)}$, wie a. a. O. gefunden ward, beynahe $= \frac{\pi p^2 b^2}{q^2 \delta^2}$.

Will man für den Fall, wenn das Object kreisförmig iſt, ſchärfer rechnen, ſo dient jede von den Formuln, welche im 199. §. für das Sammlungsglas ſind entwickelt worden, auch für den Hohlſpiegel. Auf den Spiegel fällt die Lichtmenge M $= \frac{\pi^2 p^2 b^2}{\frac{1}{4}(BQ + DQ)^2}$, und es iſt die geſuchte mittlere Erleuchtung des Bildes $Y = \frac{\pi p^2 b^2}{\frac{1}{4} q^2 (BQ + DQ)^2}$, oder $Y = \frac{\pi \delta^2 b^2}{\frac{1}{4} g^2 (BQ + DQ)^2}$.

Will man das Bild *kr* (33. Fig.) mit einer undurchſichtigen Fläche auffangen, ſo fängt eben dieſe Fläche auch einen Theil desjenigen Lichts auf, welches QR gegen den Spiegel wirft. Es ſey dieſe Lichtmenge, welche ſolchergeſtalt aufgefangen wird, $= m$, ſo iſt nun die Erleuchtung, welche der Spiegel dem Bilde zuſchickt, $Y = \frac{M - m}{\varepsilon^2}$, und man muß m noch beſonders berechnen. Nimmt man an, daß dieſe undurchſichtige Fläche grade ſo groß ſey, als die Fläche des deutlichen Bildes; ſo hat man in dem Fall, wenn jeder Halbmeſſer p in Vergleichung mit δ ſehr klein iſt, $m = \frac{E^2}{(\delta - g^2)} \cdot \varepsilon^2$, alſo $M - m = \left(\frac{\pi b^2}{\delta^2} - \frac{\varepsilon^2}{(\delta - g)^2}\right) \cdot E^2$,

$. E^2$, und $Y = \left(\frac{\pi b^2}{\varepsilon^2 \delta^2} - \frac{1}{(\delta - g)^2}\right) E^2$.

Wenn QR kreisförmig iſt, ſo hat man ſchärfer $m = \frac{\pi^2 p^2 . q^2}{\frac{1}{4}(kQ + rQ)^2}$, und $Y = \frac{\pi p^2 b^2}{\frac{1}{4} q^2 (BQ + DQ)^2} - \frac{\pi p^2}{\frac{1}{4}(kQ + rQ)^2}$. Wie nun bey Anwendung dieſer Formuln auf das Sammlungsglas noch angenommen ward, daß alles auf das Glas fallende Licht hindurch gehe, ſo wird auch bey der Anwendung auf den Spiegel noch vorausgeſetzt, daß alles auffallende Licht zurück ſtrahle. So wenig das eine, als das andre erfolgt in der Natur würklich, deswegen muß man die auffallende Lichtmenge M, oder M − m noch in dem Verhältniß des auffallenden zum würklich zurückſtrahlenden Licht vermindern, worüber im folgenden weitere Unterſuchungen vorkommen werden. Wie übrigens aus dieſen Schlüſſen erhellet, daß einerley allgemeine Formuln dienen die Erleuchtung des Bildes zu finden, es mag das Licht im Sammlungsglaſe gebrochen, oder vom ſphäriſchen Hohlſpiegel zurück geworfen werden; ſo werde ich bey den folgenden Unterſuchungen Kürze halber vornemlich nur des Sammlungsglaſes erwehnen, mit der Vorausſetzung, daß alles auch auf den Hohlſpiegel anzuwenden ſey, was aus dem Umſtand folgt, daß ſich die Kegel der auffallenden Strahlen in ſoviele Kegel zuſammengehender Strahlen verwandeln, davon die Spitzen das deutliche Bild ausmachen. Ich erinnere alſo nur kürzlich noch dieſes, daß die im 199. §. n. 6. beygefügte Folgerung auch für das

Bild

Bild des Hohlſpiegels gelte. Wenn das leuchtende Object kreisförmig iſt, und überal einerley Glanz hat; ſo läßt ſich das kreisförmige Bild aus ſeinem Mittelpunct in concentriſche Ringe von unendlich kleiner Breite eintheilen, und jeder von dieſen Ringen für ſich iſt alsdenn gleichförmig erleuchtet. Weil man übrigens in den optiſchen und aſtronomiſchen Wiſſenſchaften die meiſte Veranlaſſung dazu hat, dieſe Lehren auf kreisförmige Objecte anzuwenden; ſo werde ich im folgenden allemahl ein kreisförmiges Object verſtehen, wofern nicht ausdrücklich das Gegentheil angezeigt wird.

202. §.

74 F. Das Geſetz zu finden, nach welchem ſich die Erleuchtung des Bildes in verſchiedenen Entfernungen vom Mittelpunct ändert.

Aufl. Wenn der unbeſtimmte Halbmeſſer $Pm = p$, der damit zuſammengehörige Halbmeſſer des Bildes $pn = q$, und die Lichtmenge, welche der zum Halbmeſſer Pm gehörige Kreis auf die Linſe wirft, $= M$ geſetzt wird, ſo hat man aus dem 199. §. n. 1.

$$M = \tfrac{1}{2}\pi^2(\delta^2+p^2+b^2-\surd((\delta^2+p^2+b^2)^2-4b^2p^2)).$$

Wird hievon das Differential ſo genommen, daß man allein p als veränderlich betrachtet, ſo giebt dM diejenige Lichtmenge, welche der Ring, deſſen Breite $m\mu$ vorſtellt, auf die Linſe wirft, und dieſe Lichtmenge iſt im Bilde über dem Ringe, deſſen Breite $n\nu$ vorſtellt, gleichförmig ausgebreitet. Die Differentialrechnung giebt

$$dM = \tfrac{1}{2}\pi^2\left(2pdp - \frac{(\delta^2+p^2+b^2)2pdp - 2b^2.2pdp}{\surd((\delta^2+p^2+b^2)^2-4b^2p^2)}\right),$$

oder

oder $dM = \pi^2 pdp\left(1 - \frac{\delta^2 + p^2 - b^2}{\sqrt{((\delta^2 + p^2 + b^2)^2 - 4b^2p^2}}\right)$. Nun ſey die Erleuchtung des Ringes deſſen Breite $n\nu$ vorſtellt, $= I$, ſo giebt jene gefundene Lichtmenge durch die Fläche dieſes Ringes $2\pi qdq$ dividirt die geſuchte Erleuchtung I. Vorläufig iſt dabey zu bemerken, daß $\frac{p}{q} = \frac{\delta}{g} = \frac{dp}{dq}$ ſey, weil $p = \frac{\delta}{g} . q$ war: demnach findet man $I =$

$$\frac{\frac{1}{2}\pi\,\delta^2}{g^2}\left(1 - \frac{\delta^2 + p^2 - b^2}{\sqrt{((\delta^2 + p^2 + b^2)^2 - 4b^2p^2)}}\right).$$

Die Gröſſe unter dem Wurzelzeichen iſt $= (\delta^2 + p^2)^2 + 2\delta^2 b^2 - 2p^2 b^2 + b^4 = (\delta^2 + p^2 - b^2)^2 + 4\delta^2 b^2$, alſo auch $I =$

$$\frac{\frac{1}{2}\pi\,\delta^2}{g^2}\left(1 - \frac{\delta^2 + p^2 - b^2}{\sqrt{((\delta^2 + p^2 - b^2)^2 + 4\delta^2 b^2)}}\right).$$

Der von 1 abgezogene Bruch wird $= 1$ wenn p unendlich groß genommen wird, in allen andern Fällen iſt er kleiner als 1; und weil man ihn auch ſo ausdrücken kann: $\frac{1}{\sqrt{(1 + 4\delta^2 b^2 : (\delta^2 + p^2 - b^2)^2)}}$, ſo erhellet, daß derſelbe beſtändig abnehme, wenn p abnimmt, mithin hat er ſeinen kleinſten Werth, wenn p verſchwindet. Daraus aber folgt, daß I wachſe, wenn p abnimmt, und umgekehrt I abnehme, wenn p wächſt. Mithin ſind die Ringe des Bildes deſto mehr erleuchtet, je kleiner die dazuge-

zugehörigen Halbmeſſer ſind, und in der Mitte des Bildes iſt die Erleuchtung am gröſten.

203. §.

Die Erleuchtung in der Mitte des Bildes ſoll künftig die centrale **Klarheit** oder **Erleuchtung** des Bildes heiſſen. Sie wird gefunden, wenn man in der gefundenen Formul $p = 0$ ſetzt, und man erhält $I = \frac{\frac{1}{2}\pi\,\delta^2}{g^2}\left(1 - \frac{\delta^2 - b^2}{\delta^2 + b^2}\right) = \frac{\pi\,\delta^2 b^2}{g^2(\delta^2 + b^2)}$. Weil nun $\frac{b}{g} = \text{tang } GpD$, und $\frac{\delta}{\sqrt{(\delta^2 + b^2)}} = \text{coſ } APD$, ſo iſt auch die centrale Klarheit des Bildes $I = \pi \,.\, \text{coſ } APD^2 \,.\, \text{tang } GpD^2$.

In dem beſondern Fall $\delta = g$, hat man $I = \frac{\pi b^2}{g^2 + b^2} = \pi \,.\, \text{ſin } GpD^2$. Wäre die Glaslinſe ein eben ſo ſtark leuchtendes Object, als PR ſelbſt, ſo würde ſie die Stelle p grade eben ſo ſtark erleuchten.

Für die ganze Kugel ADGB (51. Fig.) hat man die centrale Erleuchtung $I = \pi \text{ coſ } APD^2 \,.\, \text{tang } CpE^2$, und wenn der Kugel Halbmeſſer $= r$ geſetzt wird, ſo iſt $Cp = r + \frac{r(\delta + 4r)}{2\delta - r}$ (178. §.) Für ein ſehr weit entlegenes Object aber $Cp = \frac{3}{2}r$, da dann p der eigentliche Brennpunct iſt. Zugleich wird $I = \pi \text{ tang } CpE^2 = \frac{\pi b^2}{\frac{9}{4} r^2}$, oder

I =

$I = \frac{4}{9}\pi b^2 : r^2$. Würde das hintere Segment DGB von der Kugel abgeſchnitten, damit allein das Planconvex Glas ADKB übrig bliebe, ſo wäre die Centrale-Erleuchtung im Brennpunct I $= \pi$ tang KpD^2 und $Kp = 2r$ (179. §.) mithin I $= \frac{\pi b^2}{4r^2}$. Für ein auf beyden Seiten gleich viel erhabenes Glaß aber hätte man $Kp = r$ (178. §.) alſo $I = \frac{\pi b^2}{r^2}$. Für dieſe drey Fälle alſo verhalten ſich die Centrale Erleuchtungen im Brennpunct wie die Zahlen $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{4}$, 1, oder 16, 9, 36.

204. §.

1) Die Klarheit des Bildes an einer gegebenen Stelle, deren Abſtand vom Mittelpunct $= q$ iſt, wird gefunden, wenn man $p = \frac{\delta}{g} q$ nimmt, da dann die geſuchte Erleuchtung $I = \frac{\frac{1}{2}\pi \delta^2}{g^2}$

$$\left(1 - \frac{\delta^2 + p^2 + b^2 - 2b^2}{\sqrt{((\delta^2 + p^2 + b^2)^2 - 4b^2 p^2)}}\right)$$

gefunden wird. (202. §.) Es iſt aber

$$Bm^2 = \delta^2 + p^2 + 2bp + b^2$$
$$Dm^2 = \delta^2 + p^2 - 2bp + b^2$$

und das giebt

$$\tfrac{1}{2}(Bm^2 + Dm^2) = \delta^2 + p^2 + b^2$$
$$Bm^2 . Dm^2 = (\delta^2 + p^2 + b^2)^2 - 4b^2 p^2;$$

alſo $I = \frac{\frac{1}{2}\pi \delta^2}{g^2} . \left(1 - \frac{(Bm^2 + Dm^2) - 4b^2}{2 . Bm . Dm}\right)$.

Es

Es iſt ferner $BD = 2b = \sqrt{(Bm^2 - 2Bm . Dm \cos BmD}$ $+ Dm^2)$ alſo $\cos BmD = \frac{Bm^2 + Dm^2 - 4b^2}{2Bm . Dm}$, 453. §. Geom.) und $I = \frac{\frac{1}{2}\pi\, \delta^2}{g^2} (1 - \cos BmD) =$ $\frac{\frac{1}{2}\pi\, \delta^2}{g^2}$ ſinv . BmD, oder $I = \frac{\pi\, \delta^2}{g^2}$ $(\sin \frac{1}{2} BmD)^2$. (434. §. Geom.

2) So lange $Pm = p$ in Vergleichung mit δ ſehr klein iſt, hat man beynahe $I = \frac{\frac{1}{2}\pi\, \delta^2}{g^2}$ $\left(1 - \frac{\delta^2 + p^2 + b^2}{\delta^2 + p^2 + b^2}\right) = \frac{\frac{1}{2}\pi\, \delta^2}{g^2}$. $\frac{2b^2}{\delta^2 + b^2 + p^2}$, oder $I = \frac{\pi\, \delta^2\, b^2}{g^2\, (\delta^2 + b^2 + p^2)}$.

Es iſt aber $\frac{1}{\delta^2 + b^2 + p^2} = \frac{1}{\delta^2 + b^2} -$ $\frac{p^2}{(\delta^2 + b^2)(\delta^2 + b^2 + p^2)}$, folglich erhält man I $= \frac{\pi\, \delta^2\, b^2}{g^2\, (\delta^2 + b^2)} \left(1 - \frac{p^2}{\delta^2 + b^2 + p^2}\right)$. Der Factor vor der Parentheſe iſt die centrale Erleuchtung, und wenn b in Vergleichung mit δ ſehr klein iſt, ſo hat man beynahe $\frac{\delta^2}{\delta^2 + b^2} = \cos APD^2$ $= 1$, und $\frac{p^2}{\delta^2\, p^2 + b^2} = \frac{p^2}{\delta^2\, p^2} = \sin PAm^2$, alſo $I = \pi \tan GpD^2 (1 - \sin PAm^2)$.

3) Weil

3) Weil das Auge eine ſehr geringe Verſchiedenheit der Klarheit in verſchiedenen Stellen des Bildes nicht unterſcheidet; ſo wird das Bild überal einerley Klarheit zu haben ſcheinen, wenn der ſcheinbare Halbmeſſer PAQ des Objects ſehr klein iſt: am allerwenigſten nimmt das Auge die Verſchiedenheit der Klarheit leicht war, wenn ſelbige durch unmerkliche Stuffen in ſolchen Elementen einer Fläche, die an einander gränzen, allmählig wächſt, oder abnimmt. Deswegen könnte die Klarheit des Bildes gegen den Umfang zu wohl bis auf den 20ſten Theil abgenommen haben, ohne daß das Auge dieſen Unterſcheid der Klarheit empfände. Geſetzt alſo es hätte die Klarheit in einer gewiſſen Entfernung vom Mittelpunct ſchon um den 20ſten Theil abgenommen, ſo iſt $\sin PAm^2 = \frac{1}{20}$, $= 0,05$, alſo $\sin PAm = 0,2236$, und dazu gehört ein Winkel von $12° \; 55'$. Wenn alſo der ſcheinbare Halbmeſſer des Objects nur nicht 13 Grade übertrift, ſo wird das Auge in der Klarheit des Bildes gegen den Umfang zu keine merkliche Verſchiedenheit von der Klarheit des Mittelpuncts warnehmen.

205. §.

Die leuchtende Kugel *QWR* wirft ihr Licht auf die Glaslinſe *BD*, und die Axe der letztern iſt gegen den Mittelpunct der Kugel gerichtet: man ſucht die Erleuchtung des Bildes *qr*.

Aufl. 1) Wenn O der Kugel Mittelpunct iſt, und man ziehet DO, ſo iſt die auf das Glas fallende Lichtmenge $M = 2\pi^2 r^2 \operatorname{sinv}.AOD$ (62. §.)

KD $= b$ geſetzt, und den Halbmeſſer der Kugel OW $= r$. Ferner iſt ſinv . AOD $=$
$\frac{\sin AOD^2}{1 + \cos AOD}$, ſin AOD $= \frac{b}{\sqrt{(\delta^2 + b^2)}}$,
$\cos AOD = \frac{\delta}{\sqrt{(\delta^2 + b^2)}}$, KO $= \delta$ geſetzt, alſo

ſinv . AOD $= \frac{b^2}{\delta^2 + b^2 + \delta\sqrt{(\delta^2 + b^2)}}$. Noch ſey wie bisher der Halbmeſſer des Bildes $pq = q$, der Abſtand $Kp = g$, die mittlere Erleuchtung $= Y$, ſo hat man KQ : OQ $=$ Kp : pq, alſo $q =$
$\frac{gr}{\sqrt{(\delta^2 - r^2)}}$, und $Y =$
$\frac{2\pi b^2 (\delta^2 - r^2)}{g^2 (\delta^2 + b^2 + \delta\sqrt{(\delta^2 + b^2)})}$. Es iſt aber
$\frac{b}{g} = \tang KpD$, $\frac{\sqrt{(\delta^2 - r^2)}}{\delta} = \cos PKQ$,
$\frac{b}{\delta} = \tang KOD$: wird alſo PKQ $= \alpha$, KOD
$= \omega$ geſetzt, ſo iſt $Y = \frac{2\pi \cos\alpha^2 \operatorname{tg} . KpD^2}{\sec KOD^2 + \sec . KOD}$,
oder $Y = \frac{2\pi \cos\alpha^2 \operatorname{tg} . KpD^2}{\sec\omega (1 + \sec\omega)}$.

Iſt b in Vergleichung mit δ ſehr klein, ſo hat man $Y = \pi \cos\alpha^2 \operatorname{tg} KpD^2$, wie im 199. §., weil alsdenn $\sec\omega$ ſehr nahe $= 1$ iſt.

2) Um die centrale Erleuchtung des Bildes zu finden, erwäge man folgendes. Die Strahlen welche das Element W in der Mitte der dem Glaſe zuge-

zugekehrten Halbkugel auf das Glas ſendet, vereinigen ſich in dem mittlern Element p des Bildes. Man ſetze, jenes Element der Kugel ſey ein Kreis, deſſen Halbmeſſer $= w$, das mittlere Element des Bildes aber ein Kreis, deſſen Halbmeſſer $= u$, beyde unendlich klein angenommen; ſo iſt $\delta - r : g = w : u$, oder $\frac{w}{u} = \frac{\delta - r}{g}$. Wäre nun die Glasſcheibe BD leuchtend und eben ſo ſtark glänzend, als das Element W, ſo fiele auf W die Lichtmenge $\pi w^2 . \pi \sin KWD^2$, (50. §. n. 1.) Eben ſo groß iſt auch die Lichtmenge, welche das Element W auf das Glas wirft, (42. §.) mithin die centrale Erleuchtung des Bildes I =

$$\frac{\pi w^2 \sin KWD^2}{u^2} = \frac{\pi (\delta - r)^2 \sin KWD^2}{g^2}.$$

Noch hat man $\sin KWD = \frac{b}{\surd ((\delta - r)^2 + b^2)}$,

mithin wird $I = \frac{\pi (\delta - r)^2 b^2}{g^2 ((\delta - r)^2 + b^2)}$ gefunden.

Wie nun $\frac{b}{g} = \text{tang } KpD$, und

$\frac{\delta - r}{\surd ((\delta - r)^2 + b^2)} = \cos . KWD$ iſt, ſo hat man auch $I = \pi \cos KWD^2 \text{ tang } KpD^2$.

3) In ſolchen Fällen, wenn b in Vergleichung mit $\delta - r$ ſehr klein iſt, erhält man $I = \pi \text{ tang } KpD^2$.

3) Wird eben dieſe Vorausſetzung, daß b in Vergleichung mit δ und $\delta - r$ ſehr klein ſey, beybehalten; ſo läſt ſich auf folgende Art die Erleuchtung des Bildes in gegebener Entfernung vom

Mittelpunct finden. Es ſey Zz ein Element des gröſten Kreisbogens QWR, woraus durch Umdrehung der Figur um die Axe KO eine unendlich kleine Zone wird. Man ziehe ZKn, und ZV auf KO ſenkrecht, ſetze den Winkel WOZ = φ, WKZ = ψ, ſo iſt $pn = g$ tg . ψ und die Fläche des Kreiſes, wozu dieſer Halbmeſſer gehört, = πg^2 tg ψ^2. Ueber dieſen Kreis verbreitet ſich das Licht, ſo das Segment ZWY auf das Glas wirft, und wenn dies Segment um die Zone Zz$\text{Y}y$ wächſt, ſo wächſt jener Kreis um den Ring $n\nu$ = $2\pi g^2$ tg $\psi\, d$. tg . ψ; auf dieſen Ring alſo wirft die Zone Zz$\text{Y}y$ ihr Licht. Nun ſtelle Zz ein Element der Zone Zz$\text{Y}y$ vor, ſo iſt vermöge der Vorausſetzung beynahe für alle auf das Glas fallende Strahlen der Ausflußwinkel 90° − KZX, ſo wie der Einfallswinkel 90° − OKZ einerley, mithin die Lichtmenge, welche Zz auf das Glas ſchickt = $\frac{\text{Zz} \,.\, \pi b^2 \,.\, \text{coſ KZX coſ}\psi}{\text{KZ}^2}$. (36. §.)

Alle Elemente der Zone ſchicken gleichviel Licht auf das Glas, weil für ſie alle Ausfluß- und Einfallswinkel einerley bleiben, und die Fläche der Zone iſt $2\pi r^2\, d\varphi$ ſinφ; mithin die geſammte Lichtmenge, welche die Zone auf das Glas ſchickt,

$$= \frac{2\pi^2 r^2 b^2 \,\text{coſ}\,(\varphi + \psi)\,\text{coſ}\psi\, d\varphi\, \text{ſin}\varphi}{\text{KZ}^2},$$ und

die Erleuchtung des Ringes $n\nu$ findet man =

$$\frac{\pi r^2 b^2\, \text{coſ}\,(\varphi + \psi)\,\text{coſ}\psi\, d\varphi\, \text{ſin}\varphi}{\text{KZ}^2 \,.\, g^2 \,.\, \text{tang}\psi \,.\, d \,.\, \text{tg}\psi}.$$ Es iſt aber

tang$\psi = \frac{r\,\text{ſin}\varphi}{\delta - r\,\text{coſ}\varphi}$, alſo d . tgψ =

($\delta - r$

$$\frac{(\delta - r \operatorname{coſ}\varphi)\, r d\varphi \operatorname{coſ}\varphi - r^2 \operatorname{ſin}\varphi^2\, d\varphi}{(\delta - r \operatorname{coſ}\varphi)^2} =$$

$\frac{r d\varphi\,(\delta \operatorname{coſ}\varphi - r)}{(\delta - r \operatorname{coſ}\varphi)^2}$; ſetzt man alſo die geſuchte Erleuchtung $= y$, ſo findet man $y =$
$\frac{\pi b^2 \operatorname{coſ}(\varphi + \psi) \operatorname{coſ}\psi^2 (\delta - r \operatorname{coſ}\varphi)^2}{KZ \,.\, g^2 \,.\, (\delta \operatorname{coſ}\varphi - r)}$. Wei-
ter iſt $\operatorname{coſ}(\varphi + \psi) = \frac{\delta \operatorname{coſ}\varphi - r}{KZ}$, und $KZ \operatorname{coſ}\psi$
$= \delta - r \operatorname{coſ}\varphi$; alſo $\frac{(\delta - r \operatorname{coſ}\varphi)^2}{KZ^2} = \operatorname{coſ}\psi^2$,
und es wird $y = \frac{\pi\, b^2 \operatorname{coſ}\psi^4}{g^2}$.

Hieraus wird die centrale Erleuchtung eben ſo, wie vorhin $= \pi \operatorname{tang} KpD^2$ gefunden. Weil übrigens $\operatorname{coſ}\psi^4 = (1 - \operatorname{ſin}\psi^2)^2 = 1 - \operatorname{ſin}\psi^2 (2 - \operatorname{ſin}\psi^2)$ iſt, ſo hat man beynahe $y = \frac{\pi\, b^2}{g^2} \,.\, (1 - \operatorname{ſin}\psi^2 (2 - \operatorname{ſin}\psi^2))$. Vergleicht man dieſe Formul mit derjeninigen, welche im 161. §. n. 2. gefunden ward, ſo findet man einerley centrale Erleuchtung, wenn $\psi = 0$ geſetzt wird. Das Bild einer in W auf KO ſenkrechten leuchtenden Ebene würde im Mittelpunct p eben ſo, wie das Bild der Kugel erleuchtet ſeyn. In gleichen ſcheinbaren Entfernungen vom Mittelpunct aber iſt das Bild der Kugel ſchwächer als das Bild der Ebene erleuchtet, weil für einerley ſcheinbare Entfernung ψ von der Mitte W die Elemente der Kugel das Licht unter einem kleinen Ausflußwinkel auf das Glas

ſenden, als es von den Elementen der Ebene ausgehet. Die Abnahme der Erleuchtung gegen den Umfang des Bildes der Kugel würde noch weit gröſſer ſeyn, wenn nicht gleiche Elemente des Bildes mit deſto gröſſern Elementen der Kugel zuſammen gehörten, je gröſſer ψ wird, wogegen die Elemente der Ebene nicht ſo ſchnell wachſen.

Wenn der ſcheinbare Durchmeſſer der Kugel nur klein iſt, ſo wird wiederum die Klarheit des Bildes beynahe überal einerley ſeyn, und weil das Auge geringe Verſchiedenheiten der Klarheit nicht unterſcheidet, ſo kann man wie im vor. §. ſuchen, wie groß der ſcheinbare Halbmeſſer der Kugel ſeyn könne, wenn das Auge die Klarheit des Bildes noch für gleichförmig halten wird. Man nehme wie vorhin an, daß dieſe Klarheit bis auf den 20ſten Theil abnehmen könne, ohne daß es dem Auge bemerklich wird, und ſetze $\sin\psi^2\,(2-\sin\psi^2) = \frac{1}{20}$, alſo $\sin\psi^4 - 2\sin\psi^2 = -0{,}05$, ſo findet man $\sin\psi^2 = 1 - \sqrt{(1 - 0{,}05)} = 0{,}0253206$, und $\sin\psi = 0{,}15862$, alſo $\psi = 9^\circ\, 8'$. Wenn demnach der ſcheinbare Halbmeſſer der Kugel nicht über 9° beträgt, ſo ſcheint das Bild der Kugel noch überal einerley Klarheit zu haben.

206. §.

74 Alle von der Linſe auf das Bild fallende Kegel
33 F. zuſammen gehender Strahlen BD*p*, BD*q*, BD*r*, u. ſ. f. auch eben ſo alle von dem Hohlſpiegel BAD (33. Fig.) auf das Bild *k*π*r* fallende Kegel BD*k*, BDπ, BD*r*, haben den coniſchen Raum BHD mit einander gemein, und die Länge deſſelben KH

findet

findet man vermittelſt der Proportion (74. Fig.) $pr : KD = pH : KH$, woraus $pr + KD : KD = pH + HK : KH$, alſo $KH = \frac{KD \cdot Kp}{pr + KD}$, oder $KH = \frac{b \cdot g}{b + q}$ gefunden wird: alſo $pH = g - \frac{bg}{b+q} = \frac{gq}{b+q}$. Für den Hohlſpiegel (33 Fig.) iſt ebenfals $KH = \frac{b \cdot g}{b+q}$, und $\pi H = \frac{q \cdot g}{b+q}$. Wenn man alſo mit einer auf der Axe der Linſe ſenkrechten Ebene EF das durch die Linſe fallende Licht in einer Entfernung $KC < \frac{b}{b+q} \cdot g$ auffängt, ſo iſt der Kreis IL, als der ſolchergeſtalt zuwege gebrachte Schnitt des Kegels BHD in allen Elementen gleich ſtark erleuchtet. Die Schnitte aller nach dem Bilde zu zuſammen gehender Strahlenkegel breiten ſich in den Raum EF aus, und ſie haben den Theil IL dieſes Raums mit einander gemein; mithin iſt der Kreis IL gleichförmig, und dabey ſtärker als der übrige ihn umgebende ringförmige Raum erleuchtet, deſſen Klarheit von I nach E und von L nach F abnimmt, bey E und F aber verſchwindet: oder wie man ſich eben die Sache auch vorſtellen kann, der eben erwehnte Ring liegt im Halbſchatten, der ſich bey I und L in die Klarheit des Kreiſes IL, bey E und F aber in den vollen Schatten verliert. Wenn demnach alle Kegel in dem einzigen BpD zuſammen fielen, ſo wäre der Schnitt ST des Kegels BpD eben ſo ſtark,

als der Schnitt IL des Kegels BHD erleuchtet; und wenn man die ganze durch die Linſe fallende Lichtmenge $= M$ ſetzt, ſo wäre die Klarheit des Kreiſes ST bey der angenommenen Vorausſetzung $= \frac{M}{\pi . CS^2}$, mithin iſt die Klarheit des Kreiſes IL eben ſo groß: und wenn man die Entfernung $KC = a$ annimmt, ſo iſt $CS = \frac{(g-a)b}{g}$, und die Erleuchtung des Raums $IL = \frac{g^2 M}{\pi . (g-a)^2 b^2}$. Es war aber $M = \frac{\pi^2 p^2 b^2}{\frac{1}{4}(BQ + DQ)^2}$. (199 §. n. 3.), alſo iſt die Erleuchtung des Raums $IL = \frac{\pi p^2 g^2}{\frac{1}{4}(g-a)^2 (BQ + DQ)^2}$. Beym Hohlſpiegel finden dieſe Formuln ebenfals ihre Anwendung, ſo wie alles übrige, was ich, noch weiter aus Betrachtung der in den Puncten des deutlichen Bildes zuſammengehenden Lichtkegel herleiten werde, welches ich Weitläuftigkeit zu vermeiden hier ein für allemahl erinnere. Aus Vergleichung der 33. Fig. mit der 74ſten wird alles von ſelbſt einleuchtend, woſelbſt auch, um die Vergleichung zu erleichtern gröſtentheils, bis auf ein paar Ausnahmen, einerley Buchſtaben gebraucht ſind.

207. §.

75 F. Die 75ſte Fig. ſtellt die Ebene EF, welche das durch die Linſe fallende Licht auffängt, mit den merkwürdigſten der eben beſchriebenen Kreiſe beſonders

ſonders vor. Man vergleiche damit die 74. Figur, und ſtelle ſich zuerſt alle von jedem Punct des kreisförmigen Objects auf die Linſe fallenden Strahlenkegel BQD, BPD, BRD vor; ſo erhellet, daß die Axen KQ, KP, KR aller dieſer auffallenden Strahlenkegel in dem coniſchen Raum KRQ enthalten ſind, deſſen Grundfläche der kreisförmige Gegenſtand ſelbſt iſt, und deſſen Spitze im Mittelpunct K der Linſe liegt. In dem coniſchen Raum K*rq* hinter der Linſe, welcher dem vorigen entgegen geſetzt iſt, liegen die Axen K*r*, K*p*, K*q*, aller nach der Brechung hinter der Linſe wieder zuſammen gehender Strahlenkegel BD*p*, BD*q*, BD*r*, und das deutliche Bild *qr* iſt ein Schnitt dieſes coniſchen Raums auf ſeiner Axe K*p* ſenkrecht. Jede andre auf eben der Axe K*p* ſenkrechte Ebene EF ſchneidet den Kegel K*rq* gleichfals, der Schnitt iſt ein Kreis *πk*, und in dem Raum dieſes Kreiſes liegen die Mittelpuncte aller kreisförmigen Schnitte der nach dem deutlichen Bilde zu convergirender Strahlenkegel mit der Ebene EF. In dem Raum eines jeden dieſer kreisförmigen Schnitte EL, ST iſt das Licht verbreitet, welches auf einen einzigen Punct *r* oder *p* des deutlichen Bildes fallen würde. Aus dem Kreiſe *πk* wird das deutliche Bild *qr*, wenn die Ebene EF um den Abſtand K*p* vom Glaſe entfernt wird; wäre EF eine perſpectiviſche Tafel und K die Stelle des Auges, ſo wäre *πk* die Projection des Bildes *qr*; es ſoll alſo der Kreis *πk* das projicirte Bild heiſſen, um ihn von den übrigen Kreiſen zu unterſcheiden. In der 33. Fig. welche dies alles für den Hohlſpiegel vorſtellt, iſt das

projicirte Bild mit pq, ſo wie das deutliche Bild mit den Buchſtaben kr bezeichnet. Bey den übrigen Kreiſen findet man eben die Buchſtaben, wie in der 74. Figur. Jeder von den Kreiſen wie EL, ST, IF, in deſſen Raum das Licht zerſtreuet iſt, ſo ſich in einem einzigen Punct r, p, q, des deutlichen Bildes (oder r, π, k, in der 33. Fig.) ſammlen würde, ſoll ein Zerſtreuungskreis heiſſen, und man bemerkt dabey leicht aus Betrachtung der 74. Fig. daß nicht allein alle dieſe Zerſtreuungskreiſe gleich groß ſind, ſondern auch einer von ihnen, derjenige nemlich, deſſen Licht ſich im Mittelpunct p des deutlichen Bildes ſammlen würde, mit dem projicirten Bilde πk einerley Mittelpunct habe. Setzt man wie bisher KC $= a$, K$p = g$, KD $= b$, $pq = pr = q$; ſo iſt der Halbmeſſer Cπ des projicirten Bildes $= \frac{a \cdot q}{g}$, der Halbmeſſer CS des Zerſtreuungskreiſes

$$= \frac{(g - a) \cdot b}{g}.$$

208. §.

Dieſe Betrachtungen vorausgeſetzt zeichnet man die 75ſte Fig. leicht auf folgende Art. Aus dem Mittelpunct C verzeichnet man das projicirte Bild πk, und den damit concentriſchen Zerſtreuungskreis ST. Man nehme ferner einen Punct π im Umfang des projicirten Bildes für den Mittelpunct eines neuen Zerſtreuungskreiſes EL, ſo iſt dies einer der äuſſerſten, und CE iſt der Halbmeſſer des ganzen undeutlichen Bildes. Ein Kreis

EF

EF aus C mit dem Halbmeſſer CE beſchrieben, berührt den Zerſtreuungskreis EL von auſſen, und ein Kreis IL mit dem Halbmeſſer CL beſchrieben, berührt ihn von innen. Jeder Punct der Fläche des Kreiſes IL liegt in allen Zerſtreuungskreiſen zugleich, oder alle Zerſtreuungskreiſe haben den kreisförmigen Raum IL mit einander gemein: alſo ſiehet man, wie im vor. §. daß die Erleuchtung des Kreiſes IL eben ſo groß ſey, als ſie ſeyn würde, wenn alle Zerſtreuungskreiſe mit dem mittelſten ST zuſammen fielen; daß mithin dieſe Erleuchtung $= \frac{M}{\pi \cdot CS^2}$ ſey. Um auch den Kreis IL von den übrigen zu unterſcheiden, ſoll derſelbe das falſche Bild heiſſen.

Es ſey der Halbmeſſer des projicirten Bildes $C\pi = SI = r$, des Zerſtreuungskreiſes $CS = \varrho$, und des falſchen Bildes Halbmeſſer $CI = s$, ſo iſt $s = \varrho - r$, die Breite des ringförmigen Halbſchattens $IE = LF = 2r$, und des ganzen undeutlichen Bildes Halbmeſſer $CE = \varrho + r$. Die Erleuchtung des falſchen Bildes ſey $= Y$, ſo iſt $Y = \frac{M}{\pi \varrho^2}$. Es war aber $C\pi = r = \frac{aq}{g}$ und $CS = \varrho = \frac{(g - a) b}{g}$: alſo iſt des falſchen Bildes Halbmeſſer $s = \frac{(g - a) b - aq}{g} = b - \frac{a (b + q)}{g}$, und die Breite des Halbſchattenringes

ges $= \frac{2aq}{g}$. Die Erleuchtung $Y =$
$\frac{g^2 M}{\pi (g-a)^2 b^2}$, wie im 206. §.

209. §.

75 F. Das Geſetz zu finden, nach welchem die Erleuchtung des Halbſchattenringes in gróſſern Entfernungen vom Mittelpunct abnimmt.

Aufl. Es ſey P ein Element des Ringes, und aus P als dem Mittelpunct ſey ein Kreis beſchrieben, deſſen Halbmeſſer ſo groß als der Halbmeſſer der Zerſtreuungskreiſe iſt; ſo wird derſelbe den Umfang des projicirten Bildes in M und N ſchneiden, weil CP $< r + \varrho$ iſt. Weil nun der Abſtand eines jeden Puncts Q in der mondfórmigen Figur MNO von P kleiner als der Halbmeſſer ϱ der Zerſtreunngskreiſe iſt, ſo liegt P innerhalb der Fláche aller Zerſtreuungskreiſe, deren Mittelpuncte in der Lunula MNO liegen, und empfángt mithin Licht von allen dieſen Zerſtreuungskreiſen. Wie nun jedes Element des falſchen Bildes von allen Zerſtreuungskreiſen Licht empfángt, ſo verhált ſich die Erleuchtung des falſchen Bildes zur Erleuchtung der Stelle P des Ringes, wie die Fláche des projicirten Bildes zur Lunula MNO.

210. §.

74 F. Wenn die Entfernung KC $= a$ wáchſt, ſo nimmt $s = b - \frac{a(b+q)}{g}$ ab, und verſchwindet,

wenn

wenn $a = \frac{bg}{b+q} =$ KH iſt; (206. §.) zugleich wächſt die Erleuchtung des falſchen Bildes $\frac{M}{\pi \varrho^2} = \frac{g^2 M}{\pi (g-a)^2 b^2}$, und ſie wird $= \frac{(b+q)^2 M}{\pi b^2 q^2}$ in dem Fall $a = \frac{bg}{b+q}$, mithin gröſſer, als die Erleuchtung des deutlichen Bildes. Dieſe iſt $= \frac{M}{\pi q^2}$, und die Erleuchtung des falſchen Bildes iſt ihr gleich in dem Fall $a = \frac{g(b-q)}{b}$. Vergleicht man die 74ſte Figur hiemit, ſo fällt der Grund der erwehnten Aenderungen leicht in die Augen. Mit a wächſt $r = \frac{aq}{g}$, aber $\varrho = \frac{(g-a)b}{g}$ nimmt ab, alſo muß zuletzt $s = \varrho - r = 0$ werden, oder $\varrho = r$. Nun iſt eigentlich kein falſches Bild vorhanden, die mittelſte Stelle des undeutlichen Bildes iſt am ſtärkſten erleuchtet, und die Erleuchtung nimmt vom Mittelpunct gegen den Umfang zu ab. Die Kreiſe πk, ST, fallen in einen zuſammen, wie es die 76ſte Fig. vorſtellt, und nur die mittelſte 76 F.
Stelle C des undeutlichen Bildes liegt in allen Zerſtreuungskreiſen zugleich.

211. §.

Wächſt a noch weiter, ſo wächſt auch r, und ϱ nimmt noch ab, alſo wird $s = \varrho - r$ negativ, und wächſt mit a und r. Wenn nemlich in der 74. Figur

gur. Die Ebene EF in die Lage $\eta\vartheta$ gerückt iſt, ſo hat CI in die Lage $\alpha\gamma$ angenommen, die der vorigen entgegen geſetzt iſt. Wie es nun hier nicht ſo ſehr auf die Lage als auf die Grösſe des Halbmeſſers $\alpha\gamma = s$ ankommt; ſo kann man nun $s = r - \varrho$ annehmen, da dann $\varrho < r$ iſt, wie es die 77ſte Fig. vorſtellt. Die Breite des Halbſchat-
77 F. tenringes iſt nun $= 2\varrho$ und der Halbmeſſer des ganzen undeutlichen Bildes bleibt $= r + \varrho$. Dieſemnach hat man nun $s = \frac{a\,(b+q)}{g} - b$, und dieſer Ausdruck wächſt mit a, bis $a = g$ wird, da dann $s = q$ gefunden wird, wie der Sache gemäß iſt, weil ſich nun das falſche Bild in das deutliche Bild qr verwandelt.

Wenn man ſich innerhalb des Kreiſes IL einen Punct P wo man will als den Mittelpunct eines Zerſtreuungskreiſes VW vorſtellt, ſo erhellet, daß derſelbe von allen Zerſtreuungskreiſen, deren Mittelpuncte innerhalb der Fläche VW liegen, Licht empfängt, und daß die Erleuchtung des Puncts P ſo groß ſey, als die Erleuchtung des Kreiſes VW wäre, wenn alle diejenigen Zerſtreuungskreiſe damit zuſammen fielen, deren Mittelpuncte innerhalb VW liegen. Die Lichtmenge, welche alle dieſe Zerſtreuungskreiſe faſſen, ſey $= \mu$, die Erleuchtung des Puncts $P = Y$, ſo iſt $Y = \frac{\mu}{\pi\varrho^2}$. Aber alle Zerſtreuungskreiſe, deren Mittelpuncte in der Fläche des Kreiſes πk liegen, faſſen die Lichtmenge M. und es iſt $M : \mu =$ der Kreis

πk

πk : Kreiſe VW² $= r^2 : \varrho^2$, alſo $\mu = \frac{M \varrho^2}{r^2}$,

und das giebt $Y = \frac{M}{\pi r^2}$. Weil dieſe Schlüſſe von jedem Punct der Fläche des Kreiſes IL gelten, ſo iſt dieſer Kreis gleichförmig erleuchtet: ſeine Erleuchtung iſt die gefundene $Y = \frac{M}{\pi r^2}$, oder Y $= \frac{g^2 M}{\pi a^2 q^2}$, weil $r = \frac{a q}{g}$ war.

Eben dieſe Folge läßt ſich aus Betrachtung der 74. Fig. auch ſo herleiten. Auf jeden Punct des deutlichen Bildes qr fällt ein Strahl von jedem Punct der Linſe BD, weil jeder Punct des Bildes die Spitze eines Strahlenkegels, und ſeine Grundfläche die Linſe iſt. Man kann demnach umgekehrt ſich die Sache auch ſo vorſtellen, als fiele von jedem Punct der Linſe ein Kegel auseinander fahrender Strahlen auf das Bild qr, wie Bqr, Kqr, Dqr. Alle dieſe Kegel haben den coniſchen Raum qHr gemein, und wenn man denſelben mit einer auf der Axe Kp ſenkrechten Ebene $\eta\vartheta$ ſchneidet, ſo wird der Kreis, deſſen Durchmeſſer $\beta\gamma$ iſt, gleichförmig, und eben ſo erleuchtet, wie geſchehen würde, wenn alle Kegel mit dem mittlern qKr zuſammen fielen. In dem letztern Fall wäre die Erleuchtung $= \frac{M}{\pi . \alpha\varepsilon^2}$, und hier iſt $\alpha\varepsilon$, was bisher mit r bezeichnet iſt, ſo wie der Kreis $\beta\gamma$ das falſche Bild, und ſein Halbmeſſer $\alpha\beta = r - \varrho$ 74 F.

$r - \varrho$ iſt: mithin wird die Erleuchtung des falſchen Bildes $= \frac{M}{\pi r^2} = \frac{g^2 M}{\pi a^2 q^2}$, wie vorhin, gefunden.

In dem Fall $a = g$ findet man dieſe Erleuchtung $= \frac{M}{\pi q^2}$, wie der Sache gemäß iſt, r wird $= q$, $\varrho = \frac{(g - a) b}{g}$ verſchwindet, ſo wie auch die Breite des Halbſchattenringes 2ϱ ſchwindet: das falſche Bild verwandelt ſich nun in das deutliche Bild qr.

212. §.

Die Klarheit der Kreiſe IL, $\beta\gamma$, unterſcheidet ſich merklich von der Klarheit der ſie umgebenden Ringe, wenn man das Sonnenlicht durch die Linſe fallen läßt, und ſelbiges mit einem weiſſen Papier ſenkrecht auffängt. So wie man das Papier vom Glaſe nach und nach entfernt, zieht ſich der Kreis IL nach und nach zuſammen, und wenn man ihn in der Entfernung KH vom Glaſe in einen Punct zuſammen gehen, nachher aber bey gröſſerer Entfernung aufs neue wachſen und die Klarheit abnehmen ſiehet, ſo kann dies Licht verleiten, dafür zu halten, daß die Stelle H der Focus ſey. Will man alſo die Brennweite eines Glaſes auf dieſe Art, wenn man das Sonnenlicht durchfallen läßt, ſuchen; ſo muß man das Papier langſam noch weiter vom Glaſe entfernen, ſo lange bis der helleſte Kreis auf dem Papier nicht mehr mit Ringen von minderer Klarheit umgeben iſt,

ſon-

ſondern überal eine gleiche Klarheit hat. Weil übrigens die Ereluchtung in der Stelle H gröſſer, als die Erleuchtung des eigentlichen Focus iſt, ſo iſt kein Zweifel, daß auch nicht die Stelle H einer ſtärkern Hitze ausgeſetzt ſeyn ſollte, als die Elemente des eigentlichen Bildes, oder Focus gr.

213. §.

Wird $a > g$, ſo wird $\varrho = \frac{(g-a)\,b}{g}$ negativ, wovon ſich die Urſache wieder leicht aus Betrachtung der 74 Fig. ergiebt. Man nimmt alſo $\varrho = \frac{(a-g)\,b}{g}$ an, wenn nicht ſo ſehr die Lage, als nur die Gröſſe dieſer Linie in Betrachtung kommt, alsdenn iſt das $r + \varrho$ was bisher $r - \varrho$ war, und umgekehrt, was vorher $r + \varrho$ war, iſt nun $r - \varrho$. Bisher nemlich, ſo lange $a < g$ war, blieb das falſche Bild ein Schnitt des Kegels BHD 74 F.
oder des ihm entgegen geſetzten r H q; in Entfernungen aber, die gröſſer, als g ſind, verwandelt ſich der Schnitt des Kegels rHq in den äuſſerſten Umfang des ganzen undeutlichen Bildes. Die Linien Bq und Dr treffen verlängert die Axe Kp in einerley Punct h, und man hat $q : b = ph : \mathrm{K}h$, alſo auch $b - q : b = \mathrm{K}h - ph : \mathrm{K}h$, mithin $\mathrm{K}h = \frac{b \cdot g}{b - q}$. Alsdenn ſtellt B$h$D den Schnitt durch die Axe eines Kegels vor, deſſen mit der Grundfläche parallele Schnitte EF, $\eta\vartheta$, bisher mit dem äuſſerſten Umfang des undeutlichen Bildes einerley waren: eben dieſe Schnitte aber werwandeln ſich in

das falſche Bild, wenn $a > g$ angenommen wird. Demnach bleibt der Halbmeſſer des falſchen Bildes $s = r - \varrho$, der Halbmeſſer des ganzen undeutlichen Bildes $= r + \varrho$, und die Breite des Halbſchattenringes $= 2\varrho$, wenn man $\varrho = \frac{(a-g)\,b}{g}$ ſetzt. Die 78 Fig. ſtellet wiederum dieſen

78 F. Fall beſonders vor, EF iſt nun das falſche Bild, ſo wie IL der Umkreis des ganzen undeutlichen Bildes, ST, EL, ſind Zerſtreuungskreiſe, und πk iſt das projicirte Bild. Die Erleuchtung des falſchen Bildes bleibt wie im vor. §. $= \frac{M}{\pi r^2}$: denn auch in dieſem Fall verhält ſich noch die Summe der Zerſtreuungskreiſe, welche auf jedes Element P des falſchen Bildes Licht werfen, zur Summe aller Zerſtreuungskreiſe, wie die Fläche des Zerſtreuugskreiſes VW zur Fläche des falſchen Bildes πk. Deswegen findet der Beweis des 211 §. auch hier ſeine Anwendung. Auch ſiehet man wohl bey Betrachtung der 74 Figur, daß die Kegel rDq, rKq, rBq, nunmehro den coniſchen Raum rhq mit einander gemein haben: wenn alſo dieſelbe mit einer Ebene uv ſenkrecht geſchnitten wird, ſo muß der Schnitt $\varphi\psi$ gleichförmig, und eben ſo erleuchtet ſeyn, wie $\omega\sigma$ erleuchtet wäre, wenn alle erwehnte Lichtkegel mit dem mittlern rKq zuſammen fielen.

214. §.

Ob nun gleich $r = \frac{aq}{g}$ und $\varrho = \frac{(a-g)\,b}{g}$

beyde

beyde mit a zugleich wachſen; ſo wächſt doch alsdenn $\frac{ab}{g}$ ſchneller als $\frac{aq}{g}$, wenn wie gewöhnlich $b > q$ iſt, mithin wächſt alsdenn auch ϱ ſchneller als r und es würde $s = r - \varrho = 0$, wenn $a = \frac{bg}{b-q} = \mathrm{K}h$ iſt. (213. §.) Demnach verſchwindet das falſche Bild zum zweyten mahl, und dieſer Fall hat übrigens mit demjenigen, welchen die 76 Figur vorſtellt, alle Aehnlichkeit: man kann ſich in der 74ſten Figur vorſtellen, die Ebene uv ſey nach ab gerückt, ſo müſſen die Puncte φ, ψ, in h zuſammen gehen, oder $\varphi\psi$ muß verſchwinden.

Wächſt a noch weiter, ſo daß $a > \frac{bg}{b-q}$ wird, mithin $ab - bg > aq$, ſo iſt $\varrho > r$, und $r - \varrho$ negativ, wie denn auch leicht erhellet, daß $\delta\varphi$ in die Lage ce fällt, wenn die Ebene uv in die Lage il rückt. Man kann alſo abermahl wie anfangs $s = \varrho - r$ annehmen: des ganzen undeutlichen Bildes Halbmeſſer bleibt $r + \varrho$, alſo iſt die Breite des Halbſchattenringes wieder $= 2r$. Dieſen lezten Fall ſtellet die 79 Fig. beſonders vor, 79 F.
EF iſt das falſche Bild, ST der Zerſtreuungskreis, der nun wieder größer, als das projicirte Bild πk iſt. Nun wird alſo das falſche Bild wieder ſo erleuchtet, als der mittlere Zerſtreuungskreis ST erleuchtet würde, wenn alle übrige mit ihm zuſammen fielen: mithin iſt die Erleuchtung des falſchen Bildes $= \frac{\mathrm{M}}{\pi\varrho^2}$.

215. §.

Alle im 208 bis 214 §. betrachtete Fälle laſſen ſich nunmehro auf folgende Art kurz überſehen.

1. Fall.

Wenn $a < \frac{bg}{b+q}$ iſt, ſo hat man $\varrho = \frac{(g-a)\,b}{g}$, $r = \frac{aq}{g}$, (wie in allen übrigen Fällen) und $s = \varrho - r$; die Erleuchtung des falſchen Bildes $Y = \frac{M}{\pi\varrho^2}$, die Breite des Halbſchattenringes $l = 2r$.

2. Fall.

Iſt $a = \frac{bg}{b+q}$, ſo wird $\varrho = \frac{bq}{b+q} = r$, $s = \varrho - r = 0$, $l = 2r = 2\varrho$, $Y = \frac{M}{\pi\varrho^2} = \frac{M}{\pi r^2}$.

3. Fall.

Es ſey $a > \frac{bg}{b+q}$ und $< g$; ſo iſt $r = \frac{aq}{g}$ (wie allemahl) $\varrho = \frac{(g-a)\,b}{g}$, $r > \varrho$, $s = r - \varrho$, $l = 2\varrho$, $Y = \frac{M}{\pi r^2}$.

4. Fall.

Wird $a > g$, bleibt aber noch $< \frac{bg}{b-q}$; ſo hat man

man $\varrho = \frac{(a-g)\,b}{g}$, $s = r - \varrho$, $l = 2\varrho$, $Y = \frac{M}{\pi r^2}$

5. Fall.

Die Vorausſetzung $a = \frac{bg}{b-q}$ giebt $\varrho = \frac{qb}{b-q} = r$, $s = r - \varrho = 0$, $l = 2\varrho = 2r$, $Y = \frac{M}{\pi r^2} = \frac{M}{\pi \varrho^2}$.

6. Fall.

Wenn endlich $a > \frac{bg}{b-q}$ ſo iſt $\varrho = \frac{(a-g)\,b}{g}$, $r = \frac{aq}{g}$ und $\varrho > r$; ferner iſt $s = \varrho - r$, $l = 2r$, und $Y = \frac{M}{\pi \varrho^2}$.

216. §.

Wenn die Linſe kein Sammlungs- ſondern ein Zerſtreuungsglas iſt, ſo liegt das Bild *qr* vor dem Glaſe, und hinter demſelben liegen die zu jedem auffallenden Strahlenkegel BQD gehörigen Strahlen ſo, als kämen ſie von dem damit zuſammen gehörigen Punct *q* des Bildes her. (188 u. f. §. §.) Alle dieſe Kegel der hinter dem Glaſe auseinander fahrenden Strahlen haben den coniſchen Raum *e*BD*f* gemein, deſſen Spitze in *h* liegt: und wenn man in der Entfernung K*c* = *a* vom Glaſe das durchfallende Licht mit einer Ebene *il* ſenkrecht auf- 81 F.

fängt, ſo iſt der Kreis ef am ſtärkſten, und dabey gleichförmig erleuchtet. Fielen alle hinter dem Glaſe auseinander fahrende Lichtkegel mit dem einzigen BpD zuſammen, ſo würde der Kreis st eben ſo ſtark erleuchtet ſeyn, als ef würklich erleuchtet iſt; demnach iſt die Klarheit des Kreiſes $ef = \frac{M}{\pi . c s^2}$. Man kann alſo, wie beym Sammlungsglaſe, ef das falſche bild nennen, und st den Zerſtreuungskreis, ſo wie πk das projicirte Bild iſt, und il das ganze undeutliche Bild. Alle Formuln des 208 §. finden übrigens ihre Anwendung, wenn man die Brennweite des Glaſes, alſo auch g, und $q = \frac{\delta . PQ}{g}$ negativ annimmt. Es bleibt nemlich $r = \frac{aq}{g} = c\pi$ poſitiv, und $\varrho = \frac{(a+g)\,b}{g} = cs$ iſt ebenfalls poſitiv, (vermöge der allgemeinen Formul $\varrho = \frac{(g-a)\,b}{g} = -\frac{(a-g)\,b}{g}$ des 208 §.) auch gröſſer als $r = \frac{aq}{g}$, alſo hat man ferner $s = \varrho - r = ce = ef$, $l = 2r$, $Y = \frac{M}{\pi \varrho^2}$.

217. §.

Bey allen dieſen Schlüſſen iſt nun wie bekannt, noch angenommen worden, daß alles auf das Glas fallende

fallende Licht hindurch gehe, nichts zurückgeworfen, oder ſonſt zerſtreuet werde. Wie nun aber allemahl ein Theil der ganzen Menge des auffallenden Lichts zurück bleibt, ſo nehme man an, die ganze auffallende Lichtmenge verhalte ſich zu dem würklich hindurch gehenden Theil wie $1 : k$. Dies vorausgeſetzt, iſt der würklich durchgehende Theil $= k\,M$, wenn M die ganze auffallende Lichtmenge bezeichnet, und was zurück bleibt, iſt $= (1 - k)\,M$. Mit der Zahl k müſſen nun alle gefundene Formuln für die Erleuchtung des Bildes noch multiplicirt werden, wenn man die würkliche Erleuchtung haben will. Dieſemnach iſt die mittlere Erleuchtung des Bildes $Y = \frac{\pi \,.\, k \,.\, \delta^2 \text{ tang } KpD^2}{\frac{1}{4}(BQ + DQ)^2}$ (199 §. n. 3.), ſo wie die centrale Erleuchtung $I = k\pi \text{ coſ } APD^2 \text{ tang } KpD$. (204 §.) Für die mittlere Erleuchtung des Bildes im eigentlichen Brennpunct iſt δ in Vergleichung mit b unendlich groß, alſo $\frac{1}{2}(BQ + DQ) = \sqrt{(\delta^2 + p^2)}$, und $Y = k\pi \text{ coſ } PAQ^2 \text{ tang } KpD^2$, ſo wie $I = k\pi \text{ tang } KpD^2$

Könnte man das Glas von einer ſolchen Durchſichtigkeit wählen, daß $k = \text{coſ } KpD_2$ wäre, ſo hätte man $I = \pi \text{ ſin } KpD^2$ für die centrale Erleuchtung im eigentlichen Brennpunct der Linſe. Aus Verſuchen, die unten beſchrieben werden ſollen, wird ſich ergeben, daß es Glasarten giebt, die ſo durchſichtig ſind, daß für ſie in der gewöhnlichen geringen Dicke eines Brennglaſes ohngefehr $k = \frac{15}{16} = 0{,}9315$ wird. Wäre nun dieſe Zahl $= \text{coſ } KpD^2$, ſo müſte $\text{coſ } KpD = 0{,}9682$ ſeyn, und $KpD = 14\frac{1}{2}°$. Dies gäbe $\text{tang } KpD =$

 0,2586,

0,2586, und der Brennpunctsabſtand müſte = $\frac{10000 \cdot b}{2586} = 3,867 \cdot b$ ſeyn: für ein auf beyden Seiten gleichviel erhabenes Glas alſo $r = 3,867 \cdot b$. Die centrale Klarheit $I = \pi \sin KpD^2$ des Sonnenbildes, wenn man das Sonnenlicht mit dem Glaſe auffängt, wäre demnach eben ſo groß, als wenn das Brennglas den Glanz der Sonne ſelbſt hätte.

218. §.

74 F. Die ſenkrechte Erleuchtung, welche das Kreisförmige Object QR auf den Mitelpunct des Bildes werfen würde, wenn man die Linſe wegnähme, ſey $= i$, ſo hat man $i = \pi \sin KpQ^2$. Die mittlere Erleuchtung des Bildes für ein Object, das weit entlegen iſt, war $Y = k\pi \cos PAQ^2 \text{ tg} . KpD^2$, in eben dem Fall iſt beynahe $PAQ = KpQ$, alſo $Y = k\pi \cos KpQ^2 \text{ tg } KpD^2$, und das giebt $i : Y = \sin KpQ^2 : k \cos KpQ^2 \text{ tg } KpD^2$, oder $i : Y = \text{tg} . KpQ^2 : k \text{ tg } KpD^2$.

Dagegen iſt $i : I = \sin KpQ^2 : k \text{ tg } KpD^2$ und weil man $\frac{I}{i} = \frac{k \text{ tg } KpD^2}{\sin KpQ^2}$, mithin $k = \frac{I . \sin KpQ^2}{i . \text{tg } KpD^2}$ erhält, ſo begreiſt man, wie ſich k vermittelſt eines Verſuchs finden lieſſe. Kann man nemlich bey dem Verſuch zuwege bringen, daß $i = I$ werde, ſo hat man $k = \frac{\sin KpQ^2}{\text{tang } KpD^2}$. Weil ferner $\sin KpQ = \sin pKq$ (beym weit entfernten Ob-

Object) $= \frac{q^2}{\sqrt{(g^2 + q^2)}}$, und tang $KpD = \frac{b}{g}$, ſo erhält man $k = \frac{g^2\, q^2}{(g^2 + q^2)\, b^2}$. Es iſt aber $I = \frac{k\, \pi\, b^2}{g^2}$, für einen weit entlegenen Gegenſtand, ſo wie überhaupt $I = \frac{\pi\, \delta^2\, b^2}{(\delta^2 + b^2)\, g^2}$, demnach läßt ſich I ſoviel als nöthig iſt vermindern, damit $I = i$ werde, wenn man den Halbmeſſer b der Oefnung des Glaſes vermindert. Hat man aus ſtarken Papier oder dünner Pappe Scheiben mit dem Glaſe von einerley durchmeſſer geſchnitten, ſo kann man aus einer ſolchen Scheibe eine andre mit ihr concentriſche ausſchneiden, und mit dem übrig bleibenden Ring das Glas bedecken. Dies iſt ſoviel, als ob man den Durchmeſſer oder Halbmeſſer des Glaſes kleiner gemacht hätte, und man muß hiernächſt in den Formuln durch b den Halbmeſſer der Oefnung dieſes Ringes verſtehen.

Wenn die Linſe, womit man den Verſuch anſtellet, aus mittelmäßig durchſichtigem Glaſe verfertiget iſt, ſo findet man ohngefehr $k = \frac{5}{6}$, oder $k = \frac{6}{7}$, und die Menge des zurückgeworfenen und zerſtreueten Lichts beträgt ohngefehr $\frac{1}{6}$ oder $\frac{1}{7}$ der ganzen auf die Linſe fallenden Lichtmenge. M. ſ. Lamberts Photomet. Part. II. Cap. III. §. 517. p. 244. ſq.

219. §.

Man kann das vermittelſt einer Linſe AB ſchon 82 F.
gebrochene von dem Gegenſtande MN kommende

Licht, mit einer andern Linſe DE, deren Axe mit der vorigen zuſammen fällt, auffangen: dies wird den Erfolg haben, daß dies Licht in der zweyten Linſe von neuen eine zweymahlige Brechung leidet. Ohne nun ſchon allgemein zu unterſuchen, was dieſe Strahlenbrechung in der zweyten Linſe für einen Erfolg hat, welches am beſten der Dioptrik vorbehalten bleibt, erhellet folgendes. Die Entfernung KC beyder Linſen von einander kann gröſſer oder kleiner ſeyn, als der Abſtand K*p* des erſten Bildes *mn* vom erſten Glaſe AB; es kann aber auch KC $<$ K*p* ſeyn. Die 82 Fig. ſtellt den erſten Fall vor, und dieſer ſoll hier zuerſt erwogen werden. Es ſey alſo die Entfernung beyder Linſen von einander gröſſer, als der Abſtand des Bildes *mn* von der erſten, am nächſten beym Object befindlichen Linſe; ſo verwandeln ſich die Kegel zuſammen gehender Strahlen A*m*B, A*p*B, A*n*B, deren Spitzen das Bild ausmachen, hinter dem Bilde in entgegen geſetzte Kegel auseinander gehender Strahlen, und dieſe fallen auf die zweyte Linſe DE zwar eben ſo, als wenn das Bild *mpn* ein Object wäre, und von jedem Punct deſſelben auf DE ein Strahlenkegel fiele: doch iſt dabey dieſer Unterſchied zu bemerken. Wäre *mpn* ein Object, wie MPN, ſo fiele von jedem Punct deſſelben auf das Glas DE ein Strahlenkegel, deſſen Grundfläche mit der Fläche des Glaſes, als eine ebene Kreisfläche betrachtet, einerley wäre: denn bey dieſer Vorausſetzung, würde jeder Punct, wie *m*, *p*, *n*, nach allen Seiten Licht um ſich her verbreiten. Nun aber kann ein ſolcher Punct nicht mehr Licht nach DE ſenden, als in dem Raum eines Kegels, wie F*m*G α*p*β enthalten

halten iſt, und man bemerkt leicht, daß es auf die Gröſſe des Umfangs der Linſe DE ankommen werde, ob ſie alles Licht, das in einem ſolchen Kegel enthalten iſt, auffangen könne, oder nicht. In dem hier vorgeſtellten Fall fängt DE zwar den ganzen Lichtkegel $\alpha p \beta$ auf, nicht aber den ganzen Kegel F*m*G.

220. §.

Es ſtelle nun der Kreis ERDS den Umfang der Linſe DE (83 Fig.) beſonders vor, ſo iſt die Vorausſetzung, daß die Ebene dieſes Kreiſes auf der Axe PK ſenkrecht, mithin die Ebene dieſes Kreiſes mit der Ebene des Umfangs der Linſe AB parallel ſey. Dieſemnach ſind die Schnitte der Kegel, welche vom Bilde aus gegen DE zu auseinander gehen, mit der Ebene RDSE insgeſamt Kreiſe: doch iſt nur einer davon mit dem Umfang der Linſe DE concentriſch, und das iſt der Schnitt des Kegels $\alpha p \beta$, der dasjenige Licht enthält, was vom mittelſten Punct P des Objects auf die vordere Linſe AB fällt. Die Mittelpuncte der übrigen liegen in der graden Linie DE, worin die Ebenen MKN und RDSE einander ſchneiden. Verlängert man MK*m* bis H, ſo iſt H der Mittelpunct, HF = HG der Halbmeſſer desjenigen Kreiſes, der alles aus M kommende Licht enthielte, wenn die Linſe DE groß genug wäre, um alles aufzufangen. Iſt DE ſo groß nicht, wie die Zeichnung annimmt, ſo fällt auf die Linſe DE nur ſo viel Licht, als der Raum RDSF (83. Fig.) faſſen kann: was dagegen in den Mondförmigen Raum DRGS fallen würde, das kann die Linſe DE nicht mehr auffangen. 83 F.

Es

Es ſey eine Linſe von der andern um den Abſtand $KC = a$ entfernt, ſo findet man den Halbmeſſer $C\alpha = C\beta$ desjenigen Kreiſes, welcher alles Licht enthält, was P nach AB ſchickt, $= \frac{(a-g)b}{g}$, mithin muß der Halbmeſſer CD der Linſe DE nicht kleiner als $\frac{(a-g)b}{g}$ ſeyn, wenn die Linſe DE alles Licht auffangen ſoll, was P auf AB wirft.

221. §.

Iſt der Linſe DE Umfang ſo groß, daß ſie alles Licht auffangen kann, was durch die Linſe AB fällt, ſo erhellet, daß alles Licht, was MN nach AB ſchickt, nach der Brechung in der Linſe DE auch wieder auf das zweyte Bild $\mu\nu$ fallen müſte, wenn keine von beyden Linſen einen Theil des auf ſie fallenden Lichts zurück würfe, oder ſonſt zerſtreuete. Wird alſo dieſe Lichtmenge $= M$, der Halbmeſſer des Bildes $\mu\nu = s$ geſezt, ſo wäre die mittlere Klarheit des Bildes $\mu\nu = \frac{M}{\pi s^2}$. Damit dies erfolgen könne, muß CD nicht kleiner, als CG ſeyn. Es iſt aber $C\alpha = C\beta = \frac{(a-g)b}{g}$, und $\beta G = \alpha I = \frac{aq}{g}$, alſo $CG = C\beta + \beta G = \frac{(a-g)b + aq}{g}$, und es muß bey der angenommenen Vorausſetzung CD nicht kleiner ſeyn, als $\frac{(a-g)b + aq}{g}$.

Wo-

Wofern nun wegen der unvollkommenen Durchſichtigkeit des Glaſes die Linſe AB nur einen Theil des Lichts durchläßt, der ſich zur ganzen auffallenden Lichtmenge, wie $k : 1$ verhält, ſo fällt auf die Linſe DE nur eine Lichtmenge $= k . M$. Weil es aber mit dieſer Linſe eben die Bewandniß hat, und wegen der Zurückwerfung und Zerſtreuung des Lichts wiederum nur ein Theil durchfällt, der ſich zur ganzen auffallenden Lichtmenge, wie $\lambda : 1$ verhält, ſo iſt die auf das Bild $\mu\nu$ fallende Lichtmenge $= k\lambda M$, und die mittlere Erleuchtung deſſelben $= \frac{k\lambda M}{\pi s^2}$. Man kann nicht ſchlechthin annehmen, daß $k = \lambda$ ſeyn werde. Denn wenn gleich beyde Glasarten an ſich gleich durchſichtig wären, ſo könnte doch die eine Linſe dicker von Glas als die andre ſeyn, und es iſt leicht zu erachten, daß die dickere Linſe mehr Licht, als die dünnere zerſtreuen würde, wenn auch alles übrige gleich wäre. Gewöhnlich wird die Dicke nicht ſehr verſchieden, und beynahe $k = \lambda$ ſeyn, wenn beyde Linſen aus einerley Glasarten verfertiget ſind, da dann die mittlere Erleuchtung des Bildes unter der angenommenen Bedingung $= \frac{K^2 M}{\pi s^2}$ wäre. Falls CD $<$ $\frac{(a-g)b}{g} + \frac{aq}{g}$ iſt, ſo iſt die mittlere Erleuchtung kleiner als dieſe Formul angiebt.

222. §.

1. Die mittlere Erleuchtung verwandelt ſich in die concentrale Erleuchtung, wenn man p unendlich klein

klein annimmt: alsdenn iſt auch q unendlich klein, und es muß nicht CD kleiner als $\frac{(a-g)\,b}{g}$ ſeyn, wenn die Mitte π des Bildes $\mu\nu$ die völlige Erleuchtung empfangen ſoll. Um die centrale Erleuchtung ſelbſt zu finden, erinnere man ſich aus dem 199 §. n. 3. daß $M = \frac{\pi^2\, p^2\, b^2}{\frac{1}{4}(BQ + DQ)^2}$ gefunden worden. Ferner ſetze man $C\pi = h$, ſo iſt $\pi\mu = s = \frac{h\,.\,q}{a-g}$, und $q = \frac{gp}{\delta}$, alſo $s = \frac{g\,.\,h\,.\,p}{(a-g)\,\delta}$, und man findet die mittlere Erleuchtung $Y = \frac{\pi\,(a-g)^2\,\delta^2\,b^2}{\frac{1}{4}g^2\,h^2\,(BQ + DQ)^2}$. Noch hat man $BQ + DQ = 2\sqrt{(\delta^2 + b^2)}$ wenn p verſchwindet, mithin iſt die centrale Erleuchtung $I = \frac{\pi\,(a-g)^2\,\delta^2\,b^2}{g^2\,h^2\,(\delta^2 + b^2)}$, und dieſe Zahl muß hiernächſt wegen der unvollkommenen Durchſichtigkeit der Gläſer noch mit $k\,.\,\lambda\,.$ multiplicirt werden.

2. Wenn $CD = \frac{(a-g)\,b}{g}$, alſo $b = \frac{g\,.\,CD}{a-g}$ iſt, ſo hat man $I = \frac{\pi\,\delta^2\,.\,CD^2}{h^2\,(\delta^2 + b^2)}$. Iſt $CD < \frac{(a-g)\,b}{g}$, d. i. $CD < C\beta = C\alpha$; ſo fällt auf DE nur ſoviel von dem Licht, das P nach AB ſchickt, als auf ein Stück des Glaſes AB fallen kann, deſſen

Halb-

Halbmeſſer $= \frac{g \,.\, CD}{a-g}$ iſt: demnach iſt es auch in dieſem Fall ſoviel, als wenn $b = \frac{g \,.\, CD}{a-g}$ wäre, und alsdenn alles Licht was P auf AB wirft, hindurch gienge, und auf die Fläche des Glaſes DE fiele. Es iſt ſoviel, als wenn man dem Glaſe AB eine geringere Oefnung gäbe, deren Halbmeſſer $b = \frac{g \,.\, CD}{a-g}$ wäre. Demnach iſt auch in dieſem Fall $I = \frac{\pi \delta^2 \, CD^2}{h^2 (\delta^2 + b^2)}$, und wegen der unvollkommenen Durchſichtigkeit der Gläſer $I = \frac{k \,.\, \lambda \,.\, \pi \,.\, \delta^2 \,.\, CD^2}{h^2 (\delta^2 + b^2)}$. Setzt man nun $CD = c$, ſo kann man nach der Formul $I = \frac{k \,.\, \lambda \,.\, \pi \,.\, \delta^2 \,.\, c^2}{h^2 (\delta^2 + b^2)}$ allemahl rechnen, nur muß man vorher den Werth $\frac{(a-g)\, b}{g}$ ſuchen. Wofern derſelbe gröſſer als c iſt, ſo ſetzt man in der Formul ſtatt c die eigentliche Länge des halben Durchmeſſers der Linſe DE. Falls aber $\frac{(a-g)\, b}{g} < c$ iſt, ſo iſt die Erleuchtung nicht gröſſer als ſie ſeyn würde, wenn $\frac{(a-g)\, b}{g} = c$ wäre, alſo muß man $\frac{(a-g)\, b}{g}$ ſtatt c in der Formul gebrauchen.

223. §.

223. §.

Es ſey die Brennweite des vordern Glaſes AB $= f$, des hintern DE $= \varphi$, ſo iſt $g = \frac{\delta f}{\delta - f}$, und $h = \frac{(a-g)\varphi}{a-g-\varphi} = \frac{(a(\delta-f)-\delta f)\varphi}{(a-\varphi)(\delta-f)-\delta f}$. Ferner iſt $q = \frac{gp}{\delta} = \frac{fp}{\delta - f}$, und $s = \frac{qh}{a-g} = \frac{q\varphi}{a-g-\varphi}$, oder $s = \frac{fp\varphi}{(\delta-f)(a-\varphi)-\delta f}$. Demnach iſt die centrale Erleuchtung $I = \frac{k\lambda\pi((a-\varphi)(\delta-f)-\delta f)^2 \delta^2 c^2}{(a(\delta-f)-\delta f)^2 \varphi^2 (\delta^2+b^2)}$; und wofern $c > \frac{a(\delta-f)-\delta f}{\delta f} . b$ wäre, ſo müßte eben dieſer Werth ſtatt c gebraucht werden, da dann $I = \frac{k\lambda\pi((a-\varphi)(\delta-f)-\delta f)^2 b^2}{f^2 \varphi^2 (\delta^2+b^4)}$ gefunden wird.

Wenn das Object vom vordern Glaſe ſehr weit entfernt iſt, ſo hat man $g = f$, und es iſt p der Brennpunct des vordern Glaſes, da dann $I = \frac{k\lambda\pi(a-f-\varphi)^2 c^2}{(a-f)^2 \varphi^2}$ gefunden wird. Wofern übrigens in eben dieſem Fall $c > \frac{a-f}{f} . b$ iſt, ſo muß dieſer Werth ſtatt c gebraucht werden.

Es ſey $f = 6$ Fuß $= 72$ Zoll, $b = 1\frac{1}{2}''$, $\varphi = 1\frac{1}{2}$ Zoll, $a = 73\frac{3}{5}$ Zoll. Auf das Glas AB falle das Sonnenlicht, und die Axe beyder Gläſer ſey gegen

gegen der Sonne Mittelpunct gerichtet: ſo iſt δ ſehr groß, und die leztern Formuln finden ihre Anwendung. Demnach iſt $\frac{a-f}{f} \cdot b = \frac{8}{5 \cdot 72} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}''$, und wenn man gleich annimmt, daß c gröſſer ſey als $\frac{1}{30}''$ ſo muß dennoch dieſer Werth ſtatt c in der Formul für I gebraucht werden. Man findet aber ferner $f + \varphi = 73\frac{1}{2}''$, alſo $a - f - \varphi = \frac{1}{10}''$, und $I = \frac{k \lambda \pi (a - f - \varphi)^2 b^2}{f^2 \varphi^2} = k \lambda \pi \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{72^2}$ $= k \lambda \pi \cdot 0{,}000001929$.

Die ſenkrechte Erleuchtung der Sonne wäre $= \pi \cdot 0{,}000022$, wenn ihr ſcheinbarer Halbmeſſer $= 16'7''$ angenommen wird: (55. §.) mithin wäre die centrale Klarheit des Sonnenbildes in dem angenommenen Fall auch alsdenn ſchon eilfmahl kleiner, als die Klarheit einer Fläche, welche die Sonne unmittelbar ſenkrecht erleuchtet, wenn gleich die Gläſer alles Licht durchlieſſen, und nichts zurück geworfen oder zerſtreuet würde. Der halbe Durchmeſſer dieſes Sonnenbildes wäre $s = \frac{fhp}{(a-f)\delta}$ und $h = \frac{(a-f)\varphi}{a-f-\varphi} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{2}}{\frac{1}{10}} = 16 \times \frac{3}{2} = 24''$, alſo $s = \frac{72 \cdot 24 \cdot 5}{8}$ tg . $16'. = 5''$. Ferner wäre die centrale Klarheit des Bildes $mn = \frac{\pi b^2}{g^2}$

(162. §.) $= \pi \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{72^2} = 0{,}00043402 \cdot \pi$, die Verminderung wegen der nicht vollkommenen Durchſichtigkeit des Glaſes beyſeit geſetzt: dieſe wäre alſo 225 mahl gröſſer als die Klarheit des Bildes $\mu\nu$, oder beynahe 20 mahl gröſſer, als die ſenkrechte Erleuchtung der Sonne.

224. §.

Weil $C\pi = h = \frac{(a-g)\,\varphi}{a-g-\varphi}$ war, ſo iſt allemahl $h > \varphi$, ſo lange $a > g + \varphi$ iſt; es wird aber h kleiner, wenn a wächſt, und man würde $h = \varphi$ erhalten, wenn a unendlich groß werden könnte. Wenn umgekehrt, a abnimmt, ſo wächſt h ſo lange, bis $a = g + \varphi$ iſt, da dann h unendlich groß wird, und die Strahlen hinter dem zweyten Glaſe, die zu einerley Punct des Objects gehören, keinen Vereinigungspunct haben. Wird $a < g + \varphi$, ſo wird h negativ, und es giebt hinter dem Glaſe DE kein phyſiſches, ſondern vor demſelben ein geometriſches Bild in der Entfernung $h = -\frac{(a-g)\,\varphi}{g+\varphi-a}$. Eben dieſe negative Entfernung nimmt nun mit a ſchnell ab, und verſchwindet, wenn $a = g$ iſt. Wird $a < g$, ſo wird h wieder poſitiv, nemlich $h = \frac{(g-a)\,\varphi}{g+\varphi-a}$, und es iſt nun $h < \varphi$. Dieſe Schlüſſe führen demnach zur Betrachtung des beſondern Falles, welcher oben im 219. §. noch ausgeſezt ward.

Es

Es ſey die Linſe DE bis *de* gegen das vordere Glas gerückt, ſo iſt nun der Abſtand $a = Kc$ beyder Gläſer von einander kleiner als die Entfernung Kp des erſten Bildes vom erſten Glaſe, und aus $pC = a - g$ iſt nun pc geworden. Weil die Linie pc in Anſehung des Bildes *mn* der Linie pC entgegen geſetzt iſt, ſo muß man $g - a$ ſtatt $a - g$ in den gefundenen Formuln ſchreiben, wenn man ſie auf den jetzigen Fall anwenden will. Soll demnach die Linſe *de* alles Licht auffangen, was AB durchläßt, ſo muß ihr Halbmeſſer *cd* nicht kleiner als $\frac{(g-a)\,b}{g} + \frac{aq}{g}$ ſeyn, und falls nur verlangt wird, daß ſie alles aus dem Mittelpunct P des Objects kommende Licht auffange, ſo muß *cd* nicht kleiner ſeyn, als $\frac{(g-a)\,b}{g}$. Dies alſo vorausgeſetzt, hat man die mittlere Erleuchtung $Y = \frac{\pi\,(g-a)^2\,\delta^2\,b^2}{\frac{1}{4}\,g^2\,h^2\,(BQ + DQ)^2}$, und $h = c\pi = \frac{(g-a)\,\varphi}{g-a+\varphi}$, ſo wie $g = \frac{\delta f}{\delta - f}$. Für den Abſtand des Bildes $\mu\nu$ iſt $g - a$ das, was δ für den Abſtand des Bildes *mn* iſt; und weil p hinter dem Glaſe liegt, ſo iſt $cp = g - a$ dem Abſtand δ entgegengeſezt: alſo ſchreibt man φ ſtatt f, und $-(g-a)$ ſtatt δ. Die centrale Erleuchtung des Bildes iſt $I = \frac{\pi\delta^2 \cdot c^2}{h^2\,(\delta^2 + b^2)}$, den Halbmeſſer $cd = c$ genommen, doch muß c nicht gröſſer als $\frac{(g-a)\,b}{g}$ ſeyn,

 widri-

widrigenfals wird dieſer eben erwehnte Werth ſtatt c in die Formul geſezt. Soll demnach das Bild die völlige centrale Erleuchtung empfangen, ſo wird erfordert, daß $c \cdot g = b \cdot g - a \cdot b$, alſo $a = \frac{(a-c)\,g}{b}$ ſey, oder $a = \frac{(b-c)\,\delta f}{b(\delta - f)}$.

225. §.

Weil übrigens $q = \frac{fp}{\delta - f}$, und $s = \frac{qh}{a-g} = \frac{q\varphi}{g-a+\varphi} = \frac{f\varphi p}{\delta f-(a-\varphi)(\delta - f)}$ gefunden
84 F. wird, ſo wird nicht allein das Bild $\mu\nu$ dem Glaſe AB näher gerückt, ſondern es iſt auch der Halbmeſſer s dieſes Bildes kleiner, als der Halbmeſſer q des Bildes *mn*. Das Glas *de* heiſt alsdenn insbeſondere ein Collectivglas, weil es die Strahlen in ein engeres Bilt zuſammen bringt, das mithin ſtärker erleuchtet iſt, als das Bild *mn* erleuchtet ſeyn würde. Damit dieſer Erfolg beträchtlich ſey, muß φ nicht gröſſer als $g-a$ ſeyn, da dann wenigſtens der Halbmeſſer des Bildes bis auf die Hälfte vermindert, und die Erleuchtung viermahl gröſſer wird. Weil nicht zu zweifeln iſt, daß hiedurch auch die Hitze im Focus vermehrt wird, ſo bedient man ſich dieſes Hülfsmittels auch die Würkung des Glaſes AB zu verſtärken, wenn es als Brennglas dienen ſoll.

226. §.

In eben dieſem Fall, wenn das Glas AB als Brennglas dient, hat man $g=f$, $h = \frac{(f-a)\,\varphi}{f-a+\varphi}$,

$q =$

$q = \frac{f \cdot p}{\delta}$, $s = \frac{f \cdot \varphi \cdot p}{\delta(f - a + \varphi)}$. Ferner hat man $I = \frac{\pi c^2}{h^2}$, wenn $a = \frac{(b-c)f}{b}$ angenommen wird. Es ſey z. E. $b = 1'$, $c = \frac{1}{4}'$, $f = 8'$, $\varphi = 1'$, ſo muß $a = 6'$ ſeyn, und man erhält $I = \frac{1}{4}\pi \cdot \frac{(f - a + \varphi)^2}{(f-a)^2 \cdot \varphi^2} = \frac{9}{64}\pi$, beynahe $= \frac{1}{7}\pi$. Die centrale Klarheit des Bildes mn wäre $= \frac{\pi b^2}{f^2}$, (204. §.) $= \frac{1}{64}\pi$, alſo jene Klarheit neunmahl gröſſer, als dieſe. Der Halbmeſſer q wäre $= 5{,}3616384$ Linien, und $s = 1{,}7872126$ Linien. Vergleicht man beyde Erleuchtungen mit der ſenkrechten Erleuchtung der Sonne $= 0{,}000022 \cdot \pi$, ſo findet ſich die Erleuchtung des Bildes mn 710 mahl, und die Erleuchtung des Bildes $\mu\nu$ 6390 mahl gröſſer.

Der XVI. Abſchnitt.

Theorie der Erleuchtung, wenn das Licht vom erhabenen Kugelſpiegel zurück ſtrahlet.

227. §.

Ein Punct P in der Axe CP des erhabenen Kugelſpiegels AMB, wirft ver- 32 F.

mittelſt der Strahlenpyramide *PMNnm* eine gegebene Lichtmenge auf das Element *MNnm* der Spiegelfläche, und es iſt *MN* ein Element des Meridians *AMNB*, *Nm*, *Nn*, ſind Elemente der zur Axe *PC* gehörigen Parallelkreiſe durch *M* und *N*; das nach *MR* zurück geworfene Licht fällt bey *R* ſenkrecht auf eine Ebene, deren Entfernung *MR* von dem dahin ſcheinenden Element des Spiegels bekannt iſt: man ſucht wie groß die Erleuchtung dieſer Ebene an der Stelle *R* ſey, wo ſie das zurück geworfene Licht auffängt.

Aufl. Aus dem 107 §. weis man, daß die zurück geworfenen Strahlen zum Theil eine ſolche Lage haben, als kämen ſie aus dem Punct Q her, worin MR und NT einander ſchneiden, wenn angenommen wird, daß der auf N fallende Strahl nach NT zurück ſtrahlet. Wenn ferner der auf *m* fallende Strahl nach *m*S zurück ſtrahlet, MR, *m*S aber einander in *p* ſchneiden, ſo weis man ebenfalls aus dem angef. §. daß der übrige Theil der zurück geworfenen Strahlen ſo aus einander gehe, als kämen dieſe Strahlen von *p* her. In der Ebene M*pm* ſey RS auf *p*R ſenkrecht, in der Ebene MQN aber RT auf *p*R oder QR ſenkrecht: auch ſey N*r* auf eben dieſer Linie *p*R ſenkrecht: ſo fällt das zurückſtrahlende Licht ſenkrecht auf das Element SRTV. Nun ſey die auf das Element M*mn*N fallende Lichtmenge = M, die geſuchte Erleuchtung, oder die Dichtigkeit des auf SRTV fallenden Lichts ſey = δ; ſo hat man M = δ . RS . RT, wenn voraus geſetzt wird, daß alles aufgefangene Licht

zurück

zurück ſtrahle. Es iſt aber $\frac{RS}{Mm} = \frac{pR}{pM}$, und $\frac{RT}{Nr} = \frac{QR}{QM + Mr} = \frac{QR}{QM}$, weil Mr in Vergleichung mit QM unendlich klein iſt: alſo $RS = \frac{Mm \cdot pR}{pM}$, $RT = \frac{Nr \cdot QR}{QM}$, und die vorige Gleichung giebt $M = \frac{\delta \cdot Mm \cdot Nr \cdot pR \cdot QR}{pM \cdot QM}$, woraus $\delta = \frac{M \cdot pM \cdot QM}{Mm \cdot Nr \cdot pR \cdot QR}$ als die geſuchte Erleuchtung gefunden wird.

1) Die Dichtigkeit des unmittelbar an der Spiegelfläche ſenkrecht aufgefangenen zurück ſtrahlenden Lichts ſey $= D$, ſo wird in der gefundenen Gleichung $\delta = D$, wenn man $pR = pr = pM + Mr$, und $QR = Qr = QM + Mr$ ſetzt, da dann $D = \frac{M}{Mm \cdot Nr}$ gefunden wird, weil $\frac{pM}{pM + \cdot Nr} = 1 = \frac{QM}{QM + Nr}$ iſt. Eben ſo groß iſt auch die Dichtigkeit des unmittelbar an der Spiegelfläche ſenkrecht aufgefangenen aus P auffallenden Lichts. Wenn nemlich Ns auf PM ſenkrecht gezogen wird, ſo iſt $Ns = Nr$, weil in den rechtwinklichten Dreyecken MNr, MNs, die Winkel an M vermöge des Geſetzes der Zurückſtrahlung gleich ſind, auch in beyden die Hypothenuſe einerley iſt. Würde aber in N das aus P auffallende Licht ſenkrecht aufgefangen,

ſo würde es ſich über ein unendlich kleines Rechteck ausbreiten, deſſen Seitenlinien Nn und Ns ſind; mithin wäre die Dichtigkeit des darauf fallenden Lichts $= \frac{M}{Nn \,.\, Ns} = \frac{M}{Mm \,.\, Nr}$, weil auch $Nn = Mm$ iſt, und eben ſo groß war die Dichtigkeit des zurückſtrahlenden unmittelbar beym Spiegel ſenkrecht aufgefangenen Lichts.

2) Will man die Dichtigkeit des zurückſtrahlenden, in jeder unbeſtimmten Entfernung vom zurückwerfenden Element des Spiegels ſenkrecht aufgefangenen Lichts, durch die Dichtigkeit des auffallenden unmittelbar am Spiegel ſenkrecht aufgefangenen Lichts ausdrücken; ſo ſetze man in der vermittelſt der gegebenen Auflöſung gefundenen Gleichung $\frac{M}{Mm \,.\, Nr} = D$, und man erhält $\delta = \frac{D \,.\, pM \,.\, QM}{pR \,.\, QR}$, oder auch $\delta = \frac{D \,.\, pM \,.\, QM}{(pM + MR)\,(QM + MR)}$. Die Entfernung MR iſt gegeben, und aus dem 101. 102. 107. §. hat man pM und QM. Es iſt nemlich $pM = \sqrt{(Cp^2 + 2r \,.\, Cp \,.\, \cos\alpha + r^2)}$, wenn $ACM = \alpha$, $Cp = \frac{r \,.\, CP}{2 \,.\, CP \,.\, \cos\alpha - r}$ geſetzt wird, und $QM = \frac{PM}{PM + \frac{1}{4} MB} \,.\, \frac{1}{4} MB$: oder wenn man alles durch $CP = a$, $CM = r$, $ACM = \alpha$ ausdrücken will; ſo iſt hier a, was $\delta + r$ im 107. §. war, alſo $QM =$

$$QM = \frac{r(a\cos\alpha - r)\sqrt{(r^2 - 2ar\cos\alpha + a^2)}}{2a^2 - 3ar\cos\alpha + r^2},$$

und $pM = \frac{r\sqrt{(r^2 - 2ar \,.\, \cos\alpha + a^2)}}{2a\cos\alpha - r}$.

3) Weil die Entfernung PM veränderlich iſt, ſo iſt auch die Dichtigkeit D des aus P kommenden, und in der Entfernung PM ſenkrecht aufgefangenen Lichts veränderlich. Man ſetze, die Dichtigkeit eben dieſes von P ausgehenden Lichts ſey $= \Delta$, wenn es in der Entfernung CP $= a$ ſenkrecht aufgefangen wird; ſo iſt $\Delta : D = PM^2 : CP^2$, alſo $D = \frac{CP^2 \,.\, \Delta}{PM^2} = \frac{a^2 \,.\, \Delta}{a^2 - 2ar\cos\alpha + r^2}$: jedoch wird hiebey voraus geſetzt, daß das Licht wegen keiner andern Urſache, als wegen der geänderten Entfernung ſtärker oder ſchwächer erleuchte; wohin der Fall gehört, wenn P der Mittelpunct einer leuchtenden Kugel wäre. In Fällen dieſer Art alſo iſt $\delta = \frac{CP^2 \,.\, pM \,.\, QM \,.\, \Delta}{PM^2 \,.\, (pM + MR)(QM + MR)}$. Eben dieſe Auflöſung der Aufgabe findet Hr. Lambert Photomet. Part. III. Cap. I. §. 650. 651. pag. 303. 304. und Hr. Bouguer im Traité d'Optiqué Liv. II. Sect. I. Art. IV. pag. 107.

228. §.

Wenn P ſoweit entlegen iſt, daß alle auf den Kugelſpiegel fallende Strahlen wenigſtens ſehr nahe parallel ſind, ſo hat man $\frac{CP}{PM} = 1$, weil nun a in Vergleichung mit r als unendlich groß angenom-

men wird. Ueberdem iſt nun $pM = \frac{1}{2} r \sec\alpha$ (102. §.) und $QM = \frac{1}{2} r \cos\alpha$ (101. §.), alſo $pM . QM = \frac{1}{4} r^2$, (102. §.), und man erhält in dieſem Fall $\delta = \frac{\frac{1}{4} r^2 . \Delta}{(pM + MR)(QM + MR)}$. Man ſetze die Entfernung $MR = b$, ſo iſt $\delta = \frac{\frac{1}{4} r^2 . \Delta}{(b + \frac{1}{2} r \sec\alpha)(b + \frac{1}{2} r \cos\alpha)}$, und wenn man im Nenner würklich multiplicirt, ſo findet man $\delta = \frac{r^2 . \Delta}{4b^2 + 2br(\sec\alpha + \cos\alpha) + r^2}$.

Iſt die Entfernung $b = MR$ in Vergleichung mit dem Halbmeſſer r des Kugelſpiegels ebenfalls ſehr groß, und α ein Winkel, der dem rechten Winkel nicht ſehr nahe kommt, daß $\sec\alpha$ die Einheit ſehr vielmahl übertrift, ſo giebt dieſe Formul $\delta = \frac{\frac{1}{4} r^2 . \Delta}{b^2}$. Wofern aber bey eben der Vorausſetzung, daß b in Vergleichung mit r ſehr groß ſey, auch α dem rechten Winkel nahe, mithin $r \sec\alpha$ ſehr groß iſt, ſo hat man $\delta = \frac{r^2 . \Delta}{4b^2 + 2br \sec\alpha}$.

229. §.

85 F. Auf den erhabenen Kugelſpiegel *ABHE* fällt ein Strahlen-Cylinder in der Richtung *SC*, und die ganze auffallende Lichtmenge iſt gegeben; hinter dem Spiegel befindet ſich eine Ebene *XY* in gegebener Lage gegen die einfallenden Strahlen: dieſe Ebene *XY* iſt nach allen Seiten ins unendliche ausgedehnt,

und

und man ſoll denjenigen Theil des zurück ſtrahlenden Lichts finden, welchen die Ebene *XY* auffängt.

Aufl. Durch den Mittelpunct C des Kugelſpiegels ſey die Ebene FDG mit XY parallel gelegt, durch SC aber eine Ebene AEHB auf FDG ſenkrecht geſetzt, und CG ſey beyder Ebenen durchſchnittslinie; ſo iſt GCS ein gegebener Winkel, unter welchen die auffallenden Strahlen gegen die Ebenen FDG und XY geneigt ſind. Wie nun die Schnitte der Kugel mit den Ebenen FDG, AEHB gröſte Kreiſe der Kugel ſind, ſo iſt der Bogen GA das Maaß des Neigungswinkels GCS. Man betrachte SC als eine Verticallinie, und BDE ſey der zu dieſer Scheitellinie gehörige Horizont, der den Scheitelkreis BAEH in BE ſchneidet, ſo erhellet aus dem bekannten Geſetz der Zurückſtrahlung folgendes.

Auf M falle ein Strahl SM mit SC parallel; durch M und CS lege man eine Ebene, welche den Scheitelkreis AMH giebt; ſo liegt MS in eben dieſer Ebene, worin auch das Einfallsloth CMP liegt. Wenn alſo in dieſer Ebene PMQ = PMS genommen wird, ſo iſt MQ der zurückgeworfene Strahl. Der Scheitelkreis AMH ſchneide die gegebene Ebene FDG in CW, und der zurückgeworfene Strahl MQ ſey rückwärts nach R verlängert; ſo iſt, wegen der parallelen Lage der Strahlen MS, CS, allemahl PMS = ACM, alſo nach dem Geſetz der Zurückſtrahlung auch PMQ = CMR = ACM. So lange nun CMR $<$ MCW bleibt, ſo lange iſt MCW + CMQ $>$ 180°, und MQ ſtößt nach R verlängert mit CW zuſammen: mithin

hin kann der zurück geworfene Strahl MQ die Ebene FDG folglich auch XY nicht treffen, ſo lange CMR oder ACM $<$ MCW bleibt. Wenn CMR oder ACM $=$ MCW wird, ſo iſt MQ mit CW, alſo auch mit der Ebenen FDG und XY parallel, und MQ kann die zuletzt genannte Ebene noch nicht treffen. Wird aber CMR oder ACM $>$ MCW, ſo iſt MCW $+$ CMQ $<$ 180°, und MQ ſtößt mit CW, folglich auch mit der Ebenen FDG und XY zuſammen.

Man nehme alſo an, es ſey ACM $=$ MCW, ſo erhellet, daß alles Licht, was auf den Bogen AM fällt, ſo zurück ſtrahle, daß es die Ebene XY nicht treffen kann, dasjenige aber, was auf den Bogen MW fällt, nach der Zurückſtrahlung die Ebene XY treffen müſſe. Jener ſey auf der Kugelfläche eine Linie KMN nach dieſem Geſetz gezogen, daß ſie von allen Scheitelkreiſen die Bogen AW zwiſchen den Scheitel A, und dem gröſten Kreiſe FDG halbirt; ſo ſchließt dieſe Linie ein Stück des Kugelſpiegels ein, wovon alles Licht ſo zurück ſtrahlt, daß es die Ebene XY nicht treffen kann: dagegen wird derjenige Theil der Spiegelfläche, welcher zwiſchen der Linie KMN und dem Horizont BDE liegt, alles zurück ſtrahlende Licht auf die Ebene XY werfen.

Der Strahl SM treffe die Ebene des Horizonts BDE in L, und des Kugelſpiegels Halbmeſſer ſey $= r$, ſo iſt CL $= r$. ſin ACM, und der Winkel ECL iſt dem ſphäriſchen Winkel EAM oder GAW gleich. Wenn nun aus jedem Punct M der Linie KMN auf den Horizont eine lothrechte Linie, wie ML ſenkrecht herabgelaſſen wird; ſo liegen alle

Puncte

Puncte L in der ortographiſchen Projection OLT der Linie KMN auf den Horizont, und die Menge des Lichts, welches von dem durch die Linie KMN umgränzten Theil des Spiegels zurück ſtrahlet, verhält ſich zur ganzen auffallenden Menge, wie die Fläche der auf den Horizont projicirten Linie KMN zur Fläche des gröſten Kreiſes der Kugel.

Es ſey nun ECL $= \varphi$, ACM $= \frac{1}{2}\psi$, alſo ACW $= \psi$, GCA $= \alpha$, CL $= z$, ſo iſt $z = r \sin \frac{1}{2}\psi$. Der Winkel ECL $= \varphi$ wachſe um das Element LC$l = d\varphi$, und Lλ ſey ein mit dem Halbmeſſer CL beſchriebener unendlich kleiner Kreisbogen; ſo iſt L$\lambda = zd\varphi$, und der Inhalt des unendlich kleinen Dreyecks LC$l = \frac{1}{2}$Cl . L$\lambda = \frac{1}{2}(z + dz)\, zd\varphi$. Wird ferner die Fläche OCL $=$ Z geſetzt, ſo iſt $dZ = \frac{1}{2}$ Cl . L$\lambda = \frac{1}{2}(z+dz)\, zd\varphi$, und das lezte Verhältniß $\frac{dZ}{zd\varphi} = \frac{1}{2}z$, welches man den Gründen der Differentialrechnung gemäß auch ſo ausdruckt $dZ = \frac{1}{2}z^2 d\varphi$, mithin $dZ = \frac{1}{2}r^2 . \sin \frac{1}{2}\psi^2 . d\varphi$. Ferner iſt $\sin \frac{1}{2}\psi^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos\psi)$ (425. §. Geom.), alſo $dZ = \frac{1}{4}r^2 (1 - \cos\psi)\, d\varphi$. Das ſphäriſche Dreyeck AGW iſt bey G rechtwinklicht, und die Perpendiculärſeite AG $= \alpha$, der Winkel GAW $= \varphi$, die Hypothenuſe AW $= \psi$, alſo $\tang \psi = \frac{\tang \alpha}{\cos \varphi}$, (538 §. Geom. n. VI.) und $\sec\psi = \frac{\sqrt{(\tg\alpha^2 + \cos\varphi^2)}}{\cos\varphi}$, $\cos\psi = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{(\tg\alpha^2 + \cos\varphi^2)}}$, oder auch $\cos\psi =$

cosφ

$\frac{\cos\varphi}{\surd(\sec\alpha^2 - \sin\varphi^2)} = \frac{\cos\alpha \cos\varphi}{\surd(1 - \cos\alpha^2 \sin\varphi^2)}$. Dieſer Werth von $\cos\psi$ gebraucht, giebt $dL = \frac{1}{4} r^2$ $(d\varphi - \frac{\cos\alpha \cos\varphi\, d\varphi}{\surd(1 - \cos\alpha^2 \sin\varphi^2)}$: und wenn man $\cos\alpha$ $\sin\varphi = u$ ſetzt, alſo $\cos\alpha\, d\varphi \cos\varphi = du$; ſo erhält man $dZ = \frac{1}{4} r^2 (d\varphi - \frac{du}{\surd(1 - uu)}$. Demnach findet man durch die Integration $Z = \frac{1}{4} r^2 (\varphi - \text{A} \sin u + \text{C})$. Mit φ muß zugleich Z verſchwinden, und alsdenn iſt $u = 0$, alſo $\text{C} = 0$, und $Z = \frac{1}{4} r^2 (\varphi - \text{A} \sin u)$. Wie nun dieſer Ausdruck die Fläche des Ausſchnitts OCL giebt, ſo wird die ganze Fläche der Projection gefunden, wenn man $\varphi = 2\pi$ ſetzt, da dann abermahl $u = 0$ iſt, und man erhält $Z = \frac{1}{2} \pi r^2$.

Die Fläche des gröſten Kreiſes der Kugel iſt $= \pi r^2$, folglich iſt die Fläche der Projection der Linie KMN die Hälfte von der Fläche des gröſten Kugelkreiſes. Die ganze auf den Spiegel fallende Lichtmenge ſey $= \text{M}$, und derjenige Theil welcher von dem Kugelſtück zurück ſtrahlt, das die Linie KMN umſchließt, ſey $= m$, ſo iſt $\pi r^2 : Z = \text{M} : m$, folglich $m = \frac{1}{2}\text{M}$. Wenn demnach μ derjenige Theil des zurückſtrahlenden Lichts iſt, welcher auf die Ebene XY fällt, ſo iſt auch $\mu = \frac{1}{2}\text{M}$.

230. §.

Die Lichtmenge, welche der Spiegel auf die Ebene XY wirft, iſt bey jeder Lage dieſer Ebene gegen die Richtung des auf den Spiegel fallenden

Lichts einerley: denn die gefundene Lichtmenge $\mu = \frac{1}{2}M$ hängt von der Gröſſe des Neigungswinkels $GCA = \alpha$ gar nicht ab. Auf der andern Seite des Kugelſpiegels ſey ebenfalls eine ins unendliche ausgebreitete Ebene xy mit XY parallel gelegt, die man ſich als vollkommen durchſichtig vorſtellen kann, damit das auffallende Licht durchgehen könne; ſo fängt jede der beyden Ebenen xy und XY die Hälfte des vom Kugelſpiegel zurück geworfenen Lichts auf. Ueberdem ſey aus dem Mittelpunct C eine andre Kugelfläche beſchrieben, und ihr Halbmeſſer in Vergleichung mit dem Halbmeſſer CA des Spiegels unendlich groß: ſo wird dieſe unendlich groſſe Kugelfläche von jeder der beyden Ebene XY, xy, deren Entfernung von C endlich angenommen wird, in zwey gleich groſſe Halbkugeln getheilt. Soviel Licht als xy auffängt, eben ſoviel von dem zurück geworfenen Licht breitet ſich über die nach S zu liegenden Halbkugelfläche aus; und ſoviel Licht als XY auffängt, eben ſoviel muß ſich über die andre Halbkugelfläche ausbreiten. Demnach breitet ſich über jede der beyden Halbkugelflächen gleichviel, nemlich die Hälfte der auffallenden Lichtmenge aus. In Anſehung deſſen, daß der Halbmeſſer dieſer Kugelfläche unendlich groß angenommen wird, iſt es eben ſoviel, als wenn beyde Ebenen XY und xy mit FDG zuſammen fielen. Man kann alſo annehmen, auf jede der beyden Halbkugelflächen, worin die mit dem Spiegel concentriſche unendlich groſſe Kugelfläche von der Ebene FDG getheilt wird, verbreite ſich die Hälfte alles vom Spiegel zurück ſtrahlenden Lichts, und dies allemahl, was auch die Ebene FDG für eine Lage hat. Es ſey der Halbmeſſer

meſſer der mit dem Spiegel concentriſchen Kugelfläche $= b$, und der Vorausſetzung gemäß, b in Vergleichung mit r ſehr groß, ſo iſt für parallel auf den Spiegel fallende Strahlen die Erleuchtung eines jeden Elements dieſer Kugelfläche $= \frac{\frac{1}{4} r^2 . \Delta}{b(b + \frac{1}{2} r \sec\alpha)}$, wenn Δ die Dichtigkeit des auf den Spiegel fallenden und daſelbſt ſenkrecht aufgefangenen Lichts bezeichnet. (228. §.) So lange $ACM = \alpha$ dem rechten Winkel nicht ſehr nahe kommt, ſo lange bleibt dieſe Erleuchtung $= \frac{\frac{1}{4} r^2 . \Delta}{b^2}$ überall gleich groß, nur nimmt ſie ſehr nahe bey der Stelle ſtärker ab, die derjenigen grade gegen über liegt, wo das Licht herkommt: auch muß die eben genannte Stelle, grade hinter dem Spiegel völlig im Schatten liegen, ſo wie es die Formul $\frac{\frac{1}{4} r^2 . \Delta}{b(b + \frac{1}{2} r \sec\alpha)}$ anzeigt, die in dem Fall $\alpha = 90°$ verſchwindet. Dieſe Stelle, und die zunächſt um ihr befindlichen ausgenommen, breitet ſich alſo das vom Spiegel zurückſtrahlende Licht ſo aus, das die Erleuchtung deſto gleichförmiger wird, je gröſſer die Entfernung vom Spiegel iſt: und in ſehr groſſer Entfernung richtet ſich die Erleuchtung nach eben den Geſetzen, als wenn das zurückſtrahlende Licht von einem leuchtenden Punct ausginge.

231. §.

86 F. Wenn der Halbmeſſer CR, der aus dem Mittelpunct C des Spiegels beſchriebenen Kugelfläche gegen den Halbmeſſer CA des Spiegels ein endliches

ches Verhältniß hat, ſo ſind die Stücke dieſer Kugelfläche, welche gleich viel von dem zurückſtrahlenden Licht auffangen, nicht gleich groß. Die Figur ſey wie vorhin gezeichnet, ſo liegt unter den mit der Ebene des gröſten Kreiſes FDG parallel zurück geworfenen Lichtſtrahlen der Strahl Kk der Ebene FDG am nächſten, und Nn iſt von dieſer Ebene am weiteſten entfernt. Es iſt nemlich ACF $= 180° - \alpha$, wenn man GCA $= \alpha$ ſetzt, alſo GCK $= \frac{1}{2}\alpha$, und FCN $= 90° - \frac{1}{2}\alpha$, allemahl $> 45°$, wenn wie hier angenommen wird $\alpha < 90°$, und $\frac{1}{2}\alpha < 45°$ iſt. Man hat alsdenn PK $= r$ ſin $\frac{1}{2}\alpha$, QN $= r$ coſ $\frac{1}{2}\alpha$, alſo QN $>$ PK. Die nach der Seite, wo das Licht herkommt, zurückſtrahlende Hälfte des auffallenden Lichts trift alſo ein Stück der Kugelfläche, nRk, das kleiner, als die Halbkugel iſt, und eben dies Kugelſtück iſt kleiner als ein Segment, deſſen Höhe $= b - r$ ſin $\frac{1}{2}\alpha$ wäre, aber gröſſer, als ein Segment in der Höhe $= b - r$ coſ $\frac{1}{2}\alpha$. Die andre Hälfte des zurückſtrahlenden Lichts breitet ſich über ein Stück der Kugelfläche nfHgk aus, das gröſſer, als die Halbkugel iſt; das grade zurückſtrahlende Licht verurſacht bey R die ſtärkſte Erleuchtung, gegen n, f, I; und gegen k, g, i, zu nimmt die Erleuchtung immer mehr ab, bis ſie bey I, und i verſchwindet, ſo wie das Segment I, H, i, im Schatten liegt.

Der XVII. Abſchnitt.

Vom
Bau des Auges und dem ſcheinbaren Glanz leuchtender Gegenſtände.

232. §.

Weil unſer Urtheil von der ſcheinbaren Geſtalt, Gröſſe und Klarheit ſichtbarer Gegenſtände, von ihrer Lage und Bewegung gegen einander, von der Empfindung abhängt, die vermittelſt des Lichts, wenn es unſer Auge rührt, zuwege gebracht wird; ſo muß man den Bau des Auges einigermaſſen kennen, wenn man wiſſen will, wie es etwa mit
87F. dem Sehen zugehen mag. Die Geſtalt des ganzen Augapfels OH*p*I kommt der Kugelgeſtalt ſehr nahe, und dieſe Geſtalt war deswegen nöthig, weil das Auge beweglich ſeyn, und ſich in der Höhlung, darin es liegt, nach allen Seiten drehen laſſen ſollte. Dieſer Augapfel ſelbſt iſt mit dreyen Häuten umgeben, die gleichſam ſein Gehäuſe ausmachen. Die äuſſerſte dieſer Häute umgiebt den ganzen Augapfel, ſie iſt hart und elaſtiſch, und heiſt die harte Haut (ſclerotica); je näher ſie dem Vordertheil des Auges kommt, deſto dünner und beugſamer wird ſie, und ihr vorderer Theil HOI iſt durchſichtig, der auch deswegen die Hornhaut heiſt. (cornea) Eben dieſe Hornhaut iſt ein Segment einer Kugel, deren Halbmeſſer etwas kleiner iſt, als der zum übrigen Theil des Augapfels H*p*I gehörige Halbmeſſer: deswegen iſt ſie etwas mehr erhaben als das Auge an dieſer Stelle ſeyn würde,

wenn es nur eine einzige völlige Kugel wäre. Beyde Kugelſtücke haben indeſſen eine gemeinſchaftliche Axe Op, die zugleich die Axe des ganzen Auges abgiebt. Hinten am Augapfel nahe bey der Stelle p, wo die Axe des Auges die harte Haut trift, iſt in derſelben eine kleine Oefnung bey MN, und daſelbſt hängt die Geſichtsnerve mit den beyden innern Häuten des Auges zuſammen.

233. §.

Von dieſen innern Häuten, die ſehr weich und zart ſind, heiſt diejenige, welche zunächſt an der harten Haut anliegt, die **Aderhaut:** (choroides) einige nennen ſie die garnförmige oder färbige Haut. Sie ſchließt allenthalben an der innern Fläche der Hornhaut an, ſo lange dieſe den Nahmen führt, bis gegen H und I zu: wo dieſe anfängt die Hornhaut zu heiſſen, daſelbſt verläßt jene den Umfang des Augapfels, wendet ſich gegen B und D zu nach dem innern des Auges, und wird daſelbſt zu einer ringförmigen Einfaſſung einer linſenförmigen durchſichtigen Maſſe BADG, die von ihrer Durchſichtigkeit den Nahmen der **Kryſtallenlinſe** erhalten hat. Dieſe Linſe führt ihren Nahmen nicht etwa, weil ſie auch die Härte des Kryſtalles hätte, ihre Maſſe iſt mehr weich als hart, etwa wie ein ſtarker Gallert, oder das Weiſſe eines hart geſottenen Eyes: ſie bricht das Licht etwas ſtärker als Glaß, und hat übrigens wegen ihrer Geſtalt in Abſicht auf die Strahlenbrechung eben die Würkung, wie eine Glaslinſe. Ihre Lage im Auge iſt ſo, daß ihre Axe mit der Axe des Auges ſelbſt zuſammen fällt, und ihr Nutzen im Auge wird im folgenden weiter

beſchrieben. Hier iſt nur noch zu bemerken, daß die ringförmige Einfaſſung der Linſe TBDW, auch das corpus ciliare, orbiculus ciliaris, ligamentum ciliare, heiſſe: auch hängt dies ligamentum ciliare mit einer aus der zärteſten ungemein durchſichtigen Haut beſtehenden Capſel zuſammen, worin die Linſe liegt. Die Haut ſelbſt heiſt aranea, weil ſie ſo fein iſt, wie ein Spinnengewebe. In dieſer Haut liegt nach des Hn. Petit Meinung die Linſe ganz frey, ohne daß ſie mit ihr, vermittelſt zarter Gefäßchen zuſammen gewachſen wäre; wiewohl Hr. Albin das Gegentheil gefunden hat.

Die innerſte Haut des Auges, welche wiederum an die innere Fläche der Aderhaut allenthalben anſchließt, heiſt die **Netzhaut** retina. Auch dieſe Haut iſt ſehr zart, ſie fängt bey dem Geſichtsnerven an, und iſt vielleicht ein Theil dieſer Geſichtsnerven ſelbſt, der bey M anfängt, ſich nach allen Seiten an der innern Fläche des Auges unter dem Nahmen der Netzhaut auszubreiten: dieſes Häutchen endiget ſich da, wo die Kryſtallenlinſe in ihrer Einfaſſung hängt.

234. §.

Der innere Raum des Augapfels iſt mit zweyerley Art Feuchtigkeiten, oder wenn man will, mit dreyerley Arten angefüllt, wofern anders die Maſſe der Linſe eine Feuchtigkeit heiſſen kann. Eigentlich wird der innere Raum des Augapfels durch die Linſe mit ihrer ringförmigen Einfaſſung in zwey Stücke von ungleicher Gröſſe abgetheilt, wovon das kleinere vor der Linſe zwiſchen ihr und der Hornhaut,

haut, das gröſſere aber zwiſchen der Linſe mit ihrer Einfaſſung und der harten Haut eingeſchloſſen iſt. Der kleinere Raum DHOIB, zwiſchen der Linſe und Hornhaut, iſt mit der ſo genannten wäſſerigen Feuchtigkeit angefüllet, die deswegen ſo heiſt, weil ſie das Licht eben ſo wie gemeines Waſſer bricht. Uebrigens iſt dieſe Feuchtigkeit ſehr durchſichtig, von Geſchmack ein wenig ſalzig, und hat keinen Geruch. Der Raum hinter der Linſe, WDGBTqM, iſt gleichfalls mit einer ſehr durchſichtigen Feuchtigkeit angefüllt, die in einem eigenen Häutchen eingeſchloſſen und mit ſehr vielen zarten Gefäßchen durchwebt iſt, die ſie einem Gallert ähnlich machen. Sie heiſt die glasartige Feuchtigkeit: wiewohl die flüßige Maſſe ſelbſt, welche die zarten Gefäßchen anfüllet, der wäſſerigen Feuchtigkeit in allem ähnlich, auch mit ihr faſt von einerley Dichtigkeit iſt, und die Lichtſtrahlen eben ſo, wie gemeines Waſſer bricht.

Der Raum vor der Linſe, welchen die wäſſerige Feuchtigkeit ausfüllt, wird durch ein beſonderes Häutchen HLKI in zwey ſo genannte Kammern getheilt. Dies Häutchen iſt zwiſchen der Hornhaut und harten Haut beynahe völlig wie eine ebene Fläche ausgeſpannt, als wenn es die gemeinſchaftliche Grundfläche der beyden Kugelſegmente wäre, welche die Hornhaut und die harte Haut jede für ſich bilden: es heiſt die Traubenhaut, oder der Regenbogen. (uvea, iris) Nach einiger Zergliederer Beſchreibung iſt der Regenbogen gegen die Hornhaut zu ein wenig erhaben gebogen, und kehrt die hohle Seite der Linſe zu. Wie nun derſelbe für ſich nicht durchſichtig iſt, ſo hat derſelbe faſt

in der Mitte eine Kreisrunde Oeſnung, die der Stern im Auge heiſt, durch welche das Licht, was durch die Hornhaut in die wäſſerige Feuchtigkeit gedrungen iſt, bis zur Kryſtallinſe hindurch gehen kann. Eben dieſer Regenbogen iſt mit der merkwürdigen Eigenſchaft verſehen, daß der Stern in der Mitte deſſelben, wenn ſehr ſtarkes Licht ins Auge fällt, enger, und hingegen bey ſchwachen einfallendem Lichte weiter und gröſſer wird, ohne ſeine kreisförmige Geſtalt zu ändern. Wegen der Durchſichtigkeit der Hornhaut, und der darunter befindlichen wäſſerigen Feuchtigkeit, iſt der Regenbogen von auſſen ſichtbar, und giebt wegen ſeiner mannigfaltigen Farben dem Auge ſeine äuſſere Schönheit.

235. §.

Es ſey nun P ein Punct in der Axe des Auges, wovon ein Strahlenkegel auf die Hornhaut fällt: ſo wird der mittlere Strahl PO, der mit der Augenaxe zuſammen fällt, ungebrochen durchgehen, weil auch der Mittelpunct F der kugelförmigen Hornhaut in der Augenaxe liegt. Die beyden Flächen BAD, BGD der Kryſtallinſe werden gewöhnlich auch Kugelförmig angenommen, wiewohl einige Zergliederer beſonders die hintere Fläche BGD paraboliſch, andre hyperboliſch wollen gefunden haben. Sind beyde Flächen würklich ſphäriſch, ſo liegen die dazu gehörigen Mittelpuncte C und E ebenfalls in der Augenaxe, in allen Fällen aber geht der mittlere Strahl PO auch durch die Linſe ungebrochen durch, und triſt die Netzhaut hinten in *p*. Ein andrer von P ausgehender Strahl

falle

falle in α auf die Hornhaut, ſo leidet er daſelbſt die erſte Brechung aus der Lage $\alpha\beta$ in die Lage $\alpha\gamma$ gegen das Einfallsloth $F\alpha$, und geht in eben der Richtung durch die wäſſerige Feuchtigkeit bis zur Kryſtallinſe in γ fort, wofern, wie gewöhnlich angenommen wird, die Hornhaut mit der wäſſerigen Feuchtigkeit das Licht auf gleiche Art bricht. Weil aber die Maſſe der Linſe dichter iſt, als die wäſſerige Feuchtigkeit, ſo leidet der Strahl in γ die zweyte Brechung aus der Lage $\gamma\delta$ in die Lage $\gamma\varepsilon$ gegen das Einfallsloth $C\gamma$. Wenn ferner der zum zweytenmahl gebrochene Strahl die hintere Fläche der Linſe in ε trift, woſelbſt $E\varepsilon\zeta$ das Neigungsloth iſt, ſo leidet der Strahl beym Uebergang in die glasartige Feuchtigkeit die dritte Brechung aus der Lage $\varepsilon\eta$ in die Lage εp und zwar ſo, daß der gebrochene Winkel $\zeta\varepsilon p$ gröſſer als der Neigungswinkel $\zeta\varepsilon\eta$ iſt, weil die glasartige Feuchtigkeit wieder dünner als die Maſſe der Kryſtallinſe iſt. Befindet ſich nun P in einer ſolchen Entfernung vom Auge, in der das Auge einen Gegenſtand vollkommen deutlich ſiehet; ſo vereinigen ſich alle Strahlen, die aus P auf die Hornhaut fallen, nach der dritten Brechung in einerley Punct p hinten im Auge auf der Nezhaut, und machen daſelbſt ein Bild von P.

Einen ähnlichen Erfolg hat die Brechung des Lichts im Auge, wenn es von einem Punct Q kommt, der auſſerhalb der Augenaxe liegt. Alle Strahlen, die zum Kegel gehören, den Q auf die Hornhaut wirft, leiden eine dreymahlige Brechung, an der auſſern Fläche der Hornhaut, der vordern und hintern Fläche der Linſe, der Strahl Qa wird in a, m, n, ſo wie QO in O, e, h, gebrochen, und

 beyde

beyde vereinigen ſich nach der dritten Brechung in dem Bilde *q* hinten auf der Nezhaut. So entſteht eine Reihe von Bildern zwiſchen *p* und *q*, die den Puncten des Gegenſtandes zugehören, welche zwiſchen P und Q liegen, und *pq* wird ein Bild von PQ. Das Bild hat übrigens in Anſehung des Gegenſtandes die umgekehrte Lage, ſo daß ſich die obere und untere Stelle, die rechte und linke Seite mit einander verwechſeln.

Dieſe Schlüſſe werden durch die Erfahrung beſtättiget, wenn der Zergliederer am hintern Theil eines Auges die harte Haut geſchickt ablöſet, ſo daß man hineinſehen kann: es zeigt ſich alsdenn ein Bild auf die beſchriebene Art am Boden des Auges von jedem Gegenſtande, gegen den man die vordere Seite des Auges ſtellt.

236. §.

In dem Augenblick, da ſich ein ſolches Bild in unſerm Auge abmahlet, iſt dieſer Erfolg mit der Empfindung des Sehens begleitet. Wir ſehen nun den Gegenſtand, deſſen Bild das Licht ins Auge auf die Nezhaut bringt: übrigens aber reichen unſre Begriffe, die wir von unſern eigenen Empfingungen haben, und von der Art, wie die Veränderungen, die in unſerm Körper vorgehen, mit den Vorſtellungen zuſammen hängen, welche alsdenn zugleich die Seele hat, ſoweit nicht, daß wir verſtändlich erklären könnten, wie es nun weiter mit dem Sehen zugehe. Die zarten Nervenfaſern der Nezhaut pflanzen ohne Zweifel den Eindruck, welchen das Licht auf der Nezhaut macht,

vermittelſt des Geſichtsnervens, der mit dem Gehirn zuſammen hängt, auch bis zum Gehirn fort. Wie aber nun weiter die Seele ihre Vorſtellung erhält, muß man unentſchieden laſſen. Können wir jenen Zuſammenhang deſſen, was in unſern Sinngliedern vorgehet, mit den Vorſtellungen in unſrer Seele aber nicht erklären, ſo hat es auch mit der anſcheinenden Schwürigkeit gar nichts auf ſich, wenn man frägt: wie es zugehe, daß wir die Sachen aufgerichtet ſehen, deren Bild in umgekehrter Stellung auf die Nezhaut fällt? Eben ſo wenig Grund hat die anſcheinende Schwürigkeit, daß wir jede Sache mit zweyen Augen nur einfach ſehen. Wenn der Blindgebohrne, deſſen Geſchichte im 40 §. der Optik kurz erzählt iſt, nachdem er vom Staar war befreyet worden, von keiner Sache die Geſtalt gekannt, und keine Sache von der andern bey noch ſo verſchiedener Geſtalt und Gröſſe unterſchieden hat; ſo hat er anfangs auch nicht gewußt, was oben oder unten, zur Rechten oder Linken befindlich ſey, bis er durch öftere Verbindung der Empfindungen des Gefühls mit den Empfindungen des Geſichts ſich dazu gewöhnet, Geſtalt, Gröſſe und Lage der Dinge gegen einander zu unterſcheiden. Hiebey war es wohl ſehr gleichgültig, ob das Bild in ſeinem Auge aufrecht oder verkehrt ſtand, ob er mit einem oder mit beyden, oder noch mehreren Augen ſahe. Seine Seele erhielte Vorſtellungen, die er gar nicht kannte, er muſte ſie zuförderſt oft mit andern ihm ſchon bekannten Vorſtellungen zugleich haben, bevor er lernte, was es mit dieſen neuen ihm bisher unbekannt gebliebenen Vorſtellungen für eine Bewandniß habe. Wenn

es gleich wahr iſt, daß der Eindruck, welchen das Licht von einerley Sache auf der Nezhaut eines jeden Auges macht, für ſich ſchon eine Empfindung von der Sache zuwege bringt, ſo ſind doch beyde Empfindungen einander vollkommen ähnlich, und wir haben von Jugend auf beſtändig beyde Empfindungen zugleich gehabt, wenn uns zugleich das Gefühl davon belehrt hat, daß es nur eine Sache ſey, welche beyde einander ganz ähnliche Empfindungen veranlaßt. Mit zweyen Ohren hören wir einen und denſelben Schall einfach und nicht zwiefach, ich finde auch nicht, daß man dies als etwas ſchwer zuerklärendes angeſehen hätte: warum ſollten wir nicht eben ſo gut mit zweyen Augen einerley Gegenſtand einfach ſehen.

237. §.

Daß die Abmeſſungen des menſchlichen Auges nicht bey allen erwachſenen Perſonen einerley ſeyn werden, läßt ſich ſchon daher vermuthen, weil überall eine ſehr groſſe Verſchiedenheit in der Gröſſe der Gliedmaſſen des menſchlichen Körpers bemerkt wird: indeſſen wird es nicht undienlich ſeyn, folgende Abmeſſungen zu bemerken, die Herr Petit in der Hiſtoire de l'Academie de Paris A. 1725 in Pariſer Linien mittheilt.

Des Augapfels Durchmeſſer RS iſt 10 bis $11\frac{1}{2}$ Linien lang, am gewöhnlichſten $10\frac{1}{2}$ bis $10\frac{3}{4}$ Lin. Die Hornhaut HOI iſt ein Kugelſtück, wovon der Durchmeſſer FO gewöhnlich $7\frac{1}{2}$ Linien, zuweilen 7, auch wohl 8 Linien beträgt, der Durchmeſſer HI der Grundfläche dieſes Kugelſtücks, der zugleich den Durchmeſſer der Traubenhaut oder des

Regen-

Regenbogens abgiebt, iſt $4\frac{2}{3}$, 5, bis $5\frac{1}{2}$ Linien, die Höhe eben dieſes Kugelſegments $\frac{3}{4}$, 1 bis $1\frac{1}{4}$ Lin. Dieſemnach iſt die Axe O*p* des Auges um $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{2}$ Linie länger, als der Durchmeſſer RS. Eben dies Kugelſtück macht die vordere Kammer für die wäſſerige Feuchtigkeit aus. Die Dicke der hintern Kammer vom Umfang des Sterns KL bis an die Linſe in A, fällt zwiſchen $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{2}$ Linie, und iſt am gewöhnlichſten $\frac{1}{4}$ Linie, gegen B und D zu wird die Dicke dieſer Kammer wegen der Krümmung der Kryſtallinſe noch mahl ſo groß. Insgemein beträgt der Abſtand AO der Hornhaut von der Kryſtallinſe nicht über $1\frac{1}{8}$ Lin. Der Stern KL hat, wie ſchon bekannt iſt, eine veränderliche Oefnung zwiſchen 1 und 3 Linien im Durchmeſſer.

Der Kryſtallinſe Umfang hat $3\frac{1}{2}$ bis $4\frac{1}{2}$ Linien im Durchmeſſer BD, am gewöhnlichſten 4 Linien, ihre Dicke AG beträgt $1\frac{3}{4}$ bis $2\frac{1}{2}$ gewöhnlich 2 Linien. Ihre Vorderfläche BAD iſt nicht ſoviel erhaben, als die hintere BGD. Der Vorderfläche Durchmeſſer 2CA beträgt nach H. Petit am a. O. 1 Zoll bis $1\frac{1}{2}$ Zoll. In einer andern Abhandlung eben der Hiſtoire de l'Acad. de Paris A. 1730 giebt er dieſen Durchmeſſer zu 6, $6\frac{1}{2}$ bis 9 Linien an, zuweilen 12 Linien. Bey alten Perſonen hat er die Vorderfläche oft ſo wenig erhaben gefunden, daß ſie ihm ein Kugelſtück zu ſeyn geſchienen, wozu ein Durchmeſſer von 25 bis 30 Linien gehöre. Dem Durchmeſſer 2EG der hintern Fläche giebt er an beyden Orten 5 Linien $5\frac{1}{2}$ bis 6 Linien Länge. Nach einem Mittel aus 26 zergliederten Augen genommen, wovon die Nachricht am zulezt angeführten Ort vorkommt, findet ſich der Durchmeſſer, der

Krüm-

Krümmung der Vorderfläche des Kryſtalles $7\frac{9}{20}$ Linien, der Durchmeſſer der Krümmung ihrer hintern Fläche $5\frac{2}{3}$ Linien, ihre Dicke AG $2\frac{1}{12}$ Lin.

Wofern die wäſſerige Feuchtigkeit die Lichtſtrahlen wie gemeines Waſſer bricht, ſo iſt das Verhältniß der Refraction, wenn das Licht aus der Luft in die wäſſerige Feuchtigkeit fällt, = 4 : 3. Bräche die Linſe das Licht eben ſo ſtark als Glas, ſo wäre das Verhältniß der Refraction beym Uebergang des Lichts aus der wäſſerigen Feuchtigkeit in der Kryſtallinſe, wie 9 : 8; (93 §.) es iſt aber die Brechung nicht völlig ſo ſtark. Am Ende der deutſchen Ausgabe von Smiths Optik hat H. Kaeſtner einen Auszug aus Jurins Abhandlung vom deutlichen und undeutlichen Sehen mitgetheilt. In dieſer Abhandlung nimmt Jurin das Verhältniß der Refraction beym Uebergang des Lichts aus der wäſſerigen Feuchtigkeit in die Kryſtallinſe = 13 : 12 an, und beym Uebergange aus der Kryſtallinſe in die glasartige Feuchtigkeit = 12 : 13. Eine ziemlich umſtändliche Beſchreibung des Auges und des durchgangs der Lichtſtrahlen durch die Augenfeuchtigkeiten findet man in **Muſſchenbroecks** Introd. ad Philoſ. Natural. Tom. II. Cap. 35. 36.

238. §.

Der ſcheinbare Halbmeſſer *POQ* eines ſichtbaren Objects iſt gegeben, und dieſer Winkel iſt ſo klein, daß die Winkel, welche ihn nicht übertreffen, ſich wie ihre Sinus beynahe verhalten: man ſoll den Halbmeſſer *pq* des Bildes auf der Nezhaut im Auge finden.

Aufl.

Aufl. Der Strahl QO, welcher mitten auf 87
die Hornhaut fällt, wird aus der Lage OC in die 88 F.
Lage Oef gebrochen, und es iſt $COe = \frac{3}{4}\alpha$, wenn
$POQ = COc = \alpha$ geſetzt wird. Die zweyte Brechung in der Vorderfläche der Kryſtallinſe bringt den Strahl aus der Lage ef in die Lage ehg, worin er rückwärts verlängert die Augenaxe in k ſchneidet, 88 F.
und es iſt $Ceg = \frac{12}{13}\ Cef$, oder $gef = Oek = \frac{1}{13}$
Cef. Nun hat man vermöge der im 237 §. mitgetheilten mittlern Abmeſſungen des Auges $CA = Ce = 3\frac{3}{4}$ Linien, $AO = 1\frac{1}{6}$ Lin. $= 1{,}1666$ Linien, alſo $CO = 4{,}9166$ Lin., und im Dreyeck COe iſt $Ce : CO = \sin COe : \sin Cef$, alſo $Cef =$

$$\frac{4{,}9166 \,.\, 0{,}75 \,.\, \alpha}{2{,}75} = 0{,}9833 \,.\, \alpha,$$

weil vermöge der Vorausſetzung die Winkel ſo klein ſind, daß ſie ſich beynahe wie ihre Sinus verhalten: demnach findet man $OCe = Cef - COe = 0{,}2333 \,.\, \alpha$, und

$$Oe = \frac{OCe}{COe} \,.\, Ce = \frac{0 \,.\, 2333}{0{,}75} \,.\, 3{,}75 =$$

1,1666 Linien. Nun war $Oek = \frac{1}{13}\ Cef$, alſo findet man $Oek = 0{,}0756 \,.\, \alpha$, und $Oke = COe$

$$- Oek = 0{,}6744 \,.\, \alpha, \text{ ſo wie } Ok = \frac{Oek}{Oke} \,.\, Oe =$$

$$\frac{0{,}0756}{0{,}6744} \,.\, 1{,}1666 = 0{,}1308 \text{ Linien.}$$

Weiter iſt

EG = 2,8333 Lin.
AG = 2,0833 —

alſo EA = 0,7500 Lin.
Noch iſt Aa = 1,1666 —

alſo

also OE = 0,4166 Lin.
Vorhin war Ok = 0,1308 —

also Ek = 0,5474 Lin.

Weil nun Eh = EG = 2,8333 Linien, ſo findet man $Ehk = \frac{Ek}{Eh} \cdot Oke = \frac{0,5474}{2,8333} \cdot 0,6744 \cdot \alpha = 0,1303 \cdot \alpha$. Dies iſt für den Strahl *eh* der Neigungswinkel beym Durchgang durch die hintere Fläche der Kryſtallinſe, er wird nun aus der Lage *hg* in die Lage *hq* gebrochen, worin er rückwärts verlängert die Augenaxe in *l* ſchneidet, und man hat $ghq = khl = \frac{1}{12} Ehk = 0,0109 \cdot \alpha$, alſo $Alh = Oke - khl = 0,6635 \cdot \alpha$. Noch iſt

$$Ehk = 0,1303 \cdot \alpha$$
$$khl = 0,0009 \cdot \alpha.$$

alſo $Ehl = 0,1412 \cdot \alpha$.

Ferner $Alh : Eh = Ehl : El$, alſo $El = \frac{0,1412}{0,6635} \cdot 2,8333 = 0,6029$ Linien, und hievon EO = 0,4166 Lin. ſubtrahirt giebt $Ol = 0,1863$ Linien. Wird nun *Oq* gezogen, ſo iſt im Dreyeck *Oql* die Seite *Oq* beynahe = *Op*, und nach einem Mittel aus mehreren Augen genommen, kann man *Op* auf $11\frac{1}{2}$ Linien ſchätzen; alsdenn hat man im Dreyeck *Oql* den Winkel an $q = \frac{Ol}{Oq} \cdot lq = \frac{0,1863 \cdot 0,6635}{11\frac{1}{2}} = 0,0104 \cdot \alpha$, mithin $pOq = Olq + Oql = 0,6739 \cdot \alpha$.

Wie nun α ſelbſt nicht ſehr groß angenommen wird, ſo iſt auch *pOq* nur ein kleiner Winkel, und

pq wenig von einer auf Op ſenkrechten graden Linie verſchieden: mithin iſt der geſuchte Halbmeſſer pq des Bildes beynahe $= Op \,.\, \text{tang}\,.\, pOq$. Wird alſo $pOq = \mu\alpha$ angenommen, ſo iſt $pq = Op \,.\, \text{tang}\,.\, \mu\alpha$, oder auch $pq = \mu \,.\, Op \,.\, \text{tang}\, \alpha$, ſo lange die Vorausſetzung beſtehet, daß α nur ein kleiner Winkel ſey, deſſen Sinus und Tangente nicht ſehr verſchieden, und ſolchen Winkeln beynahe proportional ſind, die α nicht übertreffen.

Die Zahl μ wäre vermöge der vorſtehenden Rechnung $= 0{,}6739$, und dieſe iſt von der Zahl $\frac{2}{3}$ wenig verſchieden. Wie nun die Zahlen, worauf jene Rechnung gebauet iſt, ſo zuverläßig nicht ſind, daß nicht vielleicht jedes einzelne Auge andre Zahlen erfordern würde, ſo kann man $\mu = \frac{2}{3}$ ſchätzen, und dieſe Zahl als eine mittlere annehmen, die in jedem beſondern Fall zwar nicht völlig ſicher als die richtige angenommen werden, jedoch aber von der eigentlich geſuchten ſo gar viel nicht verſchieden ſeyn kann.

Dies vorausgeſetzt, läßt ſich pq durch eine leichte Zeichnung ſo finden. Man theile Op in drey gleiche Theile, nehme $OV = \frac{1}{3}\, Op$ und ziehe Vq mit POc parallel, ſo iſt pq der Halbmeſſer des Bildes auf der Nezhaut. Denn nun iſt noch Vq beynahe $= Vp$, und $OV : Vq = OqV : pVq = 1 : 3$, mithin $OqV = \frac{1}{3}\, pVq = \frac{1}{3}\, pOc = \frac{1}{3}\alpha$, und $pOq = pVq - OqV = \frac{2}{3}\alpha$, wie erfordert wird.

239. §.

Die Erleuchtung des Bildes auf der Nezhaut zu finden, wenn der Gegenſtand

ſtand, welcher Licht ins Auge ſchickt, kreisförmig iſt.

Aufl. 1) Die durch den Stern KL hindurch gehende Lichtmenge ſey $= M$, aQd der aus Q auffallende durch den Stern gehende Lichtkegel, $PQ = p$, $\frac{1}{2} KL = b$, $pq = q$, $OP = \delta$, $Op = a$; ſo iſt $M = \frac{\pi^2 \, p^2 \, b^2}{\frac{1}{4}(Qa + Qd)^2}$. (199. §. n. 3.) Weil aber hier $\frac{1}{2}(Qa + Qd)$ von QO nicht merklich verſchieden iſt, ſo hat man $M = \frac{\pi^2 \, p^2 \, b^2}{QO^2}$, oder $M = \pi^2 \, b^2 \, \text{ſin} \, \alpha^2$, weil $POQ = \alpha$ geſetzt iſt. Ferner iſt die Fläche des Bildes $= \pi \, . \, q^2 = \mu^2 \pi \, . \, a^2 \, \text{tg} \, . \, \alpha^2$ (238. §.) mithin die mittlere Erleuchtung $Y = \frac{1}{\mu^2} \, . \, \frac{\pi \, b^2 \, \text{ſin} \alpha^2}{a^2 \, \text{tg} \, \alpha^2} = \frac{1}{\mu^2} \, \pi \, \text{coſ} \, \alpha^2 \, . \, \text{tang} \, ApL^2$, oder $Y = \frac{1}{\mu^2} \, . \, \frac{\pi \, \delta^2}{(\delta^2 + p^2)} \, . \, \frac{b^2}{a^2}$. Man vergleiche den 199 §. num. 4.

2) Aus dieſer mittlern wird die centrale Klarheit, wenn man p unendlich klein annimmt: alſo iſt die centrale Klarheit $I = \frac{1}{\mu^2} \, \pi \, \text{tg} \, ApL^2$, oder $I = \frac{\pi \, b^2}{\mu^2 \, a^2}$. Beyde, die mittlere und centrale Klarheit ſind nicht merklich verſchieden, wenn das Object weit entlegen iſt, weil alsdenn $\frac{\delta^2}{\delta^2 + p^2}$ ſehr nahe $= 1$ iſt. In fällen dieſer Art hängt alſo die Klarheit des Bildes nicht von der Entfernung des Objects ab.

3) Eine

3) Eine nähere Vergleichung mit dem 199. bis zum 203. §. ergiebt leicht, daß die dortigen Formuln hier ihre Anwendung finden müſſen, wenn man ſtatt des dortigen g hier μa ſchreibt, in der Vorausſetzung, daß das Bild auf der Nezhaut deutlich ſey. Wenn alſo λ eine Stelle des Objects, und der ſcheinbare Abſtand derſelben vom Mittelpunct $PA\lambda = \psi$ iſt; ſo iſt die Klarheit der dazu gehörigen Stelle des Bildes auf der Nezhaut $= \frac{\pi}{\mu^2} \frac{b^2}{a^2} (1 - \sin\psi^2)$. (202. §.) Dieſe iſt von der centralen Klarheit nicht um den 20ſten Theil verſchieden, ſo lange ψ nicht über 12 bis 13 Grad beträgt.

4) Wird das Auge von einer Kugel QYZ erleuchtet, ſo iſt die durch den Stern fallende Lichtmenge $M = 2\pi^2 r^2 \sin v \cdot AXL$, (62. §.) alſo auch $M = 4\pi^2 r^2 (\sin \frac{1}{2} AXL)^2$. Weil aber AXL gewöhnlich ſehr klein iſt, mithin $\sin \frac{1}{2} AXL = \frac{1}{2} \sin AXL$ angenommen werden kann, ſo iſt $M = \pi^2 r^2 \sin AXL^2 = \frac{\pi^2 r^2 b^2}{\delta^2}$, wenn man $OX = \delta$ ſetzt, und $QX = r$. Wie nun in dieſem Fall beynahe $OQ : QX = Oc : cp$ ſeyn wird, oder $\sqrt{(\delta^2 - r^2)} : r = a : \frac{1}{\mu} q$, ſo wird $q = \frac{\mu a r}{\sqrt{(\delta^2 - r^2)}}$, und man erhält $Y = \frac{\pi b^2 (\delta^2 - r^2)}{\mu^2 a^2 \delta^2}$, da dann $\frac{\sqrt{(\delta^2 - r^2)}}{\delta} = \cos\alpha$ iſt, und die Formul für die

mittlere Erleuchtung kommt noch mit der vorigen überein.

5) Jedes Segment yYz, wozu am Mittelpunct X der Kugel ein Winkel $YXy = YXz = \varphi$ gehört, ſchickt aufs Auge die ſenkrechte Erleuchtung $\pi \sin\psi^2$, wenn man $YOy = \psi$ ſetzt; und weil $\tang \psi = \frac{r \sin\varphi}{\delta - r \cos\varphi}$, $\sin\psi = \frac{r \sin\varphi}{\sqrt{(\delta^2 - 2\delta r \cos\varphi + r^2)}}$, die Oefnung des Auges aber ſehr klein iſt; ſo hat man die auf daſſelbe fallende Lichtmenge $M = \frac{\pi^2 b^2 r^2 \sin\varphi^2}{\delta^2 - 2\delta r \cos\varphi + r^2}$.

Weiter iſt $Ox : xy = Op : pc$, alſo $pc = \frac{1}{\mu} q = \frac{ar \sin\varphi}{\delta - r \cos\varphi}$, und man erhält die mittlere Erleuchtung des Bildes auf der Nezhaut $Y = \frac{\pi b^2 (\delta - r \cos\varphi)^2}{\mu^2 a^2 (\delta^2 - 2\delta r \cos\varphi + r^2)}$, da dann wiederum $\frac{\delta - r \cos\varphi}{\sqrt{(\delta^2 - 2\delta r \cos\varphi + r^2)}} = \cos\psi$, und $Y = \frac{1}{\mu^2} \pi \cos\psi^2 \tang . ApL^2$ wie vorhin gefunden wird. Auch giebt die Vorausſetzung $\varphi = o$ die centrale Erleuchtung $I = \frac{\pi b^2}{\mu^2 a^2}$ wie vorhin.

6) Geſammte Formuln des 205. §. müſſen wiederum ihre Anwendung hieſelbſt finden, wenn man

man μa ſtatt g ſchreibt, in der Vorausſetzung, daß das Bild auf der Nezhaut deutlich ſey. Demnach iſt die Klarheit des Bildes auf der Nezhaut an jeder Stelle $= \frac{\pi\, b^2}{\mu\, a^2} \cos\psi^4 = \frac{\pi\, b^2}{\mu^2\, a^2} (1 - \sin\psi^2 (2 - \sin\psi^2))$, wenn ſelbige mit einer Stelle auf der Kugel zuſammen gehört, die von der Mitte um den ſcheinbaren Abſtand $XOy = \psi$ entfernt iſt. Beträgt dieſer Winkel nur wenige Grade, ſo iſt die Klarheit des Bildes auf der Nezhaut ſehr nahe überal mit der centralen Klarheit deſſelben einerley.

7) Noch iſt bey dieſer Berechnung der Erleuchtung des Bildes auf der Nezhaut, wie oben bey den Formuln für die Glaslinſen, auf dasjenige Licht nicht Rückſicht genommen worden, welches beym Durchgang durch die Brechenden Flächen im Auge zurückgeworfen, oder ſonſt beym Durchgang durch die Augenfeuchtigkeiten aufgehalten und zerſtreut wird. Dieſer Abgang von der Menge des auf die Hornhaut fallenden Lichts verurſacht, daß die Klarheit des Bildes auf der Nezhaut nicht völlig ſo groß ſeyn kann, als die Formuln angeben, und die Verminderung der Klarheit, welche daher rührt, dürfte bey einem ſonſt geſunden Auge vielleicht wie bey Gläſern von mittelmäßiger Durchſichtigkeit etwa den ſechſten Theil deſſen betragen, was nach der Formul gefunden wird.

240. §.

Man ſtelle ſich vor, die leuchtende Fläche 87 F.
QYZ ſey in ſolche Elemente getheilt, welche dem

Auge ORpS einerley Gröſſe zu haben ſcheinen, ſo wird jedes dieſer Elemente ſein Bild auf der Nezhaut haben. Wenn ferner, wie hier vorausgeſezt wird, das ganze Bild deutlich iſt, ſo wird das Bild eines jeden der erwehnten Elemente der leuchtenden Fläche eine eigene Stelle auf der Nezhaut einnehmen, auch werden dieſe Elemente des Bildes, welche mit den gleich groß ſcheinenden Elementen der leuchtenden Fläche zuſammen gehören, gleich groß ſeyn. Wofern nun alle dieſe Elemente des Bildes gleich ſtark erleuchtet ſind, mithin jedes derſelben von dem dazu gehörigen Element der leuchtenden Fläche ſoviel Licht empfängt, als jedes andre Element des Bildes von dem dazu gehörigen Element der leuchtenden Fläche; ſo wird das Auge von dem Glanz aller Elemente der Fläche QYZ auf einerley Art gerührt, mithin wird der Beobachter allen Elementen einen gleichen Glanz zuſchreiben. Wenn eines von den Elementen der leuchtenden Fläche die damit zuſammengehörige Stelle der Nezhaut nochmahl ſo ſtark als ein andres erleuchtete, ſo würde wohl ohne Zweifel das erſte Element nochmahl ſo ſtark glänzend, als das andre ſcheinen. Dieſemnach kann man feſtſetzen:

> der ſcheinbare Glanz eines leuchtenden Elements ſey der Erleuchtung des Bildes proportional, welches das von demſelben ins Auge geſchickte Licht auf der Nezhaut macht.

241. §.

Wenn das leuchtende Element in der Augenaxe liegt, ſo iſt die Erleuchtung des dazu gehörigen

gen Bildes auf der Nezhaut $= \frac{\pi b^2}{\mu^2 a^2}$, (239. §. n. 2.) mithin iſt der ſcheinbare Glanz des Elements dieſem Ausdruck proportional. Der würkliche Glanz des Objects iſt in dem bisherigen Formuln = 1 angenommen. Wird derſelbe = S geſezt, ſo iſt der ſcheinbare Glanz eines in der Augenaxe befindlichen Elements $= \frac{\pi b^2 . S}{\mu^2 a^2}$: demnach iſt derſelbe bey einerley Oefnung des Sterns im Auge dem würklichen Glanz proportional, und bey einerley Beſchaffenheit des Auges hängt der ſcheinbare Glanz eines Elements, das ſich in der Augenaxe ſelbſt befindet, von der Entfernung deſſelben vom Auge nicht ab, wobey jedoch vorausgeſezt wird, daß das Licht unterweges, etwa wegen Undurchſichtigkeit der Atmoſphäre, oder aus andern Urſachen keinen Abgang leide.

Wofern der ſcheinbare Abſtand des leuchtenden Elements von der Augenaxe nur ein ſehr kleiner Winkel iſt, ſo iſt die Erleuchtung des dazu gehörigen Bildes auf der Nezhaut auch noch ſo ſehr nahe $= \frac{\pi b^2 . S}{\mu a^2}$. So lange demnach ein leuchtendes Object, das für ſich in allen Elementen einerley Glanz hat, unter einem kleinen Sehewinkel ins Auge fällt, ſo lange iſt auch der ſcheinbare Glanz deſſelben in allen Stellen einerley, und der Formul $\frac{\pi b^2 . S}{\mu^2 a^2}$ proportional; vorausgeſezt, daß das Bild auf der Nezhaut deutlich ſey.

 242. §.

242. §.

Weil der Stern im Auge bey ſtärkern Licht enger und bey ſchwächern Licht gröſſer wird, ſo kann die ſichtbare Klarheit mit dem Glanz des Objects nicht in einerley Verhältniß zunehmen: ſie ändert ſich vielmehr in einem Verhältniß, welches aus den Verhältniſſen des Glanzes des Objects und des Quadrats vom Halbmeſſer der Oefnung des Sterns zuſammen geſetzt iſt. Um alſo in jedem Fall die ſcheinbare Klarheit eines ſichtbaren Objects zu finden, müſte noch bekannt ſeyn, wie die Oefnung des Sterns von der Gröſſe der ins Auge fallenden Erleuchtung abhängt? Eine Frage, worauf eine zutreffende Beantwortung ſchwerlich zu hoffen iſt, weil es bisher von den geſchickteſten Zergliederern noch nicht hat ausfündig gemacht werden können, was es eigentlich mit dieſer bewundernswürdigen Eigenſchaft des Regenbogens im Auge für eine Bewandniß habe. Deſto ſchätzbarer ſind die Verſuche und andre Unterſuchungen, welche Hr. Lambert darüber angeſtellet hat, und wovon ich hier eine kurze Nachricht geben werde, die man nicht für überflüßig halten wird, obgleich die Reſultate davon noch nicht haben zur überzeugenden Richtigkeit gebracht werden können.

243. §.

Die Aenderung der Oefnung des Sterns hängt nicht von demjenigen Licht ab, was auf den Regenbogen fällt, ſondern vielmehr von demjenigen, was durch den Stern ins Auge hinein geht,

und auf die Nezhaut fällt. H. Lambert ließ das Licht von der Flamme einer angezündeten Kerze durch eine Glaslinſe in ſein Auge fallen, und ſtellte ſeitwärts einen Spiegel, worin er deutlich wahrnehmen konnte, ob das Bild der Flamme nur auf den Regenbogen, oder auf den Stern im Auge fiel. Die Lichtflamme ſelbſt war um etwas mehr als die dreyfache Brennweite von der Glaslinſe entfernt. Wenn nun das Bild der Flamme allein auf dem Regenbogen fiel, ſo bemerkte Hr. Lambert keinen Unterſcheid in der Oefnung der Sterne beyder Augen. Sobald aber nur der geringſte Theil des Bildes der Lichtflamme auf den Stern fiel, welches er durch eine geringe Bewegung des Haupts zuwege bringen konnte, ſobald nahm er auch eine faſt augenblickliche Zuſammenziehung dieſes Sterns wahr, und derſelbe ward faſt dreymahl kleiner, wenn das Bild der Flamme ganz auf den Stern fiel. (Photom. Part. IV. Cap. II. §. 830.) Dieſemnach muß die eigentliche Urſache der Zuſammenziehungen und Erweiterungen des Sterns in den zarten Fibern der Nezhaut ſelbſt zu ſuchen ſeyn, und die Oefnung des Sterns muß von der Klarheit des Bildes auf der Nezhaut abhängen. Wie nun dieſe Klarheit des Bildes hinwiederum von der Oefnung des Sterns abhängt, ſo ſtehen beyde in einer wechſelſeitigen Verbindung.

Wenn ſich das Auge von einerley leuchtenden Object weiter entfernt, ſo wird die durch den Stern bey einerley Oefnung ins Auge fallende Lichtmenge geringer, mithin wird die Oefnung des Sterns gröſſer, folglich auch in ſo fern die ſcheinbare Klarheit. Umgekehrt wenn das Auge ſich

dem Object mehr nähert, ſo würde die ins Auge fallende Lichtmenge bey einerley Oefnung des Sterns gröſſer werden: demnach zieht ſich der Stern zuſammen, und die ſcheinbare Klarheit wird geringer, als ſie ſeyn würde, wenn der Stern ſeine Oefnung unverändert behielte.

244. §.

Fällt ſehr ſtarkes Licht, wie etwa das Sonnenlicht, in die Oefnung des Sterns, ſo zieht ſich derſelbe ſo ſtark zuſammen, daß faſt nur ein Punct übrig bleibt: in völliger Finſterniß wird die Oefnung aber ſo groß, daß ſie faſt die ganze Fläche des Regenbogens einnimmt. Uebrigens hängt die Gröſſe der Oefnung nicht allein von der Klarheit des Bildes auf der Nezhaut, ſondern von der Gröſſe dieſes Bildes ab. Wenigſtens wird es verſtattet ſeyn, bis auf weitere Prüfung anzunehmen, daß jede Fäſer der Nezhaut für ſich das ihrige zur Zuſammenziehung des Sterns beytrage, daß alſo die Zuſammenziehung deſto ſtärker ſey, je mehr Fäſerchen der Nezhaut von dem einfallenden Licht gerührt werden, mithin deſto ſtärker, je gröſſer der Raum iſt, den das Bild auf der Nezhaut einnimmt.

Wenn beynahe alles Licht ſenkrecht auffällt, ſo iſt auch die Würkung deſſelben auf alle dazu gehörige Stellen der Nezhaut einerley. Man ſtelle ſich alſo den ganzen Flächenraum der Nezhaut, über den das Bild ausgebreitet iſt, in unendlich kleine Elemente eingetheilt vor, die alle gleiche Klarheit haben, oder von dem ins Auge fallenden Licht gleich ſtark gerührt werden. Die Fläche der gröſten Oef-

nung

nung des Sterns ſey $= a$, und die Fläche eben dieſer Oefnung $= x$, wenn die Klarheit des Bildes $= y$ iſt, die Fläche worüber das Bild ausgebreitet iſt, $= \eta$; ſo iſt $a - x$ die Vermindernng der Oefnung, welche von der Klarheit des Bildes y und der Gröſſe η deſſelben zugleich abhängt. Die Faſern aller Elemente der Fläche, worüber das Bild ausgebreitet iſt, tragen das ihrige hiezu bey, und die Fäſern gleicher Elemente tragen gleichviel dazu bey. Dieſemnach muß bey gleicher Erleuchtung die Verminderung der Oefnung des Sterns, oder $a - x$, der Gröſſe des Bildes proportional ſeyn. Wie $a - x$ bey einerley Gröſſe des Bildes von y abhänge, iſt unbekannt. Demnach ſetze man, bey einerley Gröſſe des Bildes verhalte ſich $a - x$ wie z, und z ſey eine Function von y, ſo muß bey verſchiedener Gröſſe und Klarheit des Bildes ſich $a - x$ wie $\eta : z$ verhalten, oder es muß

$$\frac{\eta z}{a - x}$$ eine beſtändige Zahl $= n$ ſeyn.

245. §.

Wäre es bekannt, wie z von y abhängt, ſo könnte man die Gleichung zwiſchen z und y als die Gleichung für eine krumme Linie betrachten, z und y aber als ein paar rechtwinklichte Coordinaten für dieſe Linie, ſo daß die Abſciſſe AP $= y$, und 89 F.
die zugehörige Ordinate PM $= z$ genommen, der Punct M in dieſer krummen Linie läge. Es ſey die Klarheit oder der Glanz des Objects, wovon das Licht ins Auge fällt $=$ S, ſo iſt hier x, was im 239. §. πb^2 war, und y verhält ſich wie Sx.

Man ſchreibe hier c ſtatt deſſen, was im 239. §. $\mu^2 a^2$ war, ſo iſt $y = \frac{S \cdot x}{c}$, (241. §.) mithin $x = \frac{c \cdot y}{S}$. Weil aber $n(a - x) = \eta \cdot z$ angenommen werden konnte 244 §, ſo iſt $a - \frac{AP \cdot c}{S} = \frac{1}{n} \eta \cdot PM$. Weil ferner der Vorausſetzung gemäß allemahl $y = AP = \frac{S \cdot x}{c}$ ſeyn muß; ſo ſey AQ derjenige Werth von y der dem Werth $x = a$ zugehört, ſo hat man $AQ = \frac{S \cdot a}{c}$, und $a = \frac{AQ \cdot c}{S}$, mithin $\frac{(AQ - AP)c}{S} = n \cdot \eta \cdot PM$, oder $\frac{PQ \cdot c}{S} = \frac{1}{n} \eta \cdot PM$, und $\frac{PQ}{PM} = \frac{\eta \cdot S}{nc} = \cot . PQM$.

Daraus würde folgende Regel flieſſen, die Oefnung des Sterns im Auge für jede gegebene Klarheit und Gröſſe des Bildes zu finden, wenn die Verzeichnung der Linie AM als ſchon geſchehen vorausgeſetzt wird. Man nehme die Abſciſſe AQ $= S \cdot a$, ſetze an AQ bey Q einen Winkel, deſſen Cotangente $= \frac{\eta \cdot S}{nc}$. Wenn nun PQM dieſer Winkel iſt, ſo laſſe man MP auf die Abſciſſenlinie ſenkrecht fallen, dadurch findet man $AP = y$, und

die

die geſuchte Oefnung des Sterns $x = \frac{AP \cdot c}{S}$.
Wäre die Gleichung zwiſchen y und z für die krumme Linie AM bekannt, ſo könnte man in derſelben $y = \frac{Sx}{c}$ ſtatt y, und $\frac{n(a-x)}{\eta}$ ſtatt z ſchreiben, ſo würde ſich eine Gleichung ergeben, die x durch S und η beſtimmte.

246. §.

Um nun wenigſtens einigermaßen das Geſetz zu finden, nach welchem z von y abhängt, ſtellte H. Lambert folgende Verſuche an. (Photom. Part. IV. Cap. II. §. 853.) In einem wohl verwahrten verfinſterten Zimmer ward im Fenſterladen eine einzige kreisrunde Oefnung gelaſſen, durch welche das Licht eines reinen heitern Himmels von der Seite her hinein fiel, die von der Sonne abgewandt war. Nach dieſer Vorbereitung nahm H. Lambert einen Spiegel zur Hand, ſtellte ſich gegen die Oefnung, ſahe gegen das hinein fallende Himmelslicht, wartete eine zeitlang, bis der Stern im Auge die dieſer Erleuchtung gemäſſe Oefnung angenommen hatte, und maaß hiernächſt mit einem Cirkelinſtrument auf der Fläche des Spiegels den Durchmeſſer der Oefnung des Sterns. Vermöge der aus dem 83. und 84 §. ſchon bekannten Würkung des ebenen Spiegels, war der ſo gefundene Durchmeſſer der Oefnung des Sterns halb ſo groß, als der würkliche Durchmeſſer. Wenn nemlich DE die Oefnung im Fenſterladen vorſtellt, durch 90 F.

welche

welche das Licht auf den Stern AB des Auges fiel, und *pq* den Durchmeſſer des Sterns auf der Spiegelfläche gemeſſen, ſo war eigentlich das Bild *ab* des Sterns ſo weit hinter dem Spiegel, als der Stern AB ſelbſt vor demſelben, mithin $Aa : Ap = 2 : 1 = ab : pq$, und $pq = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2}$ AB. Der Verſuch ſelbſt ward in zehn verſchiedenen Entfernungen des Auges von der Oefnung DE im Fenſterladen angeſtellt, und jeder Verſuch ward mehr denn einmahl mit Beobachtung aller möglichen Vorſicht wiederhohlt. Der Halbmeſſer CD der Oefnung im Fenſterladen war 0,151 Fuß groß, und die Entfernungen CA betrugen nach und nach 1 Fuß, 2 Fuß, bis 10 Fuß, da dann für jede dieſer Entfernungen $\tan CAD = \frac{CD}{CA}$, und daraus CAD $= \alpha$ beſonders geſucht werden muſte. Die Reſultate dieſer Verſuche enthält folgende Tafel.

Abſtand AC in Fuſſen	Winkel CAD	Durchmeſſer AB	Verbeſſerter Durchm. AB
1	8° 36′	1, 14	1, 13
2	4 20	1, 50	1, 44
3	2 53	1, 70	1, 70
4	2 10	1, 89	1, 93
5	1 44	2, 08	2, 15
6	1 26½	2, 31	2, 36
7	1 14	2, 53	2, 56
8	1 5	2, 78	2, 75
9	0 58	2, 89	2, 93
10	0 52	3, 15	3, 10

Die verbeſſerten Durchmeſſer des Sterns ſind nach einer Methode, unvermeidliche Irrthümer

bey

bey Beobachtungen und Verſuchen zu berichtigen, geſucht worden, die H. Lambert im 275 u. f. 396. u. f. §. §. der Photometrie vorgetragen, nachher aber auch in ſeinen Beyträgen zum Gebrauch der Mathematik I Theil 224 u. f. S. weiter ausgeführt hat.

Uebrigens hat H. Lambert den Durchmeſſer des Regenbogens 4,7 Pariſer Linien groß gefunden, und in eben dieſem Maaß ſind auch die in der Tabelle angeführten Durchmeſſer des Sterns im Auge gemeſſen.

247. §.

Jede dieſer Beobachtungen giebt ein paar zuſammen gehörige Werthe von y und z, und es iſt dabey vorläufig zu bemerken, daß y und z in den Formuln des 245 §. eigentlich Zahlen, a und x aber ſo wie η und c Flächen bezeichnen. Weil nemlich a, x, c, Flächen ſind, ſo muß $z = \frac{n(a-x)}{\eta}$ eine Zahl ſeyn, eben ſo wie $y = \frac{S \,.\, x}{c}$, weil S eine Zahl iſt. Multiplicirt man mit $\frac{c}{na}$, ſo hat man auch $\frac{c}{na}\, z = \frac{1 - x : a}{\eta : c}$, und $z = \frac{na}{c} \,.\, \frac{1 - x : a}{\eta : c}$. Setzt man ferner $\frac{a}{c} = m$, ſo iſt $z = nm \,.\, \frac{1 - x : a}{\eta : c}$, und $y = \frac{m \,.\, S \,.\, x}{a}$. Es iſt aber $\eta = \pi c \,.\, \mathrm{tg}\, \alpha^2$, und a war die Fläche der gröſten

ſten Oefnung des Sterns im Auge: wenn man alſo die Fläche der jedesmahligen Oefnung x durch eine Zahl ausdrückt, wobey man die Fläche $a = 1^2$ annimmt, ſo kann man in den lezten Formuln x ſtatt $\frac{x}{a}$ ſchreiben, und man erhält $z = \frac{n \cdot m\,(1 - x)}{\pi \operatorname{tg} \alpha^2}$, $y = m\,Sx$.

Bey den im vor. §. erzählten Beobachtungen war S die Klarheit des heitern von der Sonne erleuchteten Himmels, ferner waren x und α für jede Beobachtung bekannt, alſo lieſſen ſich die Werthe $\frac{z}{n \cdot m} = \frac{1 - x}{\pi \operatorname{tg} \alpha^2}$ und $\frac{y}{m\,S} = x$ finden. Hiebey muß ich jedoch bemerken, daß H. Lambert den halben Durchmeſſer des Bildes auf der Nezhaut $pq = Vq \cdot \sin \alpha$ ſetzt, daher iſt bey ihm $\frac{z}{n \cdot m} = \frac{1 - x}{\pi \sin \alpha^2}$: beydes iſt gleichgültig, ſo lange die Winkel klein ſind, und eins wie das andre nur beynahe richtig. Uebrigens geben die Beobachtungen folgende Tafel.

Abſtand AC	Oefnung x des Sterns	ſcheinb. Halbm. α	Fläche des Bild. $\pi \sin \alpha^2$	$\frac{1 - x}{\pi \sin \alpha^2} = \frac{z}{n \cdot m}$
1	0, 0578	8° 36′	0, 07025	13, 43
2	0, 0938	4 20	0, 01794	50, 51
3	0, 1308	2 53	0, 007954	113, 96
4	0, 1686	2 10	0, 004492	193, 52
5	0, 2092	1 44	0, 002875	289, 17
6	0, 2525	1 $26\frac{1}{2}$	0, 000211	393, 10
7	0, 2962	1 14	0, 001456	513, 52
8	0, 3423	1 5	0, 001123	626, 81
9	0, 5886	0 58	0, 0008942	735, 50
10	0, 4350	0 52	0, 0007188	850, 58

(M.

(M. ſ. a. a. O. den 857. §.) Nun wäre noch nöthig, eine Gleichung zwiſchen y und z zu ſuchen, welche die Eigenſchaft hätte, daß in derſelben $y = m$ S x geſetzt, der Werth $z = nm \frac{1 - x}{\pi \sin \alpha^2}$ eben ſo, wie es dieſe Tafel giebt, gefunden würde. Es müſte alſo $x = m$ S . 0,578 geſetzt den Werth $z = nm$. 13,43 geben, oder $x = 0,578$. S geſetzt, müſte $z = 13,43 . n$ geben. Herr Lambert macht den Verſuch mit der Gleichung $z = \frac{\nu . y^2}{A + y^2}$, und dieſe giebt $z (A + y^2) = \nu . y^2$, alſo

$$n . m \frac{1 - x}{\pi \sin \alpha^2} (A + m^2 S^2 x^2) = \nu m^2 S^2 x^2.$$

Man ſetze $n = \mu . m$, $A = \alpha . m^2$, ſo erhält man $\frac{\mu(1 - x)}{\pi \sin \alpha^2} (\alpha + S^2 x^2) = \nu S^2 x^2$, und nun iſt die Frage, ob die Coefficienten μ, ν, α, ſich ſo beſtimmen laſſen, daß dieſe Gleichung allen zehn Beobachtungen ein Genüge leiſtet. Weil man auf beyden Seiten auch durch μ dividiren kann, ſo bedarf es nur zweyer Beſtimmungen für α und $\frac{\nu}{\mu}$. Statt deſſen kann man auch μ willkührlich nehmen und hiernächſt α und ν ſuchen. H. Lambert nimmt $\mu = \frac{1}{1000}$ an, und beſtimmt α und ν aus der 6ten und 10ten Beobachtungen, den Glanz des heitern Himmels S = 1 geſetzt. Das giebt

0,3931

$0{,}39310\,(\alpha + 0{,}2525^2) = 0{,}2525^2 . \nu$
$0{,}85058\,(\alpha + 0{,}4350^2) = 0{,}4350^2 . \nu$,
und man findet
$\alpha = 0{,}27385$, $\nu = 2{,}08155$.
Man kann $\nu = 2081{,}55$, und $\alpha = 0{,}27385$ annehmen, ſo hat man $\frac{1 - x}{\pi \sin \alpha^2} (\alpha + S^2 x^2) = \nu S^2 x^2$, und dieſe Gleichung gehörig geordnet giebt

$$S^2 x^3 + (\nu \pi S^2 \sin\alpha^2 - S^2) x^2 + \alpha x - \alpha = 0,$$

oder $x^3 + (\nu\pi\sin\alpha^2 - 1) x^2 + \frac{\alpha}{S^2} . x - \frac{\alpha}{S^2} = 0$.

248. §.

Ob nun gleich dieſe ſo gefundene Gleichung keinesweges für ſo zuverläßig zu halten iſt, daß man in allen Fällen darnach ohne Bedenken rechnen könnte; ſo verdient doch die ſinnreiche Art, wie Herr Lambert darauf kommt, alle Aufmerkſamkeit. Vielleicht käme man der Wahrheit noch näher, wenn etwa Herr Lambert ſelbſt, oder ſonſt jemand, noch mehrere Verſuche mit den erzählten verbände. Eine von den dreyen Wurzeln der cubiſchen Gleichung giebt nur die Auflöſung der Aufgabe, die eigentlich geſucht wird, und es iſt nicht ſchwer in jedem Fall zu beurtheilen, welche von den dreyen Wurzeln die geſuchte ſey. So lange $\sin \alpha^2 > \frac{1}{\nu\pi}$, alſo $\sin\alpha^2 > \frac{1}{6542} = 0{,}000152858 1$, mithin ſo lange $\sin\alpha > 0{,}01236$, und $\alpha > 42\frac{1}{2}$ iſt; ſo lange ſind zwey Wurzeln negativ, fals ſie alle drey möglich ſind, und nur die

poſitive

poſitive Wurzel iſt die geſuchte. Wäre aber auch $\alpha < 42\frac{1}{2}°$ und alle drey Wurzeln poſitiv, ſo iſt doch die geſuchte allemahl < 1. Die Vorausſetzung $S = \infty$ giebt $x = 0$, wie erfordert wird, die Vorausſetzung $S = 0$ aber giebt $x = 1$, wie ebenfals der Sache gemäß iſt. Nimmt man $\alpha = 0$, ſo hat die Gleichung ebenfals die Wurzel $x = 1$, welches alles mit dem 244 §. überein kommt.

249. §.

Uebrigens mag dieſe Gleichung immer noch mehrerer Verbeſſerung bedürfen, ſo erhellet doch aus demjenigen, was bisher vom Bau des Auges, und der Art, wie das ins Auge fallende Licht die Empfindung des Sehens veranlaſſet, iſt vorgetragen worden, ſoviel, daß man berechtiget ſey, folgende Regel anzunehmen: **Bey gleicher ſcheinbaren Gröſſe und gleichem Glanz zweyer leuchtenden Gegenſtände, iſt auch ihr ſcheinbarer Glanz einerley.**

Umgekehrt: **Wenn bey gleicher ſcheinbaren Gröſſe zwey leuchtende Flächen, die man beyde zugleich mit einem Blick überſehen kann, gleich ſtark glänzend ſcheinen; ſo haben ſie würklich einen gleichen Glanz.** Die Oefnung des Sterns im Auge wird nun gewis für beyde Bilder einerley ſeyn: und die gleiche ſcheinbare Gröſſe wird um deswillen vorausgeſetzt, damit die Empfindung der einen Fläche ſich durch keinen Umſtand von der Empfindung der andern Fläche unterſcheide, oder das Auge von beyden vollkommen auf einerley Art gerührt werde.

Die Rede iſt in beyden vorgetragenen Regeln vom Glanz eines für ſich leuchtenden Körpers, dergleichen die Sonne oder eine Lichtflamme iſt, welcher in den allgemeinen Formuln jedesmahl iſt mit S bezeichnet worden. Vornemlich aber iſt dabey vorausgeſetzt worden, daß es Körper gebe, deren äuſſere Fläche leuchtend oder glänzend ſey, ohne daß übrigens die innern Elemente der Maſſe ebenfals glänzend, die Maſſe ſelbſt aber ſo durchſichtig ſey, daß die innern Theile durchſcheinen könnten. Wenn es gleich mit der Flamme einer angezündeten Kerze die zulezt erwehnte Bewandniß hat, ſo könnte es doch wohl mit der Sonne und andern für ſich glänzenden Maſſen, wie etwa ein glühendes Stück Eiſen wäre, diejenige Bewandniß haben, welche bey den Schlüſſen des 34ſten und 35ſten §. iſt vorausgeſezt worden. So wie dies noch eine nähere Prüfung verdient, ſo bedarf es auch noch einer fernern Unterſuchung: ob es auch mit ſolchen Körpern die im 34ſten §. angenommene Bewandniß habe, welche für ſich dunkel und undurchſichtig ſind, aber durch Zurückwerfung des von leuchtenden Körpern auf ihre äuſſere Fläche fallenden Lichts einen entlehnten Glanz bekommen? Mit der Erörterung dieſer lezten Frage wird ſich der folgende Abſchnitt beſchäftigen: um jene Prüfung, wie weit die Geſetze des 33 und 34 §. bey der Sonne oder andern uns bekannten für ſich glänzenden Flächen ihre Anwendung finden, anzuſtellen, wird das nun folgende eine nähere Anleitung geben.

250. §.

Weil der ſcheinbare Halbmeſſer der Sonne wenig mehr als $\frac{1}{4}$ Grad beträgt, ſo iſt die Erleuchtung ihres Bildes auf der Nezhaut für Stellen, die mit denjenigen zuſammen gehören, welche dem ſcheinbaren Sonnenrand nahe ſind, von der centralen Klarheit des Bildes ſo ſehr wenig verſchieden, daß eben deswegen die ſcheinbare Sonnenſcheibe überall gleich klar erſcheinen muß, wenn man durch zarte Wolken, niedrig am Horizont durch die daſelbſt befindlichen Dünſte, oder auch durch ein über einer Lampe ſchwarz angelaufenes Glas grade hinein ſiehet. Der unterſchied der Erleuchtung derjenigen Elemente des Bildes, welche dem Umfang am nächſten liegen, beträgt noch nicht $\frac{1}{10000}$ der centralen Erleuchtung, (239 §. n. 6) wie ſich ergiebt, wenn man in der angeführten Stelle $\psi = 16'$ annimmt. Hiemit ſtimmt auch die Erfahrung völlig überein, und durch eben dieſe Erfahrung läßt ſich umgekehrt beweiſen, daß der Saz des 34 §. bey der Sonne ſeine Anwendung finde. Man kann die ganze ſcheinbare Sonnenſcheibe mit einem Blick bequem überſehen, deswegen wird man nicht auf den Zweifel verfallen, daß vielleicht der Stern im Auge eine andre Oefnung haben werde, wenn man gegen den Sonnenrand ſiehet, als in dem Fall, wenn die Geſichtsaxe gegen den Mittelpunct der Sonne gerichtet iſt: alſo iſt wohl kein Zweifel übrig, daß nicht das Bild der Sonne auf der Nezhaut überall gleiche Klarheit hätte. Der Umſtand, daß auf der

nenſcheibe zuweilen Flecken erſcheinen, wird hier beyſeite geſezt, weil er in der Sache ſelbſt nichts ändert. M. ſ. hievon H. Lamberts Photom. Part. I. Cap. II. §. 74 - 80.

Wäre die Erleuchtung bey jeder Schiefe des Ausgehungswinkels einerley, wenn ſonſt alles übrige einerley iſt, oder verbreitete jedes Element der Sonne in jeden coniſchen Raum von gleicher Gröſſe eine gleiche Lichtmenge; ſo müſte man (mit Beiſeitſetzung der Regel des 34. §.) im 205 §. n.
74 F. 3. die Lichtmenge, welche die Zone $Zz\,Yy$ der Kugel auf das Glas BD ſendet, $= \frac{2\pi^2 r^2 b^2 \operatorname{cof}\psi\, d\varphi \operatorname{fin}\varphi}{KZ^2}$ annehmen, und die Erleuchtung des Ringes $n\nu$ fände man $= \frac{\pi r^2 b^2 \operatorname{cof}\psi\, d\varphi \operatorname{fin}\varphi}{KZ^2 \,.\, g^2 \operatorname{tg}\psi \,.\, d \operatorname{tg}\psi} = y$. Würde nun der Werth $d \operatorname{tang}\psi = \frac{r\,d\varphi(\delta \operatorname{cof}\varphi - r)}{(\delta - r\operatorname{cof}\varphi)^2}$ ſubſtituirt, ſo hätte man $y = \frac{\pi b^2 \operatorname{cof}\psi^2 (\delta - r\operatorname{cof}\varphi)^2}{KZ \,.\, g^2 (\delta \operatorname{cof}\varphi - r)}$, und $\delta - r \operatorname{cof}\varphi = KZ \operatorname{cof}\psi$ geſetzt, gäbe $y = \frac{\pi b^2 KZ \operatorname{cof}\psi^4}{g^2(\delta\operatorname{cof}\varphi - r)}$, oder $y = \frac{\pi b^2 (\delta - r\operatorname{cof}\varphi)}{g^2(\delta \operatorname{cof}\varphi - r)} \,.\, \operatorname{cof}\psi^3$.

Weil ψ und φ zugleich verſchwinden, ſo giebt dieſe Formul, wie die im 205 §. n. 3. gefundene, die centrale Erleuchtung $= \frac{\pi b^2}{g^2}$, welches auch den Vorausſetzungen, worauf ſich beyde Formuln gründen gemäß iſt. Dagegen wächſt bey der jetzigen Vorausſetzung y, wenn ψ und φ wachſen.

Schon aus Betrachtung der Figur erhellet, daß ϕ ſehr ſchnell wachſe, wenn ψ von der o an wächſt, δ aber gegen r ſehr groß iſt, und eben das giebt die Gleichung $\tang\psi = \frac{r\sin\phi}{\delta - r\cos\phi}$, woraus man umgekehrt $\sin\phi = \sin\psi(n\cos\psi \pm \surd(1 - n^2\sin\psi^2))$ erhält, $\frac{\delta}{r} = n$ geſetzt, wobey zu bemerken iſt, daß für den Winkel AOX (74 Fig.) hier das zeichen (—) gelte. Nun bleibt $\cos\psi$ ſo lange ſehr nahe $= 1$, als ψ noch nicht 16′ übertrift, alſo bleibt beynahe $n\cos\psi = n$. Sobald $\sin\psi = \frac{r}{\delta} = \frac{1}{n}$ wird, hat man $\sin\phi = \cos\psi$, und $\phi = 90° - \psi$. Wie nun bey der Sonne $\frac{r}{\delta}$ nie über $\frac{1}{200}$, alſo ψ nie über 17′ beträgt, ſo wird ſehr bald $n\sin\psi = 1$, alſo wächſt $n\cos\psi - \surd(1 - n^2\sin\psi^2)$, mithin $\sin\phi$ ſehr ſchnell mit ψ, welches alles auch aus Betrachtung der Figur erhellet. Dieſemnach nimmt $\cos\phi$ ſehr ſchnell ab, und $y = \frac{\pi b^2(\delta - r\cos\phi)}{g^2(\delta\cos\phi - r)}$ $\cos\psi^3$ wächſt ſehr ſchnell, ſo daß y unendlich groß würde, wenn ψ dem ſcheinbaren Halbmeſſer der Sonne gleich, alſo $\sin\psi = \frac{r}{\delta} = \cos\phi$ würde.

Wofern alſo jedes Element der Sonne nach allen Seiten in gleiche coniſche Räume, die von demſelben als ihrer Spitze ausgehen, einerley Lichtmenge gleichförmig verbreitete; ſo müſte die ſcheinbare Klarheit der Sonnenſcheibe vom Mittel-

punct gegen den Umfang zu ſo ſehr zunehmen, daß ſo gar die Klarheit ihres äuſſern Umfangs alle Gränzen übertreffen müſte. Weil nun dies ſchlechthin wider die Erfahrung iſt, ſo kann es wenigſtens nicht wahr ſeyn, daß von einerley Element der Sonne bey jedem Ausflußwinkel ſich gleichviel Licht durch gleiche coniſche Räume verbreite.

251. §.

Hat es nun überdem ſeine Richtigkeit, daß alle Elemente der Sonne eine gleiche ſcheinbare Klarheit haben, ſo iſt nunmehro die Wahrheit des Satzes im 34 §. für die Sonne, und alle ihr ähnliche für ſich leuchtende, und dabey undurchſichtige Körper zur Gnüge beſtättiget. Herr **Bouguer**, im Traité d'optique ſur la gradation de la lumiere, Paris 1760. Liv. I. Sect. II. Art. XII. pag. 90, ſtellt eben dieſe Unterſuchung an. Er ſetzt als ausgemacht zum Grunde, daß die ſcheinbare Sonnenſcheibe überall einerley Klarheit zu haben ſcheine, auch wenn man ſie durch ein Fernrohr betrachte, daß die Gegenſtände viel vergröſſert: er ſetzt ferner als richtig zum Grunde, daß dieſe Sonnenſcheibe vom Mittelpunct gegen den Umfang zu immer mehr Klarheit, und am Umfang ſelbſt eine unendlich groſſe Klarheit zu haben ſcheinen müſte, wenn die Schiefe des Ausflußwinkels das Licht nicht ſchwächte: er kommt auch ſelbſt auf die Folge, daß das Licht dem Sinus des Ausflußwinkels proportional abnehme, fals es anders ſeine Richtigkeit habe, daß die Sonnenſcheibe würklich überall gleiche Klarheit zu haben ſcheine. Dies leztere aber hält Herr **Bouguer** nicht für ausgemacht. Er glaubt: die

Klar-

Klarheit des Bildes auf der Nezhaut könnte wohl durch unmerkliche Stuffen gegen den Umfang zu wachſen oder abnehmen; und bey dem allen könnte ſich doch in unſre Empfindung eine Art von Trugſchluß miſchen, vermöge deſſen wir alle Elemente der ſcheinbaren Scheibe für gleich klar halten würden, wenn die ſehr geringe Verſchiedenheit der Klarheit zweyer zunächſt an einander gränzenden Elemente auf der Nezhaut, bey ſehr geringer Verſchiedenheit ihrer Entfernungen vom Mittelpunct, keine Empfindung einer verſchiedenen Klarheit der damit zuſammen gehörigen Elemente der Sonnenſcheibe veranlaßte. Hätte es hiemit ſeine Richtigkeit, ſo würde dem Auge die verſchiedene Klarheit des Mittelpuncts und einer nahe am Umfang liegenden Stelle alsdann empfindlich werden, wenn man machen könnte, daß das Auge dieſe beyden Stellen allein, und die dazwiſchen liegenden Elemente nicht zugleich mit empfände.

252. §.

Wofern das Licht wegen der Schiefe des Ausflußwinkels noch ſtärker als im Verhältniß des Sinus dieſes Winkels abnimmt, ſo muß die ſcheinbare Klarheit der Stellen der Sonne gegen ihren Umfang zu kleiner, als die ſcheinbare Klarheit ihres Mittelpuncts ſeyn, denn man überſiehet leicht ohne Rechnung, daß nun die Klarheit des Bildes auf der Nezhaut gegen den Umfang zu abnehmen müſſe. Aus eben dem Grunde würde die Klarheit des Sonnenbildes im Brennraum einer erhabnen Glaslinſe gegen den Umfang zu kleiner als in der Mitte ſeyn, und doch könnte dies Bild wegen

eines ähnlichen Trugſchluſſes, der ſich, wie vorhin ſchon bemerkt iſt, in die Empfindung miſchte, dem Auge überall gleich klar zu ſeyn ſcheinen. Um die Verſchiedenheit der Klarheit wahrzunehmen, müſte man machen, daß das Auge die mittelſte Stelle des Bildes, und eine Stelle in der Nähe des Umfangs allein, die dazwiſchen liegenden Stellen aber nicht zugleich mit empfände: auf ſolche Art würde die Verſchiedenheit der Klarheit beyder Stellen empfindlich werden. Hr. Bouguer hat einen Verſuch angeſtellet, der den Zweifel erledigen ſoll, ob die ſcheinbare Klarheit des Sonnenbildes würklich überal einerley ſey, oder ob vielleicht die Verſchiedenheit derſelben in verſchiedenen Entfernungen vom Mittelpunct nur um deswillen vom Auge nicht bemerkt werde, wenn es die ganze Scheibe mit einem Blick überſiehet, weil alsdenn die Differenz der Klarheit ſolcher Elemente des Bildes auf der Nezhaut, die unmittelbar an einander Gränzen, unendlich klein iſt. Er hat ſich dabey eines Inſtruments von folgender Einrichtung bedient.

253. §.

91 F. Von zweyen einander völlig gleichen und ähnlichen Glaslinſen, die alſo eine gleiche Brennweite haben, iſt jede in einer Röhre AB, CD, bey A und C ſo befeſtiget, daß ſie ſelbige gleichſam wie ein Deckel verſchließt. Jede Röhre iſt ſo lang als die Brennweite der Linſe, und am andern Ende dem Glaſe gegen über bey B und D mit einem Deckel verſchloſſen, worin ſich ein kreisrundes Loch von etwa 3 bis 4 Linien im Durchmeſſer befindet, das mit einem Stückchen von feinen weiſſen Papier, oder matt-

mattgeſchliffenen Glaſe bedeckt iſt. Die Linſe muß in der Röhre ſo eingeſezt werden, daß ihre Axe mit der Axe der Röhre zuſammen fällt. Wenn nun eine dieſer Röhren grade gegen den Mittelpunct der Sonne gerichtet und die Glaslinſe am vordern der Sonne zugekehrten Ende befindlich iſt, ſo fällt das Bild der Sonne auf den Boden der Röhre, und nach Beſchaffenheit der übrigen Umſtände entweder ganz oder zum Theil auf das im Boden befindliche weiſſe Papier, oder das matte Glas. Um alles fremde Licht bey Betrachtung beyder Bilder abzuhalten, werden beyde Röhren bey einander in eine dritte weitere Röhre geſtellt, die unten ganz offen, und ſo weit iſt, daß wenn man unten hinein ſiehet, die Stirn und der übrige Theil des Geſichts allenthalben anſchlieſſe. Soll das Bild der Sonne nicht ſo gar klein ausfallen, ſo muß die Brennweite der Gläſer etwas groß ſeyn, alſo nicht weniger als 6 Fuß halten, und noch beſſer iſt es, wenn ſie 10 bis 12 Fuß beträgt. Setzt man die Brennweite $= f$, ſo iſt der Halbmeſſer des Bildes nie Gröſſer, als $\frac{1}{200} f$, alſo nie gröſſer als $\frac{1}{20}$ Fuß, oder $7\frac{1}{5}$ Linien, wenn $f = 10$ Fuß iſt; oder $8\frac{16}{25}$ Linien, wenn $f = 12$ Fuß iſt. Fals nun die Axe des Glaſes mit der Axe der Röhre zuſammen fällt, ſo fällt der Mittelpunct des Bildes in den Mittelpunct des Bodens: und wenn im Boden der einen Röhre die kleine mit weiſſen Papier oder matten Glaſe geſchloſſene Oefnung im Mittelpunct im Boden der andern Röhre aber ſeitwärts des Mittelpuncts um einige Linien davon entfernt angebracht iſt, ſo kann nun das Auge die centrale Erleuchtung des einen Bildes mit der Erleuchtung des

andern Bildes in einer vom Mittelpunct entfernten Stelle unmittelbar vergleichen.

254. §.

Herr Bouguer glaubt nun, die centrale Erleuchtung des einen Bildes gröſſer gefunden zu haben, als die Erleuchtung des andern Bildes an Stellen gegen den Umfang deſſelben, und es kam nur noch darauf an, die centrale Klarheit des einen Bildes mit der Klarheit des andern Bildes an einer vom Mittelpunct entfernten Stelle genauer zu vergleichen, welches ſich ſo bewerkſtelligen ließ. Die centrale Klarheit des Bildes $\frac{\pi b^2}{g^2}$ (205. §. n. 2.) verhält ſich wie die Fläche der Oefnung der Glaslinſe: deswegen kann man ſie vermindern, wenn man die Oefnung verringert. Ob man nun gleich vermittelſt dunkler Ringe, wie ſie ſchon im 218 §. beſchrieben ſind, das Glas bedecken, und dadurch die Fläche des Glaſes, ſo weit das Licht durchfällt, verringern könnte; ſo verfährt Herr Bouguer doch noch behutſamer. Weil die Linſe in der Mitte etwas dicker iſt, als gegen den Umfang zu, und eben deswegen auch ihre Durchſichtigkeit in der Mitte nicht völlig mit ihrer Durchſichtigkeit gegen den Umfang zu einerley iſt; ſo zerſchneidet H. Bouguer eine Scheibe von gleichem Durchmeſſer mit dem Glaſe in gleiche Sectoren, und bedeckt mit einem oder einigen dieſer Sectoren einen Theil der Linſe, ſo daß der bedeckte Theil ebenfalls die Figur eines Kreisausſchnitts hat. Auf ſolche Art werden vom Mittelpunct gegen den Umfang

fang zu proportionale Theile des Glaſes bedeckt, und man kann mit mehrerer Sicherheit annehmen, daß die nach der Bedeckung durchfallende Lichtmenge ſich zu der durch das völlig offene Glas fallenden Lichtmenge verhalte, wie der offen gebliebene Theil des Glaſes zur ganzen Fläche deſſelben vor der Bedeckung.

Beym Verſuch ſelbſt nun muſte Herr Bouguer $3\frac{1}{4}$ Zwölftel der Oefnung des einen Glaſes bedecken, bis er es dahin brachte, daß die Mitte des Bildes nur eben ſo helle blieb, als eine eben ſo groſſe Stelle des andern Bildes in einer Entfernung vom Mittelpunct war, die $\frac{3}{4}$ des Halbmeſſers vom Bilde ausmachte. Weil nun die Klarheit bey gleicher Fläche ſich wie die auffallende Lichtmenge verhält, ſo war nun die auf beyde Stellen der Bilder fallende Lichtmenge gleich, und fals es mit allen Umſtänden des Verſuchs ſeine völlige Richtigkeit hat, ſo ließ ſich daraus die Schlußfolge ziehen: die Lichtmenge auf der Mitte des Bildes verhalte ſich zur Lichtmenge auf einer um $\frac{3}{4}$ des Halbmeſſers davon entfernten Stelle = $12 : 8\frac{3}{4} = 48 : 35$.

255. §.

Hätte es mit dieſem Verſuch ſeine unfehlbare Richtigkeit, ſo würde das Geſez des 34 §. eine ziemliche Aenderung leiden. Zwar behielte es ſeine Richtigkeit, daß das Licht wegen der Schiefe des Ausflußwinkels Abgang leide: nur wäre dieſer Abgang gröſſer, als nach der Regel des 34 §. angenommen wird. Allein H. Bouguer geſtehet ſelbſt a. a. O. 92 S., daß er den Verſuch öfterer

als

als geſchehen, hätte wierhohlen müſſen, ob er es gleich drey bis viermahl gethan habe: auch geſtehet er, daß der Verſuch überhaupt viele Schwierigkeit habe, wenn man ſich davon verſichern wolle, wieweit die Stellen, deren Klarheit mit der centralen verglichen worden, eigentlich vom Mittelpunct entfernt ſind. Ich glaube, der Verſuch hätte beſonders auch mit mehrern andern Glaslinſen von gröſſerer und kleinerer Brennweite wiederhohlt werden müſſen. Beſonders aber hätte ſich Herr Bouguer davon verſichern müſſen, ob auch die Brennweite der Gläſer aufs vollkommenſte richtig gemeſſen ſey, und das Papier oder matte Glas im Boden der Röhre aufs genaueſte in der Entfernung des eigentlichen Brennpuncts vom Glaſe ſeine Stelle gehabt habe. Ein kleiner Irrthum hierin muſte nothwendig zum Fehlſchluß aus dem Verſuch Gelegenheit geben. Es iſt nemlich nur für das völlig deutliche Bild der Sonne wahr, daß es in allen Stellen ſehr nahe gleich ſtark erleuchtet ſey, nicht für das undeutliche Bild. (210. u. f. §. §.) War das weiſſe Papier oder das matte Glas der Glaslinſe nur um ein weniges näher, oder um ein weniges weiter davon entfernt, als die Brennweite erforderte, ſo war das Bild nicht mehr überall gleich ſtark erleuchtet, ſondern in der Mitte heller, als gegen den Umfang zu. Demnach ſind dieſe Verſuche noch nicht entſcheidend genug, daß man deswegen genöthiget ſeyn ſollte, ein andres Geſetz für die Verminderung des Lichts wegen der Schiefe des Ausflußwinkels anzunehmen, als das oben feſtgeſezte, vermöge deſſen die Verminderung dem Sinus des Ausflußwinkels proportional iſt.

Der

Der XVIII. Abſchnitt.

Gründe der Theorie

von Ausmeſſung des Lichts, wenn es von unpolirten Flächen zurück ſtrahlet.

256. §.

Wenn man einen für ſich dunklen und für unſre Empfindung völlig undurchſichtigen Körper in ganz dünne Blättchen zerſchneidet, ſo werden leztere durchſichtig, und laſſen wenigſtens einiges Licht durch. Die Maſſe, woraus ein dünnes Blättchen dieſer Art beſtehet, mag ſeyn von welcher Beſchaffenheit ſie wolle, das Licht ſcheint allemahl einigermaßen durch, und vermöge dieſer Erfahrung iſt man berechtiget, alle für ſich dunkle Maſſen für durchſichtige anzunehmen: nur wird die Durchſichtigkeit bey einer gewiſſen Dicke der Maſſe aufhören. (M. ſ. Traité d'optique ſur les reflexions etc. par Mr. Chevalier Newton. Tom. II. Liv. II. Part. III. Prop. II. pag. 336. 337.) Die Undurchſichtigkeit der Maſſe iſt deſto gröſſer, je kleiner die Dicke iſt, bey der die Maſſe aufhört, durchſichtig zu ſeyn: dagegen iſt die Undurchſichtigkeit deſto kleiner, und die Maſſe deſto mehr durchſichtig, je gröſſer die Dicke derſelben werden kann, bevor ſich ihre Durchſichtigkeit verliert. Selbſt das Glas und andre ähnliche Maſſen, die wir ſonſt für durchſichtig halten, ſind in eben dieſem Verſtande in einem gewiſſen Grade undurchſichtig. Je dicker ein Stück Glas iſt, deſto weni-

ger

ger Licht läßt es durch, und es giebt eine gewiſſe Dicke, wobey die Durchſichtigkeit des Glaſes entweder würklich ganz aufhört, oder doch wenigſtens für unſer Geſicht nicht mehr bemerklich iſt.

257. §.

92 F. Es ſey nun ABCD eine ſonſt undurchſichtige Maſſe, jedoch nur in dem Grade, daß wenn von derſelben die Scheibe A*ab*B abgeſchnitten würde, dieſe ſchon anfienge, das auffallende Licht durchzulaſſen: ſo erhellet, daß auch alsdenn das auffallende Licht eben ſo tief in die Maſſe ABCD eindringen werde, wenn gleich dieſe Scheibe A*ab*B mit der übrigen Maſſe verbunden bleibt. Es wird aber nicht alles Licht in die Maſſe hineindringen, ſondern ein Theil deſſelben ſchon von der äuſſern Fläche AB theils unter einerley Winkel zurück geworfen, theils nach allen Seiten zerſtreuet werden. Weil ferner das ganze Stück A*ab*B der Maſſe wenigſtens einige Durchſichtigkeit hat, und auf alle Theilchen der Maſſe bis an *ab* etwas von dem eindringenden Licht fällt, welches ſie nach allen Seiten zerſtreuen; ſo geht hinwiederum von dieſem zerſtreueten Licht ein Theil zur Fläche AB heraus, und macht die innern Theilchen der Maſſe bis an *ab* ſichtbar. Hätte es nun mit dieſen Theilchen der Maſſe eine ſolche Bewandniß, daß ſie ins geſammt einerley einfaches gleichartiges Licht zurück ſchickten, wie etwa das rothe oder blaue Licht, ſo würde die Maſſe roth oder blau ausſehen. Daß es mit den Farben der Körper wohl eine ſolche Bewandniß haben könnte, lehrt die Erfahrung ſchon beym Glaſe, weil ein Stück ſonſt klares und im hohen Grade

Grade durchſichtiges Glas eine deſto mehr ins grüne oder blaue fallende Farbe zeigt, je dicker es iſt. Jede Glastafel von dem ſchönſten weiſſen Glaſe hat, wie ſehr bekannt iſt, einen blauen, oder ins grüne ſpielenden Rand, und man wird ſich leicht davon überzeugen, daß dieſe Farbe demjenigen Licht nicht allein zugeſchrieben werden kann, welches die äuſſere Fläche des Randes nach allen Seiten zerſtreuet, daß vielmehr die innern Theile des Glaſes durchſcheinen.

258. §.

Dieſe Erfahrungen vorausgeſetzt, iſt es verſtattet anzunehmen, daß ſich das Licht, was auf eine für ſich dunkle undurchſichtige Maſſe fällt, folgendermaßen vertheile. Hat die äuſſere Fläche derſelben einige Politur, ſo wirft ſie etwas Licht nach dem Geſetz des 81. §. unter einerley Winkel zurück, zerſtreuet aber auch einen Theil des auffallenden Lichts nach allen Seiten: man kann jenes kürze halber das catoptriſche, dieſes das zerſtreuete Licht nennen. Was in die Maſſe hinein dringt, und von den innern Theilchen wieder nach allen Seiten zerſtreuet wird, geht nur zum Theil zur äuſſern Fläche, auf die es auffiel, zurück, durch ſelbe aber zur Maſſe heraus: und dies iſt das gefärbte, oder vielmehr die Erſcheinung der Farbe der Maſſe verurſachende Licht: das übrige in die Maſſe, ſoweit ſie einige Durchſichtigkeit hat, hineinfallende Licht, was nicht mit dem gefärbten Licht wieder durch die äuſſere Fläche zurück geht, muß man als verlohren oder von der Maſſe gleichſam verſchluckt betrachten. (Traité d'

optique

optique par Mr. le Chev. Newton. Tom. I. Liv. I. Part. II. Prop. X. pag. 234. ſqq. Ed. Amſt. Tom. II. Liv. II. Part. III. Prop. V. pag. 341. ſqq.) Fällt das Licht in der Richtung EF auf AB, ſo ſiehet ein Auge, das in G ſtehet, zugleich nicht allein das nach der Richtung FG zurück geworfene catoptriſche, ſondern auch das zerſtreuete und gefärbte Licht, weil beydes das zerſtreuete und gefärbte ſich nach allen Seiten ausbreitet. Je mehr Politur die Fläche hat, deſto gröſſer iſt die Menge des catoptriſchen Lichts, und dieſe kann ſo groß ſeyn, daß dadurch die Empfindung des gefärbten und zerſtreueten Lichts ganz verdunkelt wird. Steht dagegen das Auge in O, ſo ſiehet es allein das zerſtreuete und gefärbte Licht, nicht das catoptriſche: jene beyden Arten ſind allemahl mit einander vermengt, und kommen ins Auge, es ſtehe wo es wolle, weil beydes das zerſtreute und gefärbte Licht nach allen Seiten ausgehet.

Je weniger die äuſſere Fläche der Maſſe polirt iſt, deſto geringer iſt die Menge des ſpiegelartig zurück geworfenen Lichts und die Menge des nach allen Seiten zerſtreueten Lichts deſto gröſſer. Eine Fläche, die gar keine Politur hat, wirft gar kein Licht ſpiegelartig zurück, ſie zerſtreut dasjenige, was nicht in die Maſſe eindringt, nach allen Seiten.

259. §.

Eine dunkle für ſich nicht leuchtende Maſſe nimmt die Natur einer für ſich leuchtende Maſſe an, wenn ſie von fremden Licht erleuchtet wird. Man muß aber hiebey den Glanz oder die Klarheit,

welche ihr das ſpiegelartig zurück geworfene Licht giebt, von derjenigen Klarheit unterſcheiden, welche in dem nach allen Seiten von ihr ausgehenden Licht gegründet iſt. Sowohl das gefärbte als auch das zerſtreute Licht geht von jedem Element der erleuchteten Fläche einer ſolchen für ſich dunklen Maſſe nach allen Seiten eben ſo aus, wie es von jedem Element einer für ſich leuchtenden Fläche nach allen Seiten umher ſtrahlet: dasjenige Licht aber, was von dem erleuchteten Element ſpiegelartig zurück ſtrahlet, nimmt nur eine beſtimmte Richtung. Dies ſpiegelartig zurückgeworfene Licht wird gänzlich ausgeſchloſſen, wenn von der Klarheit der erleuchteten Fläche in dem Verſtande die Rede iſt, wie dies Wort oben im 14 §. iſt erklärt worden. Wenn L*l* alſo ein Element einer dunklen unpolirten Fläche iſt, das eine Erleuchtung = I empfängt, ſo daß die auffallende Lichtmenge = I . L*l* iſt; wenn ferner dies Element einen Theil des auffallenden Lichts nach allen Seiten zurück ſtrahlet, der ſich zur auffallenden Lichtmenge, wie $n : 1$ verhält, und nun die Klarheit des Elements = σ geſetzt wird: ſo iſt $\sigma = n . I$. (17. §.) Hiedurch muß alſo diejenige Lichtmenge verſtanden werden, welche eine Fläche von eben der phyſiſchen Beſchaffenheit, deren Gröſſe = 1 iſt, nach allen Seiten umher ſtrahlen würde, wenn ſie gleichförmig erleuchtet, und die Erleuchtung = I wäre. 1 Fig.

Was im 17. §. angenommen ward, daß bey einerley phyſiſchen Beſchaffenheit der erleuchteten Fläche, alſo auch für ein und eben daſſelbe erleuchtete Element, die Zahl n einerley bleibe, wenn

gleich I gröſſer oder kleiner würde, muß ſo lange als Vorausſetzung gelten, bis ſich Gründe finden, dieſe Vorausſetzung zu verlaſſen. Daß ein und eben daſſelbe Element 2, 3, und überhaupt m mahl mehr Licht nach allen Seiten ausſende, wenn es 2, 3, und überhaupt m mahl mehr Licht empfängt, iſt die einfachſte Vorausſetzung, die man vorziehen muß, ſo lange keine überwiegende Gründe vorhanden ſind, eine andre Vorausſetzung anzunehmen.

Fällt ein Theil desjenigen Lichts, welches das erleuchtete Element nach allen Seiten ausſendet, aufs neue auf eine andre für ſich dunkle Fläche; ſo läßt ſich die Erleuchtung, welche jene mit fremden Licht ſtrahlende Fläche dieſer zuſchickt, auf ähnliche Art ſuchen, wie man ſie ſuchen würde, wenn jene Fläche einen eigenthümlichen Glanz hätte. Die im 35 und 36 §. bewieſenen Formuln finden ihre Anwendung, wenn man ſtatt deſſen, was daſelbſt s hieß, das nunmehro in Rechnung bringt, was hier mit σ bezeichnet iſt: da dann bey der Anwendung auf Flächen von dieſer oder jenen beſondern phyſiſchen Beſchaffenheit, die Zahl n beſonders geſucht werden muß. Uebrigens ſetzen die Formuln des 35 und 36 §. die allgemeine Richtigkeit des im 34 §. bewieſenen Satzes voraus, der ſich auf den zweyten im 2 §. angenommenen Hauptgrundſatz der Photometrie gründet. Wie nun im 245 und 246 §. die Uebereinſtimmung jener Verausſetzungen mit der Erfahrung für den Fall beſonders bewieſen iſt, wenn die Erleuchtung von einem für ſich leuchtenden Körper kommt; ſo wird es nicht überflüßig ſeyn, die Erfahrung auch in dem Fall zu

Rathe

Rathe zu ziehen, wenn die erleuchtende Fläche mit fremden Licht ſtrahlet.

260. §.

Man ſetze zwey ebene Flächen, die am be- 93F.
quemſten die Geſtalt eines Rechtecks haben können, unter einen Winkel BAC von willkührlicher Gröſſe zuſammen, in L ſtelle man eine Kerze ſo, daß ſie von beyden Flächen gleich weit entfernt iſt, und die bey E und F rechtwinklichten Dreyecke AEL, AFL, gleich groß würden, ſo ſind nicht allein die Stellen E und F, ſondern auch jede zwo andre von E und F gleich weit entfernte gleich ſtark erleuchtet. Sind die Flächen nur klein, und man nimmt den Winkel BAC ſo groß, daß EA = EB = FA = FC in Vergleichung mit LE = LF nur klein ſind, ſo werden AB und AC beynahe gleichförmig erleuchtet ſeyn. In HI ſtelle man eine Glaslinſe, und fange die Bilder *ab*, *ac*, der Flächen AB, AC, mit der Ebene MN auf; ſo werden beyde Bilder gleich ſtark erleuchtet ſeyn, und dies allemahl, wenn man gleich die Stelle der Linſe HI ſo ändert, daß ſich die Winkel CAG, BAG ändern. Am beſten iſt es, wenn man die Linſe ſo weit entfernt, daß AG, BG, CG, in Vergleichung mit AB, AC, ziemlich groß ſind, damit alles Licht, was von AB, oder AC, auf die Linſe fällt, beynahe unter einerley Winkel ausflieſſe.

Weil die Stellung willkührlich iſt, ſo ſey AB auf AG ſenkrecht, CAG aber ein ſpitzer Winkel von willkührlicher Gröſſe. Aus C falle CD auf AG ſenkrecht, und es ſey AC = AB; ſo hat man AB : *ab* = AG : *a*G, und CD : *ac* = GD (bey-

 nahe

nahe = AG) : aG, alſo AB : ab = CD : ac. Es iſt aber CD = AC ſin CAD, und AC = AB, alſo AB : CD = 1 : ſin CAD = ab : ac. Weil ferner vermöge der Erfahrung beyde Bilder ab, ac, gleich klar, und wenigſtens beynahe von gleichförmiger Klarheit ſind; ſo verhält ſich die über ab verbreitete Lichtmenge zu der über ac verbreiteten, wie ab : ac = 1 : ſin CAD, und eben dies ſind die Lichtmengen, welche die Flächen AB, AC, auf die Linſe ſchicken. Dieſemnach beweiſet der Verſuch, daß die Lichtmenge dem Sinus des Ausflußwinkels auch alsdenn proportional ſey, wenn die leuchtende Fläche nicht mit eigenem, ſondern mit entlehntem Licht glänzt.

Der Erfolg iſt einerley, man mag Flächen von weiſſer Farbe, oder ſolche wählen, die mit einerley Mahlerfarbe, jedoch gleichförmig, und ſo beſtrichen ſind, daß ſie keinen ſpiegelartigen Glanz haben. M. ſ. H. Lamberts Photomet. Part. III. Cap. II. §. 700 -- 702. pag. 323. 324.

Der XIX. Abſchnitt.

Prüfung der Theorie des H. Bouguer vom Licht, das unpolirte Flächen zurück werfen.

261. §.

Herr Bouguer ſtimmt zwar darin mit Herrn Lambert überein, daß er annimmt, die

Menge

Menge des von unpolirten Flächen zurück ſtrahlenden Lichts ſey nicht bey jedem Ausflußwinkel einerley: auch ſchließt er aus ſeinen angeſtellten Verſuchen, daß dieſe Lichtmenge mit dem Sinus des Ausflußwinkels abnehme. Darin aber weicht er wiederum vom H. Lambert ab, daß er nicht allein ein anderes Geſetz annimmt, als dasjenige, vermöge deſſen die erwehnte Lichtmenge dem Sinus des Ausflußwinkels proportional geſetzt wird, ſondern auch glaubt gefunden zu haben, dies Geſetz ſey für verſchiedene Arten zurückſtrahlender Maſſen verſchieden. Seine Theorie iſt an ſich ſehr ſinnreich, und ſchon dies würde mir die Pflicht auflegen, die Gründe anzuführen, warum ich ihr meinen Beyfall nicht geben kann, die Lambertiſche aber der Natur gemäſſer zu ſeyn glaube; wenn es nicht ohnehin ſchon ſeinen Nutzen haben könnte, zu wiſſen, wie ein Schriftſteller, der um die Wiſſenſchaft ſonſt ſo groſſe Verdienſte hat, die Sache unterſucht habe. Auch habe ich gefunden, daß man die hieher gehörigen dem H. Bouguer eigenen Begriffe und Sätze zuweilen ohne alle Beurtheilung abſchreibt, nicht anders, als wenn es lauter ausgemachte Wahrheiten wären.

262. §.

Wofern die Theilchen auf einer unpolirten, oder auch mattgeſchliffenen undurchſichtigen Fläche, welche als ſo viele kleine Erhöhungen in unzähliger Menge neben einander liegen, und die Fläche überall bedecken, das Licht insgeſammt ſpiegelartig nach dem Geſetz des 81 §. zurück werfen; ſo wird das Geſetz, nach welchem das von einer ſolchen

Fläche zurück ſtrahlende Licht ſich nach allen Seiten ausbreitet, von der Figur dieſer Erhöhungen abhängen, die man ſich alsdenn als ſo viele unendlich kleine Spiegel vorſtellen kann. Hätten ſie insgeſammt die Figur einer Halbkugel, ſo würde jede unpolirte Fläche, wenn ſelbige von einem ſehr weit entlegenen leuchtenden Körper erleuchtet würde, und alle Lichtſtrahlen in paralleler Richtung ſenkrecht auffielen, das darauf fallende Licht nach allen Seiten gleichförmig zurück ſchicken. Wäre nem-
85F. lich die Kreisförmige Ebene BDE überall mit einer unzähligen Menge unendlich kleiner ſo vollkommen polirter Halbkugeln bedeckt, das jede derſelben alles darauf fallende Licht zurück ſchickte; ſo würde jede dieſer Halbkugeln das darauf fallende Licht gleichförmig um ſich her verbreiten, (228. 230. §.) und alle dieſe Halbkugeln zuſammen würden nach jeder angenommenen Richtung eben ſo viel von dem auf die Fläche FDG fallenden Licht zurück werfen, als die einzige Halbkugel BAE allein dahin würfe. Dieſer Erfolg würde allemahl derſelbe ſeyn, wenn gleich die kleinen Halbkugeln nicht alle gleich groß, ſondern in welchem Verhältniß man will, einander ungleich wären. Dabey müſte man jedoch voraus ſetzen, daß das von jeder dieſer kleinen Halbkugeln zurück ſtrahlende Licht durch die umher liegenden nicht aufgefangen würde, und eben um deswillen meint H. Bouguer könne man annehmen, daß ſie ungleich groß, und dabey nach einer gewiſſen Ordnung vertheilt wären.

263. §.

Hätte es mit der Fläche BAE einer unpolirten Halbkugel eben die Bewandniß, wäre auch dieſe

mit

mit einer unzählichen Menge vollkommen polirter ſehr kleiner Halbkugeln bedeckt; ſo müſte freylich die Anzahl der Halbkugeln noch mahl ſo groß ſeyn, als in dem Fall, wenn der gröſte Kreis BDE damit bedeckt wäre: und daraus ſchließt H. Bouguer, es müſſe nun auch die Menge des dem auffallenden Licht grade entgegen zurück ſtrahlenden Lichts nochmahl ſo groß ſeyn, als in dem vorhin betrachteten Fall, wenn die Fläche BDE die zurück werfende, und ſelbige mit dergleichen kleinen Halbkugeln bedeckt wäre. Schon dieſe Folge dürfte, wie ich die Sache einſehe, auch nur in dem Fall richtig ſeyn, wenn man die Grundflächen der kleinen Halbkugeln mit der Grundfläche der großen Halbkugel BDE parallel annähme: alsdenn aber würden die fernern Folgen wegfallen, die H. Bouguer damit verbindet. (Traité d'optique Liv. II. Sect. I. Art. IV. ſqq. pag. 111. ſqq.) Nach der mit CE parallelen Richtung könnte nun nicht die Hälfte derjenigen Lichtmenge zurück ſtrahlen, die nach CS würde zurück geworfen werden, vielmehr nur der vierte Theil jener nach CS zurück gehenden Menge. Denn einmahl könnte nur von der halben Anzahl aller Halbkugeln nach CE das Licht hinſcheinen, und von jeder dieſer nach CE ſcheinenden Halbkugeln würde nur die halbe Fläche das auffallende Licht nach CE werfen können. Es ſcheint aber auch dies nicht die Vorausſetzung zu ſeyn, welche Herr Bouguer annimmt: vielmehr ſcheint ſeine Minung dieſe zu ſeyn, es ſollen alle kleine Halbkugeln mit ihren Grundflächen an die große Halbkugelfläche anſchlieſſen, alſo die Grundfläche jeder kleinen Halbkugel mit dem Element der großen

Halbkugelfläche, ſo damit bedeckt iſt, einerley Lage haben. Alsdenn aber kann nach CS nicht mehr Licht zurück ſtrahlen, als in dem Fall, wenn man die Grundfläche BDE mit kleinen Halbkugeln bedeckt annimmt. Denn nur die bey A liegende Halbkugel, deren Grundfläche mit BDE parallel iſt, fängt nun einen Theil des auffallenden Lichts auf, der ſich zur ganzen auffallenden Lichtmenge verhält, wie die Grundfläche der kleinen Halbkugel in A zur Fläche BDE. Von allen übrigen kleinen Halbkugeln fängt jede deſto weniger Licht auf, je weiter ſie von A entfernt iſt, und jede von den im Umfang des Kreiſes BDE befindlichen Halbkugeln, kann nur halb ſo viel Licht auffangen, als die bey A befindliche auffängt. Stellt man ſich die Sache ſo nicht vor, ſo würde man auf die Folge gerathen, daß die unpolirte Halbkugel BAE, falls ſie mit ſehr kleinen vollkommen polirten Halbkugeln bedeckt wäre, mehr Licht zurück werfe, als darauf gefallen ſey.

264. §.

Wenn die Figur der Erhöhungen auf der unpolirten Fläche nicht ſphäriſch iſt, auch eben dieſe Erhöhungen vielleicht einander alle unähnlich ſind, ſo könnte doch wohl die Stelle jeder Erhöhung, welche das auffallende Licht ſenkrecht auffängt, eben ſo gekrümmt ſeyn, als wenn das an dieſer Stelle befindliche Element der Erhöhung zugleich ein Element einer ſehr kleinen Kugel wäre. Alsdenn lieſſe ſich die Sache ſo betrachten, als wenn zwar bey jeder Lage der auffallenden Lichtſtrahlen eine gewiſſe Menge unendlich kleiner Halbkugeln von gegebener Gröſſe das Licht auffienge, ihre Anzahl aber,

aber, ſo wie auch einer jeden Halbmeſſer bey geänderter Lage des auffallenden Lichts ebenfalls Aenderungen leide. Auf die unpolirte Ebene AB falle das Licht in der Richtung SC, und 94 F.
zwar auf alle Elemente der Ebene AB mit SC parallel: ſo wird nun die Beantwortung der Frage, wie groß der in der Richtung CD zurück ſtrahlende Theil ſey auf folgende Betrachtung ankommen. Man halbire den Winkel SCD mit der graden Linie CE, und lege durch C eine Ebene FG auf CE ſenkrecht; ſo müſſen von der ganzen Menge aller kleinen Erhöhungen diejenigen, welche ein mit FG paralleles Element haben, das Licht in der Richtung CD zurück werfen, und die Zurückwerfung des Lichts von dieſen Elementen erfolgt eben ſo, als wenn alle dieſe Erhöhungen ſphäriſch wären. In dem lezten Fall aber würde die Ausbreitung des zurück geworfenen Lichts eben ſo erfolgen, als wenn eine Halbkugel das Licht zurück ſchickte: deren Grundfläche der Summe der Grundflächen jener ſphäriſchen Elemente, die als ſo viele kleine Halbkugeln oder ſphäriſche Spiegel betrachtet werden könnten, gleich wäre. (262. §.) Wenn gleich übrigens dieſe Halbkugeln wegen Verſchiedenheit der Krümmung jener Elemente der Erhöhungen auf der unpolirten Fläche an der Seite, wo ſie das Licht auffangen nicht gleiche Halbmeſſer hätten; ſo würde doch die Menge des zurück geſchickten Lichts einerley bleiben, wenn man ſie auch alle gleich groß annähme, und ihrer ſo viele, daß die Summe aller Grundflächen ſo groß wie vorhin bliebe.

265. §.

Um nicht ohne Noth weitläuftig zu ſeyn, will ich annehmen, die Ebene der zurückſtrahlung SCD ſey auf der zurückwerfenden unpolirten Ebene ſenkrecht, ſo ſtellet AB beyder Ebenen Durchſchnittslinie vor. Fiele nun SC mit EC zuſammen, ſo würde alles Licht nach CE zurück geworfen werden, was die mit FG parallel liegenden Seiten aller Erhöhungen auf der unpolirten Fläche auffangen: und ſtatt derſelben kann man annehmen, es fange eine gewiſſe Anzahl gleich großer unendlich kleiner ſphäriſcher Elemente, daß in der Richtung EC oder auch SC einfallende Licht auf. Fiele dagegen das Licht in der Richtung LC gegen AB ſenkrecht auf, ſo würde alles Licht nach CL zurück ſtrahlen, was die mit AB parallel liegenden Seiten der kleinen Erhöhungen auf der unpolirten Fläche auffangen. Vermöge der ſchon angeführten Gründe kann man für jede Lage FG eine gewiſſe Anzahl gleich großer ſphäriſcher Spiegel über AB annehmen, die das auffallende Licht eben ſo nach allen Seiten ausbreiten würden, wie es die mit FG parallelen Seiten der Erhöhungen auf AB würklich nach allen Seiten ausſenden.

Die Zahl der mit der Lage AB zuſammen gehörigen Spiegel verhalte ſich zur Zahl derjenigen, die mit der Lage FG zuſammen gehören, wie $\mu : \nu$, und es ſey der Winkel LCE $=$ ACF $=$ I. In dem Fall des ſenkrecht auffallenden Lichts ſey die ſenkrecht nach CL zurück ſtrahlende Lichtmenge $=$ M: in dem Fall des unter dem Winkel BCE $= \eta =$ $90° - \vartheta$ ſchief auffallenden Lichts aber ſey die nach

CE

CE zurück ſtrahlende $= m$; ſo iſt $M : m = \mu : \nu$. Kann man alſo das Verhältniß $M : m$ finden, ſo hat man auch $\mu : \nu$.

266. §.

Das eben erwehnte Verhältniß $M : m$ oder $\mu : \nu$ iſt vielleicht bey einerley Neigung der auffallenden Strahlen für verſchiedene unpolirte zurück werfende Maſſen verſchieden; und wenn das wäre, ſo müſte man dies Verhältniß für jede beſondre Art der zurück werfenden Maſſen durch Verſuche beſonders ſuchen, die man nach Anleitung des H. Bouguer auf folgende Art anſtellen kann.

Eine mattgeſchliffene Ebene AB ſey anfangs ſo 95F.
geſtellt, daß eine Kerze oder Lampe L darauf ſenkrecht ſcheint: neben der vorigen befinde ſich eine andre mit der vorigen in allen Stücken gleichartige ähnliche auch eben ſo große Fläche AG in gleicher Entfernung von der Kerze L, worauf die von L ausgehenden Lichtſtrahlen ebenfalls wenigſtens beynahe ins geſammt ſenkrecht fallen, wenn die Abmeſſungen AB, AG, beyder Ebenen, welchen man am bequemſten die Figur eines Quadrats geben kann, in Vergleichung mit AL nur klein ſind. Die Kerze oder Lampe L kann man auf einen kleinen Träger MN ſo ſtellen, daß zwar beyde Flächen zugleich aus der Stelle O geſehen werden können, das von L gegen das Auge zu ausgehende Licht aber durch dazwiſchen geſetzte undurchſichtige Schirmen aufgefangen, und vom Auge O zurück gehalten werde. In den angenommenen Stellungen AB und AG werden beyde Ebenen dem Auge gleich hell ſcheinen. Beyde Flächen werfen nemlich gleich viel Licht ins

Auge,

Auge, ihre Bilder *ad* und *aδ* hinten im Auge auf der Netzhaut ſind gleich groß, mithin gleich ſtark erleuchtet, alſo iſt auch der ſcheinbare Glanz beyder Flächen von gleicher Stärke. (240. 241. §.) Man neige nun die Ebene AB gegen die Lichtſtrahlen unter einem willkührlichen Winkel $\beta EL = \eta$, ſo wird die ſcheinbare Klarheit dieſer Fläche in der Lage $A\beta$ kleiner befunden werden, als ſie in der Lage AB war: wenn alsdenn auch AG, ohne die ſenkrechte Lage dieſer Ebene gegen das auffallende Licht zu ändern, weiter von L entfernt wird, ſo wird die ſcheinbare Klarheit von AG ebenfalls abnehmen, und man wird durch wiederhohltes Verſuchen AG ſo weit von L entfernen können, daß wiederum beyde Ebenen einen gleichen ſcheinbaren Glanz erhalten. Geſetzt dies erfolge, wenn ſich AG in CD befindet; ſo hat die Erleuchtung der Fläche AG in dem Verhältniß $LF^2 : LE^2$ abgenommen. Weil nun die Klarheit der Fläche ihrer Erleuchtung proportional iſt, (259. §.) ſo erhellet, daß ihre Klarheit in der Stelle CD $= \frac{LE^2}{LF^2} \cdot \Sigma$ ſey, wenn ſie in der Stelle AG $= \Sigma$ war. Dies Σ iſt für die erleuchtete mit fremden Licht ſtrahlende Fläche eben das, was S in den oben gebrauchten Formuln bey für ſich glänzenden Flächen war: alſo verhält ſich die ſcheinbare Klarheit, wie ihre wahre Klarheit, die hier Σ heiſt, (241. §.) und vermöge des Verſuchs iſt die ſcheinbare Klarheit der geneigten Fläche $A\beta$ ſo groß, als die ſcheinbare Klarheit der andern Fläche in der Stelle CD, mithin iſt auch die wahre Klarheit der gegen das auffallende Licht

geneigten

geneigten Fläche $A\beta = \frac{LE^2}{LF^2} \cdot \Sigma$, wenn ihre Klarheit in der Lage $AB = \Sigma$ war.

Man ſetze nun die auf AB in der geneigten Lage $A\beta$ fallende Erleuchtung $= I$, ſo iſt die Erleuchtung, welche auf die dem Auge ſenkrecht entgegen geſetzte Fläche in CD fällt, ebenfalls $= I$, und diejenige, welche auf eben dieſe Fläche in der Stelle AG fällt, $= \frac{LF^2}{LE^2} \cdot I$. Die Erleuchtung der Bilder *ab* und *ad* auf der Netzhaut im Auge verhalten ſich wie dieſe Erleuchtungen $I : \frac{LF^2 \cdot I}{LE^2}$; wenn alſo *m* und M die Strahlenmengen bezeichnen, welche die geneigte Ebene $A\beta$ und die ſenkrechte AG ins Auge ſchicken, ſo iſt $m : M = I \cdot ab : \frac{LF^2 \cdot I}{LE^2} \cdot ad$, oder $M : m = \frac{LF^2}{LE^2} : \frac{ab}{ad}$. Ueberdem iſt $ad : AG = Oa^2 : OA^2 = ab : AH$, und $AG = AB$, $AH = AB \sin\eta$, alſo $\frac{ab}{ad} = \sin\eta$, und man erhält $M : m = \frac{1}{LE^2} : \frac{\sin\eta}{LF^2}$, mithin der Hypotheſe des Herrn Bouguer (263. §.) gemäß auch $\mu : \nu = \frac{1}{LE^2} : \frac{\sin\eta}{LF^2}$.

267. §.

Dieſen Schlüſſen gemäß ſtellte H. Bouguer folgende Verſuche an. Zwey ſehr ſauber mattgeſchliffene

ſchliffene Silberplatten AB, AG, waren anfangs vom Licht L um 60 Zoll entfernt, für die geneigten Lagen Aβ aber würden folgende Entfernungen LF gefunden.

Neigungswinkel βEL	Entfernung LF
90°	60″
75°	67″
60°	75″
45°	89″
30°	$105\frac{3}{4}$
15°	131

Mit weiſſen Gyps von beſondrer Güte, und feinen holländiſchen Papier wurden ähnliche Verſuche wiederhohlt, und für den Gyps gaben ſie folgendes.

Neigungswinkel βEL	Entfernung LF
90°	24″
75°	27″
60°	30″
45°	33″
30°	$40\frac{1}{2}$″
15°	$54\frac{1}{2}$″

Für das holländiſche Papier ſind die Maaßen der Entfernungen LF nicht mitgetheilt worden, die H. Bouguer bey ſeinen Verſuchen als ſolche befunden hat, welche mit den verſchiedenen Neigungswinkeln βEL zuſammen gehören. Die Reſultate der Rechnung aus ſeinen Verſuchen aber hat er in folgenden beyden Tafeln mitgetheilt.

Nei-

Neigungs-winkel βEL	Klarheit der Fläche der Silberplatte	des Gypſes	des holl. Papiers
90°	1000	1000	1000
75°	802	762	971
60°	640	640	743
45°	455	529	507
30°	319	352	332
15°	209	194	203

Dieſe Zahlen durch 1000 dividirt ſind nichts anders als die Quotienten $\frac{LE^2}{LF^2}$ für die daneben ſtehenden Neigungswinkel: und wenn jede derſelben mit dem Sinus des dazu gehörigen Neigungswinkels multiplicirt wird, ſo ſind die Producte in dem Verhältniß der wieder zurück gehenden Strahlenmengen, mithin nach des H. Bouguer Hypotheſe in dem Verhältniß der Menge der unendlich kleinen Spiegel, welche das Licht bey jeder Neigung η ſenkrecht trift, die alſo ſelbſt gegen die erleuchtete Ebene unter dem Winkel $90° - \eta = \vartheta$ geneigt ſind.

Neigung der kleinen Spiegel gegen die Fläche	Anzahl der kleinen Spiegel beym Silber	Gyps	holländ. Papier
0°	1000	1000	1000
15°	777	736	937
30°	554	554	545
45°	333	374	358
60°	161	176	166
75°	53	50	52

Der

Der Erfolg dieſer Verſuche iſt von demjenigen beträchtlich verſchieden, welcher der bisher vorgetragenen Theorie gemäß wäre zu erwarten geweſen. Wofern ſowohl die wahre als auch die ſcheinbare Klarheit der ſchieferleuchteten Fläche $A\beta$ ihrer Erleuchtung proportional iſt, ſo müſte ſie $= \Sigma \sin \eta$ ſeyn, wenn ſie in der ſenkrechten Lage $AB = \Sigma$ war. Eben dieſe Klarheit in der ſchiefen Lage war vermöge des Verſuchs $= \frac{LE^2}{LF^2} \cdot \Sigma$, alſo muſte allemahl $\frac{LE^2}{LF^2} = \sin \eta$ gefunden werden. Allein nur die einzige Zahl 971 in dem Fall, da das holländiſche Papier unter dem Winkel von 75° geneigt geweſen, kommt den $\sin . 75° = 966$ nahe, und iſt würklich etwas gröſſer: in allen andern Fällen ſind die Zahlen $\frac{LE^2}{LF^2}$ kleiner, als der dazu gehörige $\sin \eta$, und nehmen ſchneller ab. Ich begnüge mich hier damit, dieſe Abweichung von der bisherigen Theorie bemerkt zu haben, und werde mich nun bemühen, dem H. Bouguer in ſeinen Schlüſſen weiter zu folgen.

268. §.

Es ſey AB der Durchmeſſer einer unpolirten kreisförmigen Fläche; und die Ebene des Halbkreiſes AHB darauf ſenkrecht. In dieſer Ebene ſey CE unter einem Winkel BCE $= \eta$ gegen die
94F. Fläche AB gezogen, auf derſelben aber ein Stück CM nach dem Geſetz abgeſchnitten, daß allemahl das Verhältniß CH : CM für den Winkel

BCM

BCM $=\eta$, oder HCM $=\vartheta$ dasjenige ſey, was im 264 §. M : m, oder $\mu : \nu$ war; ſo liegen alle Puncte M in einer krummen Linie CMH, welche Herr Bouguer die Scale der Ungleichheiten, (Numeratrice des Aſperités) für die unpolirte Ebene AB nennt. Das Licht falle nun in der Richtung SC auf die Ebene AB, und das Auge O ſtehe in CD; ſo können nur diejenigen kleinen Spiegel Licht ins Auge werfen, die mit FG parallel ſind, wenn man FG auf diejenige Linie CE ſenkrecht ſetzt, die den Winkel SCO halbirt. Ueberdem kann nur ſoviel Licht ins Auge kommen, als dieſe kleinen Spiegel ihrer Lage nach auffangen, und die Menge Lichts, welche jeder derſelben auffängt, verhält ſich wie der Sinus des Einfallswinkels FCS = GCD. Man laſſe MR auf CD ſenkrecht fallen, und verlängere MR bis zum Durchſchnitt mit CH in P; ſo iſt CMR $= 90° -$ RCM = GCR = FCS, alſo

CR = CM ſin FCS. Wie nun $\frac{CM}{CH}$ der Anzahl

aller mit FG parallelen Spiegel proportional iſt;

ſo erhellet, daß $\frac{CM \sin FCS}{CH}, = \frac{CM \sin CMR}{CH},$

oder $\frac{CR}{CH}$ der ins Auge nach der Richtung CD

ſcheinenden Lichtmenge proportional ſeyn werde. Aber das Bild der Fläche AB auf der Netzhaut im Auge verhält ſich wie der Sinus des Winkels BCD, und die ſcheinbare Klarheit iſt bey einerley Lichtmenge der Gröſſe dieſes Bildes umgekehrt proportional. Demnach verhält ſich die ſcheinbare Klar-

heit wie $\frac{CR}{CH \sin BCD} = \frac{CR \operatorname{coſec} BCD}{CH}$, oder wie $\frac{CP}{CH}$.

269. §.

So ſucht Hr. Bouguer durch Zeichnung ein Paar Linien, CR, CP, die für den gegebenen Einfallswinkel des auf die Fläche AB ſcheinenden Lichts, und den gegebenen Winkel BCD unter welchen die Fläche AB geſehen wird, der ins Auge kommenden Strahlenmenge, und der ſcheinbaren Klarheit proportional ſeyn ſollen: (Traité d'optique Liv. II. Sect. III. Art. V. pag. 175. 176.) ich wundere mich aber, daß eben dies Verfahren nicht ihm ſelbſt ſeine ganze Hypotheſe verdächtig gemacht hat. Es folgt nemlich daraus der wider alle Erfahrung ſtreitende Satz, daß bey jedem Einfallswinkel des auf die Fläche ſcheinenden Lichts, wenn anders derſelbe nicht ſelbſt = 0 oder = 180° genommen wird, die ſcheinbare Klarheit jeder unpolirten Fläche deſto gröſſer ſeyn müſſe, je kleiner der Geſichtswinkel iſt, unter welchem die Fläche AB geſehen wird, wie denn die ſcheinbare Klarheit unendlich groß werden müſte, wenn dieſer Winkel verſchwindet. Es ſey $ACS = \alpha$, $BCD = \beta$, ſo iſt $\alpha + \beta + SCD = 180°$, und $FCS + GCD + SCD$ oder $2FCS + SCD = 180°$, mithin $\alpha + \beta = 2FCS$, oder $FCS = GCD = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = CMR$: demnach verhielte ſich die nach CD ſcheinende Strahlenmenge wie $CM \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, und die ſcheinbare Klarheit wie $\frac{CM \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin \beta}$.

Dieſer

Dieſer Ausdruck wird allemahl unendlich groß, wenn β verſchwindet, wofern nur $\alpha > 0$ und kleiner als $180°$ iſt. Es iſt nemlich $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = FCS = \alpha - \vartheta$, alſo $\vartheta = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, und $\eta = 90° - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Demnach verſchwindet η nie mit β zugleich, wofern nicht zugleich $\alpha = 180°$ iſt, mithin verſchwindet auch CM nicht, und

$$\frac{CM \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin \beta}$$ wird allemahl unendlich groß,

wenn β verſchwindet. Ich will indeſſen dem Hn. Bouguer noch einen Schritt weiter folgen.

270. §.

Um den Punct C zeichne man noch eine andre krumme Linie CNK, ſo daß die unbeſtimmten Entfernungen CN ſich wie die Quadratwurzeln von CM verhalten. Wenn alsdenn $CH = a$, $CK = r$, $CM = z$, $CN = u$ geſetzt wird, ſo hat man $\sqrt{a} : \sqrt{z} = r : u$, oder $a : z = r^2 : u^2$, mithin $u = \frac{r\sqrt{z}}{\sqrt{a}}$. Der Winkel $BCE = \eta$ wachſe um das Element Ece, und mit dem Halbmeſſer $Cn = u + du$ ſey der Kreisbogen $n\nu$ beſchrieben, durch E und ν aber $E\varepsilon$ und $\nu\mu$ mit AB parallel gezogen, und hiernächſt nP, νp, eQ, Eq auf AB ſenkrecht geſetzt; alsdenn ſtelle man ſich vor, die Figur werde um die Axe CK gedrehet: ſo beſchreibt $n\nu$ eine Zone von einer Kugelfläche, wozu der Halbmeſſer Cn oder CN gehört, Pp aber ein Ring, als ein Element der Fläche AB, die Zone $n\nu$ verhält ſich wie u^2, alſo wie z oder CM, mithin wie die Anzahl der kleinen Spiegel auf der Fläche AB, die mit FG parallel 96 F.

oder gegen AB unter dem Winkel ACF $= \vartheta = 90° - \eta$ geneigt ſind, mithin wie die unter dem Winkel BCE $= \eta$ zurückgehenden Lichtmengen, wenn das Licht unter eben dem Winkel auffällt. Die Höhe dieſer Zone iſt μn, und ihre Fläche $= 2\pi CN . \mu n$. (622 §.G.) Ferner iſt $e\varepsilon : \mu n = Ee : n\nu = CE : Cn$ oder $e\varepsilon : \mu n = CE : CN$, weil CN von Cn nur um ein differential verſchieden iſt, und man hat $e\varepsilon = d . a \sin\eta = a . d \sin\eta$, alſo $d \sin\eta : \mu n = 1 : u$, und $\mu n = u . d \sin\eta = \frac{r d \sin\eta \sqrt{z}}{\sqrt{a}}$. Demnach iſt die Fläche der Zone $n\nu = 2\pi . u^2 d \sin\eta$, oder eben dieſe Fläche $= \frac{2\pi r^2 z}{a} . d \sin\eta$.

Der Ring Pp iſt eine Projection dieſer Zone auf die Fläche AB, und wenn man CP $= y$ ſetzt, ſo iſt der Kreis, wozu dieſer Halbmeſſer gehört $= \pi y^2$, alſo der Ring Pp $= 2\pi y dy$. Ferner iſt $y = u \cos\eta$, $dy = Pp = n\nu . \sin\eta = u d\eta \sin\eta$, alſo der Ring Pp $= 2\pi u^2 \sin\eta\, dy \cos\eta = 2\pi u^2 \sin\eta . d \sin\eta = \frac{2\pi r^2 z \sin\eta}{a} d \sin\eta$, oder dieſer Ring iſt = der Zone $n\nu$ in den $\sin\eta$ multiplicirt. Das Integral hievon ſo genommen, daß es verſchwindet, wenn $\eta = 90°$ iſt, giebt die Fläche des Kreiſes vom Halbmeſſer CP, und wenn nach der Integration $\eta = 0$ geſetzt wird, ſo giebt eben das Integral die Kreisfläche AB $= \pi a^2$. Wird alſo $\sin\eta = s$ geſetzt, ſo erhält man $2r^2 \int zsds = a^3$, alſo auch $r^2 = \frac{a^3}{2\int zsds}$. Es wird vorausgeſetzt, daß eine Glei-

chung

chung zwiſchen η oder s und z gegeben ſey, damit man integriren, und auf ſolche Art r finden könne, da dann r in der Gleichung $u^2 = \frac{r^2 z}{a}$ gegeben iſt, und man hat für die zweyte Scale der Ungleichheiten (la ſeconde Numeratrice des Aſperités) auch eine Gleichung zwiſchen u und η, wenn man z durch η ausdrückt.

Wofern ich das alles recht verſtehe, was Herr Bouguer mit dieſen Schlüſſen ſagen will, ſo iſt ſeine Meinung eigentlich dieſe. Weil nicht allein die Zone nv, (die H. Bouguer nur nennt) ſondern auch die ganze Kugelfläche, wozu die Zone nv gehört, ſich wie u^2, oder CM, d. i. wie die Anzahl aller der kleinen ſphäriſchen Spiegel verhält, die das Licht nach CM eben ſo zurück werfen würden, wie die auf dieſer Richtung ſenkrechten Seiten der Ungleichheiten auf der unpolirten Fläche AB; ſo ſchickt eine Kugelfläche vom Halbmeſſer CN das Licht in eben der Menge nach allen Seiten zurück, in der es die Fläche AB nach der Richtung CN zurück ſchickt. Denn auf ſolche Art ſehe ich nur, wie Hr. Bouguer a. a. O. Liv. II. Sect. IV. Art. I. am Ende pag. 205 weiter ſchlieſſen kann: es ſey die Dichtigkeit des von der Fläche AB nach der Richtung CN reflectirten, und in der Entfernung = D ſenkrecht aufgefangenen Lichts $= \frac{\frac{1}{4}\,CN^2}{D^2} = \frac{\frac{1}{4}\,u^2}{D^2}$, und in der ſenkrechten Richtung nach CL $= \frac{\frac{1}{4}\,r^2}{D^2}$, wenn die Dichtigkeit des auffallenden Lichts = 1 iſt. Man vergleiche hiemit auch oben den 264. §.

271. §.

Die Reſultate der im 267 §. beſchriebenen Verſuche haben dem Herrn Boguer die data geliefert, um für mattgeſchliffen Silber, Gyps und holländiſch Papier das Integral $\int zsds$ durch eine Näherungs-Methode und hiernächſt $r^2 = \frac{a^3}{2\int zsds}$ zu finden. Er meint gefunden zu haben, daß die Scale der Ungleichheiten für mattgeſchliffenes Silber ziemlich nahe mit zweenen Kreisbogen CMH, CZH, von 114° übereinkomme, wenn CH ihre gemeinſchaftliche Sehne iſt. Dies vor-
94F. ausgeſetzt ſey CT eine Tangente des Bogens CZH und HV darauf ſenkrecht; ſo iſt der Winkel TCH = 57°, alſo CV = a . coſ. 57°, CA = a geſetzt, und H. Bouguer findet $r^2 = \frac{3a}{2(a - CV)} \cdot a^2$, oder $r = \frac{3a^2}{2(1 - \cos 57°)} = \frac{3a^2}{2 \int v . 57°} = \frac{1,5 . a^2}{0,455361} = 3,294090 . a^2$, und $r = 1,815 . a$.

Für Gyps und holländiſch Papier hat er keine aus der Geometrie bekannte Linie gefunden, die er ſeinen Verſuchen gemäß für die Scale der Ungleichheiten hätte annehmen können: indeſſen findet er (a. a. O. Art. II. pag. 205. ſqq.) vermittelſt anderer Näherungsmethoden

für Gyps $r^2 = 2,4875 . a^2$

für holl. Papier $r^2 = 2,1765 . a^2$.

Wenn nun eine Scheibe Gyps 1 Zoll im Durchmeſſer

meſſer das auffallende Licht, deſſen Dichtigkeit = 1 iſt, 3 Zoll weit ſenkrecht zurück wirft, ſo giebt des H. Bouguer Regel $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot 2{,}4875 = 0{,}0172743$ ohngefehr $= \frac{1}{58}$. Bey der Vorausſetzung daß alle Ungleichheiten die Figur von Halbkugeln hätten würde man die Zahl $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{144}$ finden. Hätten übrigens die Ungleichheiten der rauhen Fläche die Natur vollkommen polirter Spiegel; ſo würde $\frac{57}{58}$ des auffallenden Lichts nach allen Seiten zerſtreuet werden. Vermittelſt eines Verſuchs den H. Bouguer a. a. O. Liv. I. Sect. II. Art. V. pag. 66 - 68 beſchreibt, hat derſelbe gefunden, daß eine ſolche Scheibe aus ſehr weiſſen Gyps nicht mehr als ohngefehr $\frac{1}{149}$ oder $\frac{1}{150}$ des auffallenden Lichts ſenkrecht zurück werfe: alſo kann man nicht annehmen, daß jene Ungleichheiten vollkommen polirte Spiegel ſind. Von 10000 auffallenden Strahlen ſollten 172 zurück gehen, (H. Bouguer hat die Zahl 167) es ſtrahlen aber nur 67 zurück, welches ohngefehr $\frac{2}{5}$ von jener Anzahl ausmacht, alſo gehen $\frac{3}{5}$ verlohren.

272. §.

Die Vorausſetzung im 263 §. worauf ſich dieſe ganze Theorie des H. Bouguer gründet, iſt in mehr als einer Abſicht ſo ſehr willkührlich, daß ſie ohngeachtet des Scharfſinns, welche ihr Urheber dabey bewieſen hat, unmöglich auch nur als eine erträgliche Hypotheſe ſelbſt in den beſondern Fällen gelten kann, wobey ſie H. Bouguer angewandt hat. Die kleinen Ungleichheiten der unpolirten Flächen könnten wohl die Geſtalt eckigter Körper haben, und von ebenen Seitenflächen eingeſchloſ-

ſen ſeyn, welche das Licht wie ebene Spiegel zu⸗ rück werfen, und ſo könnte doch, wenn gleich alles übrige richtig bliebe, die Regel am Ende des 270 §. nicht beſtehen. Es ſey aber die Figur der klei⸗ nen Ungleichheiten beſchaffen, wie ſie wolle, ſo fra⸗ ge ich: woher weis man, daß ſie das auffallende Licht ſpiegelartig zurück werfen? Allemahl wird dieſe Hypotheſe auf den im 269. §. ſchon bemerkten wider alle Erfahrung ſtreitenden Satz leiten, daß die ſcheinbare Klarheit einer unpolirten von fremden Licht erleuchtete Fläche über alle Gränzen wachſen müſſe, wenn der Sehewinkel, unter welchen ſie be⸗ trachtet wird, über alle Gränzen abnimmt. Die⸗ ſemnach iſt es wohl weit natürlicher, daß man mit H. Lambert annehme:

> von jedem erleuchteten Element der un⸗ polirten Fläche breite ſich das Licht nach allen Seiten in graden Linien eben ſo aus, wie es ſich von jedem Ele⸗ ment einer für ſich glänzenden Fläche nach allen Seiten ausbreitet. (259. §.)

Deſſen zu geſchweigen, daß die ganze Vorſtellung von der Art, wie unpolirte Flächen das Licht zu⸗ rück ſenden, welche oben im XVIII. Abſchnitt iſt vorgetragen worden, der Newtonſchen ſonſt faſt allgemein beliebten Theorie von den Farben der Körper weit gemäſſer iſt, als die hier vorgetragene Bouguerſche Theorie, ſo empfielt ſie ſich auch ſchon dadurch, daß ſolchergeſtalt die Theorie von Aus⸗ meſſung der Stärke des Lichts, das erleuchtete mit entlehnten Glanz ſtrahlende Flächen ausſenden, auf eben dieſelben Grundſätze zurück geführet wird, auf welchen die Theorie von Ausmeſſung der Stärke

des⸗

desjenigen Lichts beruhet, das für ſich glänzende Flächen nach allen Seiten ausſenden. Was es übrigens auch mit den im 267 §. erzählten Verſuchen für eine Bewandniß haben mag, die der Regel des 260 §. nicht günſtig ſind; ſo iſt dennoch der am zuletzt angeführten Ort erzählte vom Herrn Lambert angeſtellte Verſuch dieſer Regel deſto günſtiger. Das Verfahren bey dieſem Verſuch iſt überdem ſo beſchaffen, daß es nicht ſo leicht Fehler vermuthen läßt, als das Verfahren bey den Bouguerſchen Verſuchen. Auch meine ich, daß die ſehr gemeine Erfahrung, welche ſelbſt H. Bouguer bey anderer Gelegenheit anführt, die Sache auſſer Zweifel ſetze, vermöge welcher eine weiſſe vom Sonnenlicht gleichförmig erleuchtete Wand, überall einerley Klarheit zu haben ſcheint, man mag ſie anſehen, unter welchem Geſichtswinkel man will. Man kann es mit andern gefärbten Flächen von der am Ende des 260 §. beſchriebenen Beſchaffenheit ebenfalls verſuchen, und man wird allemahl denſelben Erfolg wahrnehmen.

Der XX. Abſchnitt.

Von der Klarheit für ſich dunkler Körper die mit entlehntem Licht glänzen.

273. §.

Bey der fernern Unterſuchung über die Klarheit für ſich dunkler Körper, die mit entlehnten

Licht glänzen, kommen vorzüglich zuerſt diejenigen in Erwägung, welchen wir die weiſſe Farbe zuſchreiben; und hiebey muß man ſich an die oben im 137 u. f. §. §. beſchriebenen Verſuche über die Spaltung der Sonnenſtrahlen vermittelſt des Prisma erinnern. Das Sonnenlicht iſt bey reiner Luft weis, es iſt aus ungleichartigen einfachern Licht, das einzeln die Empfindung der übrigen Farben verurſacht, zuſammengeſetzt, und die weiſſe Farbe eine Vermiſchung aller Grundfarben im gehörigen Verhältniß. Fängt man das gefärbte nach der Zerſtreuung im Prisma aus einander fahrende Sonnenlicht mit einer Sammlungslinſe auf, damit ſich alle Strahlen in ihrem Brennraum wieder vereinigen, ſo iſt die weiſſe Farbe wieder hergeſtellt. Ein dunkler Körper iſt alſo weis, wenn er die auf ihn fallenden Strahlen von allen Grundfarben in dem rechten Verhältniß nach allen Seiten wieder ausſendet. Wie nun die Weiſſe des Lichts ebenfalls das rechte Verhältniß der Miſchung der einfachen gleichartigen Strahlen aller Grundfarben erfordert; ſo kann weiſſes Licht auf den Körper fallen, und der leztere doch eine andre Farbe zeigen, wenn er Strahlen der einen Grundfarbe vorzüglich, die übrigen gar nicht, oder in zu geringer Menge nach allen Seiten ausſendet.

274. §.

Wenn von der Weiſſe eines für ſich dunklen Körpers die Rede iſt, ſo kann ein Körper dieſer Art weiſſer als der andre ſeyn. Hier ſoll einem ſolchen Körper eine abſolute oder vollkommene Weiſſe zugeſchrieben werden, der in jedem Fall

alles

alles auf ihn fallende Licht nach allen Seiten zurück ſchickt, mithin auch in dem Fall, wenn würklich weiſſes Licht auf ihn fällt, alles wieder zurück ſendet, und nach allen Seiten zerſtreuet, ohne das geringſte davon zu verſchlucken. Ob es dergleichen Körper in der Natur gäbe, denen man eine abſolute Weiſſe zuſchreiben kann, iſt hier gleichgültig, wenigſtens kann man ſuchen, die Weiſſe der natürlichen Körper mit einer vollkommenen Weiſſe zu vergleichen.

275. §.

Vermöge der feſtgeſetzten Erklärung wird ein weiſſer Körper nur alsdenn weiß ausſehen, wenn würklich weiſſes Licht auf ihn fällt. Wird er dagegen von rothen, grünen, blauen Licht u. ſ. f. erleuchtet, ſo wird er ſelbſt mit dem auffallenden Licht einerley Farbe haben, denn er ſendet alles auffallende Licht nach allen Seiten zurück. Unvollkommen weiſſe Körper ſind diejenigen, die nicht alles auffallende Licht nach allen Seiten wieder zurück ſenden; ſo wie die gefärbten Körper nur Strahlen einer oder einiger Grundfarben vorzüglich von dem übrigen auffallenden Licht entweder gar nichts, oder eine geringere Menge, als auffiel, wieder ausſenden.

276. §.

Es ſey das Verhältniß der Menge des nach allen Seiten zurück ſtrahlenden Lichts zur Menge des auf eine unendlich kleine Ebene, wie L*l*, (7. Fig.) auffallenden, $= A : 1$; ſo iſt bey unvollkommen weiſſen Flächen $A < 1$, in dem Fall der voll-

komme-

kommenen Weiſſe aber $A = 1$, und man kann die Zahl A als das Maaß der weiſſe der Fläche betrachten. Es iſt eben die Zahl, welche im 17 und 259 §. mit n bezeichnet war, und man hat $\sigma = A \times I$, wenn hier A ſtatt n geſchrieben wird, die Buchſtaben σ und I aber die Bedeutung behalten, welche ſie a. a. O. hatten. Die unendlich kleine
7Fig. Ebene wirft alſo durch jeden coniſchen Raum MLN die Lichtmenge $= \sigma \,.\, Ll \,.\, \sin \alpha^2$, wenn $ALM = \alpha$ iſt, mithin eine Lichtmenge $= \frac{\sigma \,.\, Ll}{\pi}$, wenn $\frac{OM^2}{LM^2} = \frac{1}{\pi}$, oder $\alpha = \text{Ang. sin} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ angenommen wird. Man ſetze $\frac{\sigma}{\pi} = \Sigma$, ſo iſt die Erleuchtung, welche Ll einer andern unendlich kleinen Ebene Pp zuſchickt, $= \frac{\Sigma \,.\, Ll \,.\, \sin CLP \,.\, \sin LPD}{LP^2}$, und die Zahl Σ kommt in den photometriſchen Grundformuln, wenn die leuchtende Fläche einen entlehnten Glanz hat, in völlig eben der Bedeutung vor, wie das S im 36. §. wenn die leuchtende Fläche einen eigenen Glanz hat. Es iſt nemlich $\Sigma = \frac{\sigma}{\pi} = \frac{A \times I}{\pi}$ nicht die ganze Lichtmenge, welche eine in allen Elementen eben ſo klare Fläche, wenn ſie $= 1^2$ wäre, nach allen Seiten umher ſtrahlen würde, ſondern ein Theil von ihr, der ſich zur ganzen erwehnten Lichtmenge, wie $1 : \pi$ verhält. Demnach iſt $\Sigma = \frac{A \times I}{\pi}$ das Maaß der

Klar=

Klarheit einer erleuchteten Fläche in eben dem Verſtande, wie $S = \frac{s}{\pi}$ im 35. §. für das Maaß des Glanzes einer für ſich leuchtenden Fläche angenommen ward.

277. §.

Wenn die für ſich leuchtende Fläche, wovon die unendlich kleine Ebene Ll ihr Licht empfängt, in allen ihren Elementen einerley Glanz S hat, ſo iſt I ein Product des Glanzes S in eine Zahl *m*, die nach den Regeln des III. bis VI. Abſchnitts gefunden werden kann. Demnach hat man zwiſchen Σ und S eine Gleichung $\Sigma = \frac{A \times I}{\pi}$, die dazu dient, die Klarheit der erleuchteten mit dem Glanz der leuchtenden Fläche zu vergleichen.

Wäre die erleuchtete Fläche Ll vollkommen weis; ſo hätte man $A = 1$, und wenn eben dieſe vollkommen weiſſe Fläche die abſolute Erleuchtung von einer andern Fläche empfängt, deren Glanz $= S$ iſt, ſo hat man $I = \pi \cdot S$; (53. §.) mithin erhält man $\Sigma = S$. Demnach iſt die Klarheit einer vollkommen weiſſen Fläche, wenn ſie die abſolute Erleuchtung empfängt, dem Glanz der Fläche gleich, die ihr das Licht zuſchickt.

278. §.

Es ſey AB eine nach allen Seiten ins unendliche ausgedehnte in allen Elementen gleich ſtark leuchtende Ebene, und eine andre für ſich dunkle 97 F.

Ebene DE, von welcher Gröſſe man will, ſey mit jener parallel: ſo empfängt jedes Element M oder N der leztern von der erſten die abſolute Erleuchtung, und DE hat durchgängig eine Klarheit, die eben ſo groß, als der Glanz der Ebene AB iſt. Wenn demnach FG ein gegebener Theil der leuchtenden Fläche AB iſt, ſo wirft derſelbe auf jedes Element M oder N der Fläche DE ſo viel Licht, als dies Element M oder N nach FG wieder zurück ſendet, (42 §.) weil es ſo viel iſt, als wenn beyde Flächen einen gleichen Glanz hätten. Iſt alſo auch MN ein gegebener Theil der erleuchteten Fläche DE, ſo wirft MN ſo viel Licht nach FG zurück, als MN von FG empfangen hat: (43. §.) mithin wirft auch DE ſelbſt ſo viel Licht nach FG zurück, als FG dahin geſchickt hatte.

Man ſiehet übrigens wohl, daß dieſe Schlüſſe ins geſammt ihre Anwendung finden, die Fläche AB mag weiſſes oder gefärbtes Licht auf DE ſenden, wenn nur DE vollkommen weis iſt. Allemahl wird DE die Farbe desjenigen Lichts zu haben ſcheinen, das AB nach DE ſchickt, und DE wird mit AB einerley Klarheit haben. Oder mit andern Worten, die rothe, grüne, blaue Farbe u. ſ. f. der erleuchteten Fläche DE wird mit der Farbe gleicher Art, welche die leuchtende Fläche AB hat, gleich lebhaft ſeyn.

279. §.

Falls die Ebene DE nicht vollkommen, oder gar nicht weis iſt, ſo wird ihre Klarheit aus mehr als einer Urſache geringer ſeyn, als der Glanz der leuchtenden Fläche AB. Denn einmahl verſchluckt

DE

DE einen Theil des auffallenden Lichts, der gar nicht wieder zurück geſchickt wird. Geſetzt alſo, das zurück gehende Licht wäre auch noch weiſſes Licht, wie es ſeyn würde, wenn das auffallende Licht weis wäre, und von allen Arten des gefärbten Lichts proportionale Theile verſchluckt würden: ſo wäre doch die Weiſſe der Fläche DE nicht ſo glänzend, als die Weiſſe der Fläche AB. Wäre dagegen DE gar nicht weis, ſondern gefärbt, als roth, grün, blau, gelb, wie man will; ſo wäre die zweyte Urſache der mindern Klarheit dieſe, weil nur die Strahlen von eben der Farbe entweder allein, oder doch vorzüglich von allen Elementen der Ebene DE wieder ausgehen würden, die übrigen aber ſo gut als verlohren oder verſchluckt zu betrachten wären.

280. §.

Auſſer den Grundfarben giebt es unzählich viele verſchiedene Zwiſchenfarben, die insgeſammt aus den Grundfarben durch ihre mancherley Vermiſchung entſtehen. Geſetzt nun, daß ein Körper eine ſolche vermiſchte Farbe habe, die z. E. aus dem rothen und gelben beſtehet, und daß auf denſelben weiſſes Licht falle: ſo wird nur das rothe und gelbe Licht allein, oder doch vorzüglicher, als das übrige, nach allen Seiten zurückgeſandt werden. Hiebey kann man als eine Vorausſetzung bis zur weitern Prüfung annehmen, daß bey einerley Beſchaffenheit des dunklen Körpers der das Licht auffängt, eben dieſelbe Art der Strahlen, und eben dieſelbe Menge in Verhältniß mit der auffallenden Menge eben der Art würde zurück geworfen werden, wenn auch

die gefärbten Strahlen, wie etwa die rothen und gelben, allein auffielen. Ueberhaupt alſo kann man das Geſetz annehmen:

Bey einerley Beſchaffenheit des erleuchteten Körpers behalte die Menge der zurückgeſandten Strahlen einer jeden Farbe zur Menge der einfallenden von eben der Farbe einerley Verhältniß. Fallen doppelt ſo viele rothe oder gelbe Strahlen auf, ſo werden doppelt ſo viele rothe oder gelbe Strahlen zurück geworfen.

281. §.

Dieſemnach laſſen ſich die verſchiedenen Grade der Weiſſe, der Röthe und jeder andern Farbe auf einerley Art in Rechnung bringen. Iſt ein Körper unvollkommen weis, ſo wirft er zwar nicht alles auf ihn fallende weiſſe Licht zurück: bey einerley Beſchaffenheit des Körpers aber bleibt doch das Verhältniß der Menge des zurück geworfenen Lichts von jeder Grundfarbe zur Menge des von eben der Grundfarbe auffallenden Lichts einerley, wenn ſich gleich die Menge des auffallenden Lichts ändert. Demnach ſchickt der weiſſe Körper allemahl weiſſes Licht zurück, wenn würklich weiſſes Licht auffällt: die Strahlen von verſchiedenen Grundfarben, welche zurück gehen, verhalten ſich ihrer Menge nach gegen einander eben ſo, wie ſich die Mengen der Strahlen von verſchiedenen Grundfarben des auffallenden Lichts gegen einander verhalten.

Es ſey demnach das Verhältniß der Menge des nach allen Seiten zurück geſchickten Lichts zur Menge des auffallenden = A : 1, ſo iſt bey unvoll-

vollkommen weiſſen Körpern $A < 1$, bey vollkommen weiſſen Körpern aber $A = 1$, und die Zahl A iſt das Maaß der Weiſſe des Körpers.

282. §.

Bey andern Grundfarben läſt ſich der Grad ihrer Lebhaftigkeit eben ſo in Rechnung bringen. Ein Körper iſt vollkommen roth wenn er alles auffallende rothe Licht zurück ſendet, im Gegentheil aber unvollkommen roth. Wenn ſich alſo die Menge des nach allen Seiten zurück geſchickten rothen Lichts zur Menge des auffallenden, wie $q : 1$ verhält; ſo iſt bey unvollkommen rothen Körpern $q < 1$, bey vollkommen rothen Körpern aber $q = 1$. Auf andre Grundfarben wird die Anwendung leicht eben ſo gemacht.

Weil man übrigens verſchiedene Grundfarben als ungleichartige anſehen muß, ſo laſſen ſich auch verſchiedene Grundfarben ihren Graden nach nicht mit einander vergleichen, wohl aber Grundfarben, die für ſich einerley ſind, und dabey nur einen verſchiedenen Grad der Lebhaftigkeit haben. Auch ſelbſt die Lebhaftigkeit einer vermiſchten Farbe läßt ſich mit der Lebhaftigkeit einer andern vermiſchten Farbe von eben der Art vergleichen. Es ſind nemlich vermiſchte Farben als gleichartig zu betrachten, wenn beyde aus einerley ungleichartigen Lichtſtrahlen von verſchiedener Grundfarbe in einerley Verhältniß zuſammengeſetzt ſind. Wird die Menge des ſo vermiſchten Lichts verändert, jedoch ſo, daß das Verhältniß der Strahlen, die zu verſcheidenen Grundfarben gehören einerley bleibt,

ſo wird zwar der Grad der Lebhaftigkeit, aber nicht die Art der Farbe verändert.

283. §.

98 F. Die kreisförmige Ebene *AB* empfängt in allen ihren Elementen wenigſtens beynahe einerley Erleuchtung von einem bey *L* befindlichen leuchtenden Körper, und ihre Weiſſe iſt $= A$: ferner iſt *PH* die Axe einer Sammlungslinſe, worauf *AB* das von *L* empfangene Licht wirft, und mit der Ebene *DE*, deren Weiſſe $= a$ iſt, wird das Bild *ab* der Ebene *AB* ſenkrecht aufgefangen: man ſucht die centrale Klarheit dieſes Bildes.

Aufl. Wenn AB von L die Erleuchtung $= I$ empfängt, ſo iſt die Klarheit dieſer Ebene $= \frac{A \times I}{\pi}$. (277. §.) Dieſe ſey $= \Sigma$, ſo kann AB als eine für ſich leuchtende Ebene betrachtet werden, deren Glanz $= \Sigma$ wäre. Ferner iſt die centrale Erleuchtung des Bildes $ab = \pi . k . \Sigma . \text{coſ}\, HPF^2 . \text{tang} . HpF^2$, (203. 217. §.) alſo wird die centrale Klarheit deſſelben $= a . k . \Sigma . \text{coſ}\, HPF^2 . \text{tang}\, HpF^2$. Wenn alſo ſtatt Σ der Werth $\frac{A \times I}{\pi}$ geſetzt wird, ſo giebt ſich die geſuchte centrale Klarheit des Bildes $= \frac{1}{\pi} . k . a . A . I . \text{coſ}\, HPF^2\ \text{tang}\, HpF^2$.

1) Wenn der Winkel HPF ſehr klein, mithin coſ HPF ſehr nahe $= 1$ iſt, ſo leidet coſ HPF ſehr

geringe

geringe Aenderungen, wenn HP geändert wird. Zugleich leidet auch der Abſtand des Bildes Hp nur geringe Aenderungen: mithin bleibt in eben dem Fall die centrale Klarheit des Bildes beynahe ungeändert, wenn gleich HP geändert wird.

2) Man ſetze, die Ebene DE werde bey Q von L ſenkrecht erleuchtet; ſo ändert ſich die Erleuchtung in Q gewöhnlich ſehr merklich, wenn die Entfernung QL geändert wird. Es ſey die Erleuchtung, welche Q von L empfängt $= i$, alſo die Klarheit der Stelle Q $= \frac{a \times i}{\pi}$; ſo erhellet, daß auch die Klarheit der Stelle Q merkliche Aenderungen leide, wenn LQ geändert wird. Demnach könnte es wohl eine ſolche Entfernung LQ geben, wobey die Klarheit in Q der Klarheit des Bildes in p gleich würde: alsdenn wäre $k \,.\, a \,.\, \mathrm{A} \,.\, \mathrm{I} \,.\, \mathrm{coſ\ HPF}^2 \ \mathrm{tang\ H}p\mathrm{F}^2 = a \times i$, und man erhält $\mathrm{A} = \frac{i \,.\, \mathrm{ſec\ HPF}^2}{k \,.\, \mathrm{I} \,.\, \mathrm{tg} \,.\, \mathrm{H}p\mathrm{F}^2}$, oder $\mathrm{A} = \frac{i \,.\, \mathrm{H}p^2 \,.\, \mathrm{ſec\ HPF}^2}{k \,.\, \mathrm{I} \,.\, \mathrm{HF}^2}$.

3) Wenn L eine leuchtende Kugel iſt, ſo hat man $i : \mathrm{I} = \mathrm{LP}^2 : \mathrm{LQ}^2$ (58 §.), mithin $\mathrm{A} = \frac{\mathrm{LP}^2 \,.\, \mathrm{H}p^2 \,.\, \mathrm{ſec\ HPF}^2}{k \,.\, \mathrm{LQ}^2 \,.\, \mathrm{HF}^2}$.

284. §.

Es ſey L die Spitze von der Flamme einer Kerze, deren Geſtalt mit der Geſtalt eines Kegels ziemlich nahe überein kommt, die Ebene AB ſey mit der Axe der coniſch brennenden Flamme parallel, und LP auf AB ſenkrecht; ſo iſt die ſcheinbare Geſtalt der Flamme aus P geſehen, ziemlich nahe ein

ſpäriſches Dreyeck. Betrachtet man alsdenn die Ebene AB als horizontalliegend, ſo iſt die Spitze L der Lichtflamme der Scheitelpunct, PL die Scheitellinie, und zwo Seiten des Kugeldreyecks laufen im Scheitel zuſammen, wie die Aufgabe des 67. §. vorausſetzt. Wenn nun die ſcheinbare Grundlinie dieſes Kugeldreyecks den Halbmeſſer der Kugel $= 1$ geſetzt, $= w$, eine der verticalſtehenden Seiten $= v$ geſetzt wird; ſo iſt die Erleuchtung in P, oder $I = \frac{1}{2} w \sin v$. Ferner ſey die Höhe der Lichtflamme $= a$, ihre gröſte Breite $= b$, ſo iſt $v = \frac{a}{LP}$, und wenn LP die Höhe der Lichtflamme nur mehr den viermahl übertrift, beynahe $\sin v = v = \frac{a}{LP}$, ſo wie $w = \frac{b}{LP}$, mithin beynahe $I = \frac{\frac{1}{2} a \cdot b}{LP^2}$.

Man ſiehet leicht, daß $\frac{\frac{1}{2} a \cdot b}{LP^2}$ die ſcheinbare Gröſſe der Lichtflamme aus P geſehen, in dem Verſtande, wie dieſer Ausdruck im 32. §. iſt erklärt worden. Wäre aus P mit dem Halbmeſſer PL eine Kugelfläche beſchrieben, ſo wäre ein Stück dieſer Kugelfläche $= \frac{1}{2} ab$ mit der Lichtflamme zwiſchen einerley ſcheinbaren Gränzen enthalten: und wenn aus P mit dem Halbmeſſer $= 1$ eine Kugelfläche beſchrieben wäre; ſo wäre ein Stück dieſer lezten Kugelfläche $= \frac{\frac{1}{2} a \cdot b}{PL^2}$ zwiſchen eben den ſcheinbaren Gränzen enthalten. In den Formuln

des

des 67. §. iſt der Glanz des leuchtenden Kugeldreyecks = 1 geſetzt: iſt alſo der Lichtflamme Glanz = S, ſo hat man $I = \frac{\frac{1}{2} . S . a . b}{LP^2}$.

Allemahl, wenn eine leuchtende Fläche weit genug von der Stelle einer andern Fläche, die von jener erleuchtet wird, entfernt iſt, daß man jeden Durchmeſſer der erſten als unendlich klein in Vergleichung mit der Entfernung anſehen kann; ſo iſt die Erleuchtung beynahe das Product aus dem Glanz der leuchtenden Fläche in ihre ſcheinbare Gröſſe, und den Sinus des Einfallswinkels. (38. §. n. 2.) In dem eben betrachteten Fall findet man alſo denſelben Ausdruck für die von der Lichtflamme kommende Erleuchtung in P, wenn man die Abmeſſungen derſelben in Vergleichung mit der Entfernung LP als unendlich klein betrachtet, und den Einfallswinkel = 90° ſetzt.

285. §.

Hieraus wird begreiflich, wie es möglich ſey, die Weiſſe einer Fläche, durch Verſuche zu finden, dergleichen Herr Lambert angeſtellet, und in ſeiner Photometrie Part. III. Cap. II. §. 747. ſqq. beſchrieben hat. Wenn in L eine Lichtflamme ſteht, ſo kann man die Entfernungen LP, LQ, HP, meſſen; aus HP und der Brennweite des Glaſes FG, deſſen halbe Oefnung HF ebenfalls bekannt iſt, hat man H*p*: mithin läßt ſich auch des Winkels HPF Secante finden, deſſen Tangente = $\frac{HF}{HP}$ iſt, wennn anders nicht HP in Vergleichung

mit HF ſo groß iſt, daß ſehr nahe $\sec HPF = 1$ iſt, da dann im 283. §. n. 2. $A = \frac{i \,.\, Hp^2}{k \,.\, I \,.\, HF^2}$ angenommen werden kann. Für das Glas, deſſen man ſich bedient, muß die Zahl k nach den Regeln des 218. §. geſucht werden. Aus L wirft die Lichtflamme nach P die Erleuchtung $I = \frac{\frac{1}{2}a \,.\, b}{LP^2} \,.\, S$, und nach Q die Erleuchtung $i = \frac{\frac{1}{2}a \,.\, b}{LQ^2} \,.\, S$: alſo findet man $\frac{i}{I} = \frac{LP^2}{LQ^2}$, und $A =$

$$\frac{LP^2 \,.\, Hp^2 \,.\, \sec \,.\, HPF^2}{k \,.\, LQ^2 \,.\, HF^2}.$$

Um übrigens ſoviel möglich die Fehler zu vermeiden, welche bey Verſuchen dieſer Art nur gar zu leicht begangen werden können, empfielt Herr Lambert folgende Maximen. Ob gleich die gefundene Formul weder vom Glanz des Lichts L noch von der Weiſſe der Ebene DE abhängt, und alſo die Wahl des einen oder des andern in ſo fern an ſich gleichgültig wäre; ſo iſt es doch am beſten, ein ſo viel möglich helles Licht in L, auch eine ſolche Ebene DE zu wählen, die mit AB einerley Weiſſe hat. Das erſte iſt nöthig, um die Ebene AB recht hell zu erleuchten, und eben um deswillen muß die Entfernung LP nicht ſehr groß ſeyn. Eben dieſe Entfernung aber kann auch nicht ſo gar klein angenommen werden. Wenn nemlich das Licht auf P ſenkrecht fällt, ſo iſt die Ebene AB daſelbſt am ſtärkſten erleuchtet, gegen A und B zu aber nimmt die Erleuch-

leuchtung deſto mehr ab, je kleiner die Winkel PAL, PBL, mithin je gröſſer die Winkel PLA, PLB ausfallen. Damit dieſer Unterſchied der Erleuchtung fürs Auge beynahe unmerklich bleibe, müſſen die Winkel PAL, PBL, nicht unter 80° abnehmen, mithin PLA, PLB nicht über 10° faſſen. Je kleiner nun LP wäre, deſto kleiner müſte AB ſeyn, wenn PLA, PLB, die Gröſſe von 10° nicht übertreffen ſollen, und dies würde den Erfolg haben, daß das Bild *ab* ſehr klein ausfiele: alsdenn aber läßt ſich die Helligkeit des Bildes mit der Helligkeit der Stelle Q nicht ſo gut vergleichen, und das Urtheil des Auges darüber, ob beyde Stellen, das Bild *ab* und die Stelle Q gleich ſtark erleuchtet ſind, wird unſicher. Mit Beobachtung dieſer Cautelen muß man nun durch Verſuche die Stelle L ausfündig zu machen ſuchen, wo die Lichtflamme ſtehen muß, damit das Bild *ab* und die Stelle Q gleich ſtark erleuchtet erſcheinen.

286. §.

Herr **Lambert** brauchte bey ſeinen Verſuchen eine Linſe, wofür er die Zahl $k=\frac{5}{6}$ gefunden hatte, (218. §.) und ihre eigentliche Brennweite war $6\frac{1}{5}''$, die halbe Oefnung HF $= 0{,}93''$. Vermittelſt derſelben fand er für recht weiſſes und ſtarkes Regal-Papier, wie auch für feines weiſſes Charten-Papier, den Werth $A=\frac{2}{5}$, ein Mittel aus mehrern Verſuchen genommen. Weil er aber muthmaßte, daß vielleicht alle Arten von Papier um deswillen nur ſo wenig von dem auffallenden Licht zurück werfen mögten, weil ſich in demſelben ſehr viele Zwiſchenräumchen befinden; ſo beſtrich er ein Stück

weiß Regal-Papier mit Mahlerfarbe, die aus Cremſerweiß zubereitet war, ſo dick, daß kein Licht mehr hindurch gehen konnte; und wie er auch hiemit Verſuche anſtellte, ſo fand ſich nur ein ſehr geringer Unterſcheid von dem Reſultat der vorigen Verſuche. Das Mittel aus mehrern Verſuchen war für Cremſerweis A = 0,4230, für Regal-Papier aber A = 0,4067.

287. §.

Hat es mit den Vorausſetzungen des 279. §. ſeine Richtigkeit ſo ergiebt ſich aus Vergleichung mit dem 281. §., daß in den bisherigen Formuln das A bey Flächen von einer andern Farbe auch die Lebhaftigkeit oder den Grad dieſer Farben eben ſo bezeichnen könne, wie es bisher den Grad der Weiſſe bezeichnet hat. Alsdenn giebt der Ausdruck $\frac{A \times I}{\pi}$ die Klarheit der gefärbten Fläche. Herr Lambert hat ähnliche Verſuche, wie mit weiſſen Flächen, auch mit rothen, gelben, und grünen aus Papier geſchnittenen Flächen angeſtellt. Die rothen waren mit Mennigfarbe beſtrichen, und die gelben mit Kreuzbeeren-Saft, die grünen aber in Grünſpan eingetaucht. Er fand für die rothen Flächen A = 0,2932, für die gelben A = 0,2620, für die grünen 0,1149, jedesmahl ein Mittel aus mehreren Verſuchen genommen.

98 F. Noch ſtellte H. Lambert in AB eine mit Cremſerweis beſtrichene Fläche, in DE aber nach einander eine weiſſe, rothe, gelbe, grüne und blaue Fläche, ſuchte auch jedesmahl wie groß die Entfer-

nungen

nungen ſeyn müſten, damit das Bild *ab* eben die Helligkeit zu haben ſchiene, welche die Fläche DE in Q hatte. Bey allen dieſen Verſuchen zeigte das Bild *ab* eben die Farbe, welche die Fläche DE ſelbſt hatte. Der Abſtand LP blieb in allen Fällen 5 Zoll, und für die weiſſe, rothe, grüne und blaue Fläche war LQ ohngefehr 64 Zoll: dagegen muſte für die gelbe Fläche dieſer Abſtand um 2 bis 3 Zoll vermindert werden. Es war alſo das gelbe Bild klärer als die übrigen Bilder. Wie nun dieſer Unterſcheid weder von dem Glanz des Lichts L noch von der Lebhaftigkeit der Farbe der Fläche DE abhängt, weil die im 283. §. gefundene Formul keines von beyden enthält, wie ſchon im 285. §. bemerkt iſt; ſo ſcheint es, daß man den Grund davon in der Beſchaffenheit der Fläche AB ſuchen müſſe. Es ſcheint nemlich, daß ſie die gelben Strahlen in gröſſerer Menge, als die übrigen zurück geſchickt habe.

Die Farben der natürlichen Körper ſind nie ſo vollkommen rein, daß von denſelben nur Licht von einer einzigen Grundfarbe allein, von allen übrigen Licht aber, was die Erſcheinung anderer Grundfarben verurſacht, gar nichts zurückſtrahlen ſollte. Es giebt alſo keine vollkommen rothe, vollkommen grüne Körper, u. ſ. f.; die Farben ſind insgeſammt mehr oder weniger vermiſcht. Wie nun die Zahl der Grundfarben auch nicht auf die gewöhnlich angenommenen ſieben prismatiſchen Farben eingeſchränkt iſt, vielmehr die Strahlen, welche man zu einer Grundfarbe rechnet, durch unmerkliche Stuffen verſchieden ſind, und eine Grundfarbe eben ſo durch unmerkliche Stuffen an die

nächſtfolgende priſmatiſche Hauptfarbe gränzt; ſo würde eine genauere Theorie über die Lebhaftigkeit vermiſchter Farben, wie ſie in der Natur würklich beſchaffen ſind, ganz eigene, und wie leicht vorauszuſehen iſt, ziemlich umſtändliche Rechnungen und Verſuche erfordern. Die Gründe davon ſind noch nicht hinlänglich bekannt, und das wird mich entſchuldigen, wenn ich bloß anführe, daß H. **Lambert** (Photomet. Part. VII. Cap. I.) einigermaſſen gezeigt habe, worauf es dabey ankommen würde, mit dem Verſprechen mehreres hievon in der **Pyrometrie** zu liefern.

288. §.

Wenn man die Weiſſe irgend einer Art von Körper vermittelſt eines ſolchen Verſuchs gefunden hat, wozu der 285. §. Anleitung giebt; ſo dient die Formul $\Sigma = \frac{A \times I}{\pi}$ die Weiſſe jeder andern Art von Körper mit jener zu vergleichen. Es ſey eines andern Körpers, der die Erleuchtung i empfängt, Klarheit $= \sigma$, ſeine Weiſſe $= a$, ſo iſt $\sigma = \frac{a \times i}{\pi}$. Wenn man nun durch Veränderung der Entfernung vom leuchtenden Körper oder durch Veränderung des Einfallswinkels es dahin bringt, daß $\Sigma = \sigma$ wird, ſo iſt $a \times i = A \times I$, alſo $a = \frac{A \times I}{i}$, und die Weiſſe der Flächen verhält ſich bey gleicher Klarheit umgekehrt, wie die darauf fallende Erleuchtung. Verſuche lehren, daß eine mit weiſſen Kalk oder Gyps beſtrichene

Mauer,

Mauer, recht weiſſes Papier, Cremſerweis, an der Sonne weis gebleichtes Lein, recht weiſſe Kreide, in Anſehung der Weiſſe wenig verſchieden ſind.

289. §.

Eben dieſe Formul $\Sigma = \frac{A \times I}{\pi}$ dient, den Glanz eines leuchtenden Körpers mit der Klarheit der von demſelben erleuchteten Fläche zu vergleichen. Der Glanz des leuchtenden Körpers ſey = S, ſo hat man $\frac{\Sigma}{S} = \frac{A \times I}{\pi S}$, oder $\frac{S}{\Sigma} = \frac{\pi S}{A \times I}$, und dieſe Zahl drückt aus, wieviel mahl der Glanz des leuchtenden Körpers die Klarheit der erleuchteten Fläche übertrift. Man nimmt leicht war, daß πS die abſolute Erleuchtung ſey, welche der leuchtende Körper der erleuchteten Fläche mittheilen kann. Dieſe verhält ſich alſo zu dem Product $A \times I$, wie der Glanz des leuchtenden Körpers zur Klarheit der erleuchteten Fläche.

Es ſey S der Glanz der Sonne, die eine Fläche von der Art ſenkrecht erleuchtet, deren Weiſſe = 0,423 gefunden iſt, ihr ſcheinbarer Halbmeſſer 16′: ſo iſt $I = \pi \,.\, S \,.\, (\sin 16')^2$, und $\frac{S}{\Sigma} =$

$$\frac{1}{0{,}423 \,.\, 0{,}0046542^2} = \frac{10000000000}{423 \,.\, 216} =$$

109437. Soviel mahl iſt der Glanz der Sonne gröſſer, als die Klarheit einer weiſſen von ihr erleuchteten Fläche. Der wahre Glanz der Sonne iſt würklich noch gröſſer, weil man auf dieſe Art eigent-

eigentlich nur den, wegen der nicht völligen Durchſichtigkeit der Atmoſphäre, ſchon geſchwächten Glanz der Sonne mit der Klarheit der weiſſen Fläche vergleichen kann.

290. §.

Was vom ſcheinbaren Glanz für ſich leuchtender Körper im 241. u. f. §. §. vorgetragen iſt, läßt ſich nunmehro leicht auf die bisher betrachtete Klarheit für ſich dunkler Sachen anwenden: die ſcheinbare Klarheit (claritas viſa) einer erleuchteten für ſich dunklen Fläche iſt der Erleuchtung des Bildes auf der Nezhaut im Auge proportional, mithin verhält ſie ſich, wie der Ausdruck $\frac{\pi . \Sigma . b^2}{\mu^2 a^2}$ (241. §.), wenn b den Halbmeſſer des Sterns und a den längſten Durchmeſſer des Auges bezeichnet. Braucht man alſo den Werth $\Sigma = \frac{A \times I}{\pi}$, ſo iſt die ſcheinbare Klarheit $= \frac{A . I . b^2}{\mu^2 . a^2}$, wobey vorausgeſetzt wird, daß das erleuchtete Object nur unter einem kleinen Sehewinkel erſcheine.

Bey gleicher ſcheinbaren Gröſſe und gleicher Klarheit zweyer für ſich dunkler erleuchteter Flächen, iſt zugleich ihre ſcheinbare Klarheit einerley. Auch umgekehrt: Wenn zwey für ſich dunkle erleuchtete Flächen, die man mit einem Blick überſehen kann, bey gleicher ſcheinbaren Gröſſe, gleich klar oder hell zu ſeyn ſcheinen; ſo iſt beyder Klarheit würklich gleich groß. (Man vergleiche den 249. §.)

Aus

Aus dieſem allen iſt nun mit gröſter Deutlichkeit abzunehmen, wie die Bedeutungen der Ausdrücke: Erleuchtung einer für ſich dunklen Fläche, Klarheit der Fläche, und ſcheinbare Klarheit der erleuchteten Fläche verſchieden ſind. Die wahre Klarheit der Fläche verhält ſich wie das Product der auf ſie fallenden Erleuchtung in ihre Weiſſe, und die ſcheinbare Klarheit, wie das Product der wahren Klarheit ins Quadrat vom Halbmeſſer der Oefnung des Sterns im Auge, wobey übrigens vorausgeſetzt wird, daß das Bild auf der Netzhaut des Auges, mithin die Empfindung ſelbſt deutlich ſey. Merkwürdige Anwendungen hievon werden in der Aſtronomie vorkommen. Weil nemlich die Planeten ihr Licht von der Sonne empfangen, ſo iſt es nicht einerley, ob man frägt: wie groß die Erleuchtung eines Planeten ſey, welche ihm die Sonne zuſchickt? oder: wie groß ſeine daher entſpringende Klarheit ſey? oder endlich: wie groß dieſe Klarheit dem Beobachter auf der Erde zu ſeyn ſcheine? Ein hieher gehöriges Beyſpiel wird nicht allein als eine angenehme Vorbereitung zur umſtändlichern Anwendung dieſer Theorie auf die Aſtronomie, ſondern auch zugleich dazu dienen, die erwehnten Begriffe deſto mehr ins Licht zu ſetzen.

Der XXI. Abſchnitt.

Anwendung
dieſer Theorie auf die Ausmeſſung der Klarheit des Monds in ſeinen verſchiedenen Geſtalten.

291. §.

Es iſt eine gemeine Erfahrung, daß der volle Mond zwar einen ſehr lebhaften, aber doch bey dem allen noch ungemein viel ſchwächern Glanz als die Sonne habe. Die veränderlichen Geſtalten, welche der Mond annimmt, da er bald wie eine Sichel gekrümmt, bald wie ein Halbkreis, bald wie eine ganze helle Scheibe erſcheint, und dies allemahl in einer regelmäßigen Folge während ſeines einmahligen Umlaufs um die Erde, haben längſt auf die Vermuthung geführt, daß der Mond eine für ſich dunkle Kugel ſey, und mit entlehnten Licht glänze, daß ihm die Sonne zuſchickt. Es iſt ſehr leicht, ſoweit es hier nöthig iſt, ſich davon einen Begrif zu machen, wie die Verſchiedenheit der Mondsgeſtalten mit ſeinen jedesmahligen Stande gegen die Sonne und die Erde zuſammen hänge. Vorläufig muß man nur wiſſen, daß der Mond in einer ſolchen Bahn um die Erde laufe, die zwar eigentlich kein Kreis iſt, hier aber für einen Kreis angenommen werden kann, deſſen Halbmeſſer ohngefehr 60 halbe Erddurchmeſſer groß iſt; und daß die Sonne mehr denn 23000 halbe Erddurchmeſſer von der Erde entfernt ſey. Die Sonne, als eine Kugel, deren Gröſſe die Gröſſe der Mondskugel

sehr

ſehr weit übertrift, erleuchtet würklich etwas mehr, als die halbe Oberfläche des Mondes; und wenn man den jedesmahligen Abſtand des Mondes von der Sonne, wie auch das Verhältniß der Halbmeſſer oder Durchmeſſer der Sonne und des Mondes gegen einander weis; ſo läßt ſich berechnen, wie groß das erleuchtete Stück der Mondsfläche ſey. (72. §. Opt.) Wegen der ſehr großen Entfernung der Sonne von der Erde und dem Monde aber iſt das erleuchtete Stück der Mondskugel ſehr nahe eine Halbkugel, und kann hier dafür angenommen werden. Ferner überſiehet das Auge des Beobachters auf der Erde nie eine völlige Halbkugel vom Monde: wegen der ſchon beträchtlich großen Entfernung des Mondes von der Erde aber kann man annehmen, daß auch dies Stück der Mondsfläche eine völlige Halbkugelfläche ſey.

Dieſemnach ſey T der Mittelpunct der Erde, 99
L der Mittelpunct des Mondes, der um jene in 100F
einem Kreiſe läuft, deſſen Halbmeſſer TL iſt: TS ſey eine grade Linie aus der Erde Mittelpunct, und LS eine andre grade Linie aus des Mondes Mittelpunct nach den Mittelpunct der Sonne gezogen; ſo laufen TS und LS unter einem ſo kleinen Winkel zuſammen, daß ſie hier als parallele Linien angenommen werden können, die in der Ebene der Mondsbahn liegen. Eben dieſe Ebene ſchneide die Mondskugel in dem größten Kreiſe CGDF, und durch L ſetze man eine Ebene auf LS ſenkrecht, ſo iſt dieſe zugleich auf der Ebene des Kreiſes CGDF ſenkrecht, ſchneidet ſie in der graden Linie FG, und ſie giebt auf der Mondskugel den größten Kreis GAFB, der die Gränze der erleuchteten und dunk-

dunklen Halbkugelflächen des Monds vorſtellet. Noch ſetze man durch L eine andre Ebene auf LT ſenkrecht, ſo iſt dieſe ebenfalls auf der Ebene des Kreiſſes CGDF ſenkrecht, ſchneidet ihn in der graden Linie HI, und giebt auf der Mondskugel den größten Kreis HAIB, der die der Erde zugekehrte Halbkugelfläche, die man aus T überſehen kann, von der hintern Hälfte abſondert. Beyde größte Kreiſe GAFB, HAIB, ſchneiden einander in A und B, und dieſe Durchſchnittspuncte ſind die Pole des Kreiſes CGDF. Demnach iſt derjenige Theil der erleuchteten Hälfte des Mondes, welchen man aus T überſehen kann, zwiſchen den Halbkreiſen AHB und AFB enthalten, deren Ebenen einander an AB unter dem Winkel HLF ſchneiden.

Nun iſt STL der Abſtand des Mondes von der Sonne aus der Erde geſehen (42. §. Opt.), die **Elongation** des **Mondes** von der Sonne, und FG iſt auf LS und TS ſenkrecht, mithin iſt $ELF = 90° - STL$: aber auch $ELF = 90° - HLF$, alſo $90° - STL = 90° - HLF$, und $HLF = STL$. Das heiſt der Winkel HLF, oder der ſphäriſche Winkel AHF, der die Gröſſe des erleuchteten der Erde zugekehrten Theils der Mondsfläche beſtimmt, iſt der Elongation des Mondes von der Sonne gleich. Es ſoll dieſer Theil der Mondsfläche, wie in der Aſtronomie, künftig der **Mondsbruch** (phaſis lunae) heiſſen.

292. §.

Nun ſey P ein Punct in dem Mondsbruch, APB ein größter Kreis durch dieſem Punct P und die Axe AB, OPR ein zur Axe AB gehöriger Parallel-

rallelkreis durch eben den Punct P; ſo wird die Lage des Puncts P auf der erleuchteten Mondshälfte durch den ſphäriſchen Winkel FAP, als ſeinem Abſtand von der Gränze der erleuchteten und dunklen Mondshälfte, und durch ſeinen Abſtand AP vom Pol A beſtimmt. Der Winkel FAP wachſe um das Element PAQ, und der Bogen AP um das Element Pp, durch Q und AB lege man noch einen gröſten Kreis, ſo wie durch p einen zur Axe AB gehörigen Parallelkreis, ſo giebt ſich ein Element PQqp der erleuchteten Mondsfläche. Ferner ſetze man den Halbmeſſer der Mondskugel $= 1$, den Bogen AP $= x$, den Bogen FM $= y$, als das Maaß des Winkels FAP; ſo iſt P$p = dx$, PQ $= dy \sin x$, und die Fläche des Elements PQqp $= dxdy \sin x$. Weil übrigens die Entfernung des Monds von der Erde in Vergleichung mit dem Halbmeſſer des Monds beträchtlich groß iſt, ſo kann man annehmen, eine grade Linie aus P nach T gezogen, ſey mit LT parallel, und dieſe ſtellt zugleich die Geſichtsaxe für den Beobachter auf der Erde vor. Gegen dieſe Geſichtsaxe iſt das Element PQqp unter einem Winkel geneigt, der den Winkel ELP zu 90° ergänzt: denn dies Element iſt auf LP ſenkrecht, mithin iſt es auf der Ebene ELP ſenkrecht, worin auch TP liegt. Wenn man alſo den erwehnten Neigungswinkel ζ nennt, ſo ſiehet man leicht, daß ELP $+ 90° + \zeta = 180°$ ſey, mithin $\zeta = 90° -$ ELP. Eben ſo erhellet, wenn aus P eine grade Linie PS in den Mittelpunct der Sonne gezogen würde, daß dieſe gegen das Element PQqp unter einem Winkel $= 90° -$ DLP geneigt wäre.

293. §.

Die Erleuchtung zu finden, die ein Element, deſſen Lage in dem erleuchteten Mondsbruch gegeben iſt, von der Sonne empfängt.

Aufl. Es ſey die Lage des Elements $PQqp$ durch $FM = y$, $AP = x$ gegeben, und überdem ſey $EF = \alpha$, ſo iſt im erſten Viertel $\alpha = 0$ und im Vollmond $\alpha = -90°$. Wenn nemlich $HLF = STL = \varepsilon$ geſetzt wird, ſo iſt überhaupt $\alpha = 90° - \varepsilon$. Man ziehe den größten Kreisbogen DP, ſo giebt ſich ein rechtwinklichtes ſphäriſches Dreyeck DMP, worin DP die Hypothenuſe iſt, alſo $\cos . DP = \cos MD . \cos MP$ (538. §. Geom. num. III.) oder $\cos DP = \sin y . \sin x$. Aber die Axe des von der Sonne auf das Element $PQqp$ fallenden Strahlenkegels iſt gegen dies Element unter einem Winkel $= 90° - DLP$ geneigt (292. §.); wenn alſo der ſcheinbare Halbmeſſer der Sonne aus P geſehen $= \varrho$ geſetzt wird, ſo iſt die Erleuchtung, welche das Element in P empfängt $= \pi S \sin (90° - DLP) \sin \varrho^2$, (59. 60. §. n. 3.) den Glanz der Sonne $= S$ geſetzt. Nimmt man alſo dieſe Erleuchtung $= I$ an, ſo iſt $I = \pi S \sin y \sin x \sin \varrho^2$.

Die Erleuchtung iſt alſo nicht überall einerley, ſondern ſie wächſt mit x und y, weil ϱ beynahe für alle Stellen einerley bleibt. Bey D wo $x = y = 90°$ wird, iſt ſie am gröſten, und verſchwindet im Umfange des Kreiſes AFBG, welches alles der Natur der Sache gemäß iſt.

Wenn

Wenn A die Weiſſe des Elements und Σ die Klarheit deſſelben iſt, ſo hat man $\Sigma = \frac{A \times I}{\pi}$ (232. §.) $= A \,.\, S \,.\, \sin x \sin y \sin \varrho^2$; mithin iſt auch die Klarheit verſchiedener Stellen der erleuchteten Mondsfläche veränderlich, und dies nicht allein, weil ſich x und y ändern, ſondern weil auch A veränderlich ſeyn könnte.

Im vollen Mond iſt $\varepsilon = 180°$, $\alpha = -90°$, und F fällt in I, ſo wie D in E. Alsdenn iſt für die Stelle D die Klarheit $\Sigma = A \,.\, S \,.\, \sin \varrho^2$, weil x und $y = 90°$ ſind, und man hat $S : \Sigma\ 1 : A \sin \varrho^2$. Wie nun ϱ ohngefehr zwiſchen 15′ und 16′ fallen wird, ſo nehme man $\varrho = 0{,}0045$ an, ſo iſt $\varrho^2 = 0{,}00002025$. Wie groß A ſey, iſt nicht bekannt, vermuthlich beträgt A nicht über $\frac{1}{5}$, weil die gröſte Weiſſe der Maſſen, die wir auf der Erde kennen, ohngefehr nur $\frac{2}{5}$ beträgt. Wäre $A = \frac{1}{5}$, ſo fände man $\frac{S}{\Sigma} = \frac{1}{0{,}00000404} = 247525$. Soviel mahl wäre der Glanz der Sonne gröſſer, als die Klarheit der mittelſten Stelle der ſcheinbaren Mondſcheibe im Vollmond.

294. §.

Bey allen bisherigen Anwendungen der Fundamentalgleichung $dI = S d\mu \,.\, \sin \vartheta$ (48. §.) iſt noch vorausgeſetzt worden, daß S eine beſtändige Gröſſe, und für alle Elemente der leuchtenden Fläche einerley ſey. In ſolchen Fällen hat man

allemahl $I = S\int d\mu \sin\vartheta$, alſo umgekehrt $S = \frac{I}{\int d\mu \sin\vartheta}$. Wäre dagegen die leuchtende Fläche
8 Fig. AB, welche dem Element M*m* ihr Licht zuſchickt, ungleichförmig glänzend und Σ der Glanz eines unbeſtimmten Elements L*l*, die Erleuchtung, welche AB nach M*m* ſchickt = Y, ſo hätte man $Y = \int \Sigma d\mu \sin\vartheta$. Man ſtelle ſich vor, der über der Fläche AB ungleichförmig verbreitete Glanz werde gleichförmig vertheilt mit der Bedingung, daß M*m* von AB noch eben die Erleuchtung wie vorhin empfange, und nun ſey der Glanz eines jeden Elements = S, ſo hätte man $Y = S\int d\mu \sin\vartheta$, und beyde Erleuchtungen gleich geſetzt giebt $S = \frac{\int \Sigma d\mu \sin\vartheta}{\int d\mu \sin\vartheta}$. Dieſer Glanz S kann der mittlere Glanz der ungleichförmig leuchtenden Fläche heiſſen, ſo wie bereits in einem ähnlichen Verſtande der Ausdruck: **mittlere Erleuchtung** iſt gebraucht worden. (15. §.)

Wenn Σ wie im 275. §. die Klarheit einer für ſich dunklen anderswoher erleuchteten Fläche bezeichnet, und man aufs neue die Erleuchtung ſucht, welche ſie einer andern Fläche zuſchickt; ſo kommt dies Σ eben ſo in Rechnung, als wenn die dunkle Fläche für ſich leuchtend wäre, und Σ ihren Glanz bezeichnete. Wie nun im 293. §. ſchon ein Beyſpiel davon vorgekommen iſt, daß dies Σ für verſchiedene Elemente der erleuchteten mit fremden Licht ſtrahlenden Fläche veränderlich ſeyn kann; ſo erhellet, daß auch hier der Ausdruck: mittlere **Klarheit**, in ähnlicher Bedeutung, wie bey für

ſich

ſich leuchtenden Flächen der Ausdruck: mittlerer Glanz, gebraucht werden könne. Wenn nemlich AB eine ſolche ungleichförmig klare Fläche iſt, die ihr Licht auf das Element M*m* wirſt, und die Klarheit des Elements L*l* = Σ geſetzt wird; ſo iſt der Fläche AB mittlere Klarheit $= \frac{\int \Sigma d\mu \sin \vartheta}{\int d\mu \sin \vartheta}$.

Wäre die Entfernung LM in Vergleichung mit den Abmeſſungen der leuchtenden Fläche AB ſehr groß, ſo wäre beynahe ſin ϑ für alle auf M*m* fallende Strahlen einerley: alsdenn hätte man für die mittlere Klarheit der Fläche AB den Ausdruck $\frac{\int \Sigma \vartheta \mu}{\int d\mu} = \frac{1}{\mu} \int \Sigma d\mu$.

295. §.

Die Elongation des Mondes von der Sonne iſt gegeben, man ſucht die mittlere Klarheit der von der Erde geſehenen Mondsphaſe.

Aufl. Wenn die Bezeichnungen hier wie im 293. §. beybehalten werden, ſo iſt das Element PQ*qp* der erleuchteten Mondsfläche $= dxdy \sin x$; (292. §.) und wenn *z* der Abſtand dieſes Elements von der Erde iſt, ſo hat man $d\mu = \frac{dxdy \sin x \cos EP}{z^2}$. Ferner iſt $\Sigma = A . S . \sin x \sin y \sin \varrho^2$, und wegen der ſchon beträchtlich großen Entfernung des Monds von der Erde in Vergleichung mit dem Halbmeſſer des Monds iſt für alle Stellen auf der Erde, die der Mond erleuchtet, der Einfallswinkel ϑ beynahe einerley, ſo wie auch *z*

für alle Elemente des Monds beynahe einerley bleibt. Wird alſo die geſuchte mittlere Klarheit des Monds $= s$ geſetzt, ſo hat man $s = \frac{\int \Sigma d\mu}{\int d\mu} =$

$$(294.\S.) = \frac{S\,.\,A\,.\,\text{ſin}\,\varrho^2 . \int dxdy\,\text{ſin}\,x^2\,\text{ſin}\,y\,\text{coſ}\,EP}{\int dxdy\,\text{ſin}\,x\,\text{coſ}\,EP}.$$

Es iſt aber $\text{coſ}\,EP = \text{coſ}\,E\,.\,M\,\text{coſ}\,PM = \text{coſ}(\alpha + y)\,\text{ſin}\,x = (\text{coſ}\,\alpha\,\text{coſ}\,y - \text{ſin}\,\alpha\,\text{ſin}\,y)\,\text{ſin}\,x$, mithin $dxdy\,\text{ſin}\,x\,\text{coſ}\,EP =$
$dx\,\text{ſin}\,x^2\,(dy\,\text{coſ}\,y\,\text{coſ}\,\alpha - dy\,\text{ſin}\,y\,\text{ſin}\,\alpha)$. Man nehme zuerſt allein x als veränderlich an, ſo findet man hievon das Integral
$= C + \frac{1}{2}(dy\,\text{coſ}\,y\,\text{coſ}\,\alpha - dy\,\text{ſin}\,y\,\text{ſin}\,\alpha(x - \frac{1}{2}\,\text{ſin}\,2\,x)$. (Man vergleiche den 59. §. am Ende). Weil dies Integral mit x zugleich verſchwinden muß, ſo findet man $C = 0$. Man integrire noch mahl, und nehme allein y veränderlich an, ſo findet man
$\int dxdy\,\text{ſin}\,x\,\text{coſ}\,EP = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\,\text{ſin}\,2x)(\text{ſin}\,y\,\text{coſ}\,\alpha + \text{coſ}\,y\,\text{ſin}\,\alpha) + C$
$= \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\,\text{ſin}\,2x)\,\text{ſin}(y + \alpha) + C$. Mit y muß dies Integral verſchwinden, alſo iſt
$C = -\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\,\text{ſin}\,2x)\,\text{ſin}\,\alpha$, und man erhält
$\int dxdy\,\text{ſin}\,x\,\text{coſ}\,EP = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\,\text{ſin}\,2x)(\text{ſin}(y + \alpha) - \text{ſin}\,\alpha)$.

Weiter erhält man $dxdy\,\text{ſin}\,x^2\,\text{ſin}\,y\,\text{coſ}\,EP = dx\,\text{ſin}\,x^3(dy\,\text{ſin}\,y\,\text{coſ}\,y\,\text{coſ}\,\alpha - dy\,\text{ſin}\,y^2\,\text{ſin}\,\alpha)$, und um das Integral $\int dx\,\text{ſin}\,x^3$ zu finden, ſetze man $\text{coſ}\,x = u$, $\text{ſin}\,x^2 = w$, ſo iſt $dx\,\text{ſin}\,x\,.\,\text{ſin}\,x^2 = -wdu$, alſo $\int - wdu = - wu + \int udw$, oder $\int dx\,\text{ſin}\,x^3 =$
$- \text{ſin}\,x^2\,\text{coſ}\,x + 2\int dx\,\text{coſ}\,x^2\,\text{ſin}\,x = - \text{ſin}\,x^2\,\text{coſ}\,x - 2\,\text{coſ}\,x + 2\int dx\,\text{ſin}\,x^3$, und das giebt
$\int dx\,\text{ſin}\,x^3 = -\frac{1}{3}\,\text{ſin}\,x^2\,\text{coſ}\,x - \frac{2}{3}\,\text{coſ}\,x + C$. Soll dies Integral mit x verſchwinden, ſo hat man $C = \frac{2}{3}$. Wenn alſo zuerſt das Integral von

$dxdy$

$dxdy$ ſinx^2 ſin$y$ coſ EP in der Vorausſeſzung geſucht wird, daß allein x veränderlich ſey; ſo findet man $(\frac{2}{3} - \cos x + \frac{1}{3}\cos x^3)(dy \sin y \cos y \cos\alpha - dy \sin y^2 \sin\alpha)$. Die zweyte Integration y veränderlich angenommen, giebt das Integral des veränderlichen Factors $= \frac{1}{2}\sin y^2 \cos\alpha - \frac{1}{2}(y - \frac{1}{2}\sin 2y)\sin\alpha + C$, wo $C = 0$ wird, weil das Integral mit y verſchwinden muß. Eben dieſer Ausdruck iſt =

$\frac{1}{2}((\sin y \cos\alpha + \cos y \sin\alpha)\sin y - y \sin\alpha)$

$= \frac{1}{2}(\sin(y+\alpha) - y \sin\alpha)$;

alſo giebt ſich $\int dxdy \sin x^2 \sin y \cos EP$

$= (\frac{2}{3} - \cos x + \frac{1}{3}\cos x^3) . \frac{1}{2}(\sin(y+\alpha)\sin y - y \sin\alpha)$.

Um dieſe Integrale für den ganzen Mondsbruch zu haben, muß man $x = APMB = 180°$ und $y = FH$ ſetzen, da dann FH die Elongation des Monds von der Sonne iſt. Es ſey alſo nun $y = FH = v$, ſo iſt $EF + FH = v + \alpha = 90°$, alſo $\sin\alpha = \cos v$, und man findet

$\int dxdy \sin x^2 \sin y \cos EP = \frac{2}{3}(\sin v - v \cos v)$,

$\int dxdy \sin\alpha \cos EP = \frac{1}{2}\pi(1 - \cos v)$,

$$\text{alſo } s = \frac{\frac{2}{3} S . A \sin\varrho^2 (\sin v - v \cos v}{\frac{1}{2}\pi(1 - \cos v} =$$

$$\frac{4 S . A \sin\varrho^2}{3\pi} . \left(\frac{\sin v}{1 - \cos v} - \frac{v \cos v}{1 - \cos v}\right). \text{ Es}$$

$$\text{iſt aber } \frac{\sin v}{1 - \cos v} = \cot \tfrac{1}{2}v, \text{ (459. §. Geom.)}$$

$$\text{alſo } s = \frac{4 S . A \sin\varrho^2}{3\pi} (\cot \tfrac{1}{2}v - v \cot v \cot \tfrac{1}{2}v).$$

Für den vollen Mond iſt $v = \pi$, alſo $\sin v = 0$, $\cos v = -1$, und die mittlere Klarheit des Voll-

monds $s = \frac{2}{3} S . A \sin \varrho^2$, oder $\frac{S}{s} = \frac{1}{\frac{2}{3} A \sin \varrho^2}$ $= \frac{3}{2} . \frac{1}{A \sin \varrho^2}$. Vergleicht man dies Reſultat mit dem 293. §. ſo erhellet, daß die mittlere Klarheit der vollen Mondſcheibe $\frac{2}{3}$ der Klarheit ihrer mittelſten Stelle betrage. Wie nun eben daſelbſt $\frac{1}{A \sin \varrho^2} = 247525$ gefunden iſt in der Vorausſetzung $A = \frac{1}{5}$, ſo giebt ſich hier $\frac{S}{s} =$ 371287.

Wenn Σ die centrale Klarheit des Vollmonds bezeichnet, ſo verhält ſich ſeine ſichtbare centrale Klarheit wie $\frac{\pi \Sigma b^2}{\mu^2 \; a^2}$, mithin bey einerley Oefnung des Sterns im Auge, wie $A \sin \varrho^2$. Seine ſichtbare mittlere Klarheit drückt die Formul $\frac{\pi s b^2}{\mu^2 \; a^2}$ aus, und man hat $s = \frac{2}{3} A \sin \varrho^2$. Dieſe ſichtbare oder ſcheinbare Klarheit ändert ſich nicht merklich, wenn ſich die Entfernung des Monds von der Erde ändert. Etwas merklicher iſt die Aenderung dieſer Klarheit wegen des verſchiedenen Abſtandes der Sonne vom Mond und der Erde. Dieſe iſt in der Mitte des Winters am kleinſten, und in der Mitte des Sommers am gröſten. Der Unterſcheid des gröſten und kleinſten ſcheinbaren Halbmeſſers der Sonne beträgt etwa $\frac{1}{2}$ Minute, oder $\frac{1}{30}$ des kleinſten Halbmeſſers, mithin iſt einerley Phaſe im Winter etwa um $\frac{1}{15}$ klärer als im Sommer.

Der

Der XXII. Abſchnitt.

Von einigen Hülfsmitteln den Glanz leuchtender Körper durch Verſuche zu vergleichen.

296. §.

Wenn gleich weiſſe Flächen ihre Erleuchtung von verſchiedenen leuchtenden Körpern erhalten, und dieſe beyden Flächen eine gleiche Klarheit haben; ſo ſind auch die Erleuchtungen, welche auf beyde fallen, gleich groß.

Beweis. Denn die Formul $\Sigma = \frac{A \times I}{\pi}$ giebt $I = \frac{\pi . \Sigma}{A}$. Für eine andre Fläche ſey die Weiſſe $= a$, die Erleuchtung $= i$, ihre Klarheit $= \sigma$, ſo iſt $i = \frac{\pi . \sigma}{a}$. Wenn demnach $A = a$, und $\Sigma = \sigma$ iſt, ſo hat man auch $I = i$.

297. §.

Dieſe Betrachtung wird ein Mittel den Glanz zweyer verſchiedenen leuchtenden Körper, durch angeſtellte Verſuche zu vergleichen. Man ſetze nemlich, die eine Fläche empfange ihre Erleuchtung I von einem Licht, deſſen Glanz $= S$ iſt, eine andere eben ſo weiſſe Fläche aber von einem Licht, das den Glanz $= s$ hat, die Erleuchtung $= i$: ſo iſt die abſolute Erleuchtung, welche das erſte Licht ei-

ner Fläche mittheilen kann, $= \pi S$, und diejenige abſolute Erleuchtung, welche das zweyte Licht mittheilen kann, $= \pi s$. Wenn aber der Glanz der leuchtenden Fläche, welche das Licht ausſendet, in allen ihren Elementen einerley iſt; ſo läſt ſich jede andre Erleuchtung durch ein Product der abſoluten Erleuchtung in eine Zahl N ausdrücken, die von der ſcheinbaren Geſtalt und Gröſſe der leuchtenden Fläche abhängt, ſo daß man $I = \pi . S . N$ erhält. Wird alſo n für die andere leuchtende Fläche in eben der Bedeutung gebraucht, ſo iſt $i = \pi . s . n$; mithin erhält man $S . N = s . n$, wenn $I = i$ iſt, und $\frac{S}{s} = \frac{n}{N}$.

Um alſo das Verhältniß $S : s$ zu finden, muß man ein Paar gleich weiſſe Flächen unter die Umſtände bringen, daß die eine derſelben von dem einen, die andere von dem andern leuchtenden Körper ihre Erleuchtung, und zwar ſo empfängt, daß beyde eine gleiche Klarheit erlangen, mithin beyde Erleuchtungen gleich groß ſind. Man nimmt hiebey an, daß dergleichen Flächen würklich gleich klar ſind, die dem Auge des Beobachters gleich klar zu ſeyn ſcheinen, und man iſt vermöge der im 290. §. vorgetragenen Gründe dazu berechtiget, wenn man zugleich den Bedingungen eine Gnüge leiſtet, die daſelbſt zum Grunde gelegt wurden. Man muß beyde Flächen einander ſo nahe bringen, daß man beyde mit einem Blick überſehen kann: auch giebt man ihnen einerley Geſtalt und Gröſſe.

298. §.

298. §.

Den Glanz zwoer Lichtflammen zu vergleichen.

Aufl. Man entferne von derjenigen Lichtflamme, die den ſchwächſten Glanz $= s$ hat, eine weiſſe Fläche ſoweit, daß ihre Entfernung davon, die ich $= \delta$ ſetze, acht bis zehn mahl gröſſer iſt, als die Höhe der Flamme, damit leztere in Vergleichung der erſten nur klein ſey, und laſſe das Licht auf die Fläche ſenkrecht fallen. Wird die Höhe der Flamme $= a$, ihre gröſte Breite $= b$ geſetzt, ſo iſt ein Schnitt durch die Axe der Flamme, welche leztere mit der erleuchteten Fläche parallel angenommen wird, beynahe $= \frac{1}{2} a \,.\, b$. (284. §.) Ich will die Fläche dieſes Schnitts $= e^2$ ſetzen, und die Erleuchtung, welche auf die mit der Axe der Flamme parallele Ebene ſenkrecht fällt, $= i$, ſo iſt $i = \frac{e^2 \,.\, s}{\delta^2}$. Mit einer andern eben ſo weiſſen Fläche fange man das von der ſtärkern glänzenden Flamme ausgehende Licht ſenkrecht auf, und dieſer Flamme Glanz ſey $= S$; auch ſey die erleuchtete Fläche mit der Axe der coniſch brennenden Flamme parallel, und ein Schnitt der Lichtflamme durch ihre Axe $= E^2$: ſo wird man die von der ſtärker glänzenden Flamme erleuchtete Fläche von dieſer Flamme weiter, als um den Abſtand δ entfernen müſſen, wenn ſie eben ſo ſtark, als die andre erleuchtet werden ſoll. Dieſen neuen Abſtand ſuche man alſo durch Verſuche zu finden, ſetze denſelben $= \Delta$, die Erleuchtung aber, welche die ſtärker glänzende Flamme ihrer Fläche zuſchickt $= I$;

ſo

ſo hat man $I = \frac{E^2 . S}{\Delta^2}$. Wenn nun der Verſuch $I = i$ giebt, ſo iſt $\frac{E^2 . S}{\Delta^2} = \frac{e^2 . s}{\delta^2}$, alſo $S : s = \frac{e^2}{\delta^2} : \frac{E^2}{\Delta^2}$, oder auch $S : s = e^2 . \Delta^2 : E^2 . \delta^2$.

Daſſelbe Geſetz der Vergleichung findet noch ſtatt, wenn gleich die Strahlen ſchief, jedoch auf beyde Flächen unter einerley Neigungswinkel auffallen. Wenn übrigens beyde Lichtflammen völlig, oder wenigſtens beynahe gleich groß ſind, ſo hat man $S : s = \Delta^2 : \delta^2$. Hr. Bouguer (Traité d'optique ſur la gradation de la lumiere Liv. I. Sect. I. Art. VIII.) nennt das Product $E^2 . S$ quantité totale de la lumiere: es iſt würklich der Menge Lichts proportional, welche die Flamme nach allen Seiten ausſenden würde, wenn ſie nur an ihrer Oberfläche glänzend wäre, oder die innern Lichttheilchen nicht durchſcheinen könnten. Oben im II. Abſchnitt iſt ſchon erinnert worden, daß es in dieſem Stück mit Lichtflammen eine andre Bewandniß, als mit leuchtenden Flächen habe, und in Rückſicht deſſen müſte ſtatt E^2 der körperliche Inhalt der Flamme genommen werden, wenn man eine vollkommene Durchſichtigkeit derſelben vorausſetzen könnte, wozu man aber auch keinen Grund hat. Die äuſſern Lichttheilchen an der Oberfläche der Flamme ſind es wohl vornemlich, welche nach allen Seiten ihre Strahlen verbreiten, und ſo kann man mit H. Bouguer $E^2 . S : e^2 . s$ =

$= \frac{1}{\delta^2} : \frac{1}{\Delta^2} = \Delta^2 : \delta^2$ behalten. Was hier S iſt, heiſt bey ihm intenſité de la lumiere.

299. §.

Damit der Verſuch richtig ausfalle, muß von der erleuchteten Fläche alles fremde Licht abgehalten werden, damit jede derſelben ſonſt gar kein Licht ohne nur von der dazu gehörigen Lichtflamme empfange. Wenigſtens müſten beyde Flächen auch von dem übrigen fremden Licht gleich ſtark erleuchtet ſeyn. Am beſten wird der Verſuch im finſtern Zimmer angeſtellet, und Herr Bouguer (ſur la gradation de la lumiere Liv. I. Sect. I. Art. II. p. 9.) empfielt dabey folgende Verrichtung. Man ſetzt ein Paar ebene Flächen AB, BC, unter einem ſtum- 101 F
pfen Winkel zuſammen, ſo daß BD ihre Durchſchnittslinie vorſtellt. Man kann ein Stück Pappe, daß die Geſtalt eines Rechtecks hat, dazu gebrauchen, wenn man es ſo bricht, daß DE den Falz vorſtellt. In F und G werden ein Paar gleich große kreisrunde Löcher von 3 bis 4 Linien im Durchmeſſer geſchnitten, und dieſe werden mit weiſſen Papier auch wohl mit mattgeſchliffenen Glaſe bedeckt. Die Kerzen oder Lampen ſtellt man nun hinter AB und BC auf der erhabenen Seite des Flächenwinkels ABDC. Weil aber die eine Lichtflamme nur nach F, die andre nur nach G hinſcheinen ſoll, ſo bringt man eine Art von Scheidewand, wie DE vorſtellt, dazwiſchen. Die Farbe der Pappe, oder was man ſonſt wählt, muß die ſchwarze ſeyn, um nicht allein alle Zurückwerfungen

des

des Lichts möglichſt zu vermeiden, ſondern auch um deswillen, damit ſich die erleuchteten Papierſcheiben deſto beſſer unterſcheiden. Dieſe muß man mit einem Blick bequem überſehen können, um die Vergleichung der Helligkeit deſto richtiger anzuſtellen: deswegen müſſen ſie auch der Durchſchnittslinie DB nahe ſeyn.

Das Auge ſiehet auf ſolche Art das durchs Papier oder matte Glas durchſcheinende Licht, und um deswillen wird auch wohl das Papier in Oel getränkt, damit es durchſichtiger werde. Man muß dabey vorausſetzen, daß beyde Papierblätter, oder beyde Stücken Glas das Licht gleich ſtark durchlaſſen, und ſelbige um deswillen mit Vorſicht von gleicher Beſchaffenheit wählen.

Ich habe hiemit von des Herrn Bouguer Verfahren eine Beſchreibung geben wollen, ſo wie ich nun bald mehr Veranlaſſung haben werde, von ſeinen Methoden zu reden, nach welchen er photometriſche Verſuche angeſtellet hat. Sonſt ſiehet man wohl, daß die Verſuche ſich auch ſo anſtellen laſſen, wie die Lambertiſchen, davon ich im 12. §. Nachricht gegeben habe. Bey dieſem Lambertiſchen Verfahren ſiehet man grade zu die von den Kerzen erleuchteten Flächen, und das Auge empfängt das von ihnen zurück geworfene, nicht durchſcheinende Licht. Dieſe Art den Verſuch anzuſtellen ſcheint mir ſicherer als jene zu ſeyn.

300. §.

Läßt man das Licht durch ein Sammlungsglaß fallen, ſo iſt die Erleuchtung des deutlichen Bildes

des $I = \frac{M}{\varepsilon^2}$, wenn M die auf das Glas fallende Lichtmenge, und ε die Fläche des deutlichen Bildes bezeichnet. Ich nehme an, das Object ſey vom Glaſe ſo weit entfernt, daß es nicht nöthig iſt, die centrale Erleuchtung von der mittlern Erleuchtung des Bildes zu unterſcheiden, weil alsdenn das deutliche Bild beynahe überall gleichförmig erleuchtet iſt. Der Halbmeſſer der Oefnung des Glaſes ſey $= b$, ſo kann man in dem Fall des 298. §., wenn das Licht von einer Kerze kommt, annehmen, es falle davon auf das Glas die Erleuchtung $\frac{E^2 . S}{\delta^2}$, alſo die Strahlenmenge $M = \frac{\pi E^2 S b^2}{\delta^2}$, und daraus giebt ſich die Erleuchtung des deutlichen Bildes $I = \frac{\pi E^2 . S . b^2}{\delta^2 . \varepsilon^2}$. Ferner ſey g die Entfernung des Bildes vom Glaſe, ſo iſt $\frac{E^2}{\delta^2} = \frac{\varepsilon^2}{g^2}$, alſo $\delta^2 . \varepsilon^2 = E^2 . g^2$, und $I = \frac{\pi . S . b^2}{g^2}$.

Wenn demnach für einen andern leuchtenden Körper β, γ, s, das ſind, was für den erſten b, g, S, waren; ſo hat man für die Erleuchtung des zweyten Bildes $i = \frac{\pi . s . \beta^2}{\gamma^2}$. Richtet man alsdenn wiederum den Verſuch ſo ein, daß $I = i$ wird, ſo hat man $\frac{S . b^2}{g^2} = \frac{s . \beta^2}{\gamma^2}$ mithin $S : s$

=

$= \frac{\beta^2}{\gamma^2} : \frac{b^2}{g^2}$.

Man kann beyden Gläſern einerley Oefnung geben, ſo iſt $b = \beta$, alſo $S : s = \frac{1}{\gamma^2} : \frac{1}{g^2} = g^2 : \gamma^2$. Des erſten Glaſes Brennweite ſey $= f$, des andern $= \varphi$, ſo iſt $g = \frac{\delta f}{\delta - f}$, und $\gamma = \frac{\Delta \cdot \varphi}{\Delta - \varphi}$: mithin $S : s = \frac{\delta^2 f^2}{(\delta - f)^2} : \frac{\Delta^2 \cdot \varphi^2}{(\Delta - \varphi)^2}$, und wenn beyde Brennweiten gleich ſind, $S : s = \frac{\delta^2}{(\delta - f)^2} : \frac{\Delta^2}{(\Delta - f)^2}$.

Wenn $S > s$ iſt, ſo muß $g > \gamma$, alſo $\delta < \Delta$ ſeyn, mithin das ſtärker glänzende Licht dem Glaſe näher gebracht werden, als das ſchwächer glänzende, damit das Bild des erſtern ſich in einen
102F gröſſern Raum ausbreite. In der 102. Fig. ſtellen AB, BC, dieſelben Ebenen vor, die in der 101ſten durch AB, BC vorgeſtellet wurden, F uud G ſind die Oefnungen, FL, G*l*, die auf AB, BC, ſenkrechten Linien, worin man die Lichtflammen L, *l*, ſtellen kann, um ihren Glanz zu vergleichen. Eben dieſe Linien müſſen die Axen der Sammlungsgläſer D und K abgeben. Man kann die eine Entfernung GK, die gröſſer als die Brennweite des Glaſes ſeyn muß, willkührlich annehmen, und um *l* ſo weit entfernen, bis auf BC das deutliche Bild fällt. Wenn nun L ſtärker als *l* glänzt, und anfangs LF ohngefehr = *l*G genommen, D aber ſo weit von AB entfernt iſt, daß das Bild der

Flamme

Flamme L ſich deutlich darſtellet; ſo wird es heller, als das Bild der Flamme *l* ſeyn. Man muß alſo L näher nach AB rücken, und weil dadurch das Bild undeutlich gemacht wird, das Glaß D von AB weiter entfernen, bis das Bild von L deutlich wird. Hiemit wird ſo lange fortgefahren, bis beyde Bilder gleich helle erſcheinen.

301. §.

Man kann bey eben dem Gebrauch der Sammlungsgläſer den Verſuch ſo anſtellen, daß die Entfernungen FL, G*l* willkührlich, alſo auch gleich groß, imgleichen die eine Entfernung GK ebenfalls willkührlich angenommen werden kann, da denn nur nöthig iſt, das Glaß D allein zu verrücken, um in F und G eine gleiche Erleuchtung zuwege zu bringen. Alsdenn muß man die Gründe der Vergleichung des Glanzes beyder Lichtflammen aus dem 206 bis 215 §. hernehmen. Man rücke nemlich das Glas D weiter als um den Abſtand des deutlichen Bildes vor AB weg, ſo wird das Bild auf AB undeutlich: es muß aber nunmehro das falſche Bild von dem ganzen undeutlichen Bilde unterſchieden werden. Man ſetze die Entfernung der Ebene AB vom Glaſe D, wie im 207 §. $= a$, ſo wird hier $a > g$ genommen, und von dem im 215 §. von einander unterſchiedenen ſechs Fällen können hier nur die drey lezten eintreten. Das falſche Bild iſt eigentlich der Raum, welchen alle Zerſtreuungskreiſe mit einander gemein haben, daſſelbe iſt gleichförmig erleuchtet, und zwar ſo ſtark, als wenn alle Zerſtreuungskreiſe mit dem mittlern TS (74 bis 79 Fig.) zuſammen fielen. Der Halb-

meſſer dieſes Zerſtreuungskreiſes ſey = R, die auf das Glas fallende Strahlenmenge = M, ſo iſt des falſchen Bildes Ereluchtung $I = \frac{M}{\pi . R^2}$, und $R = \frac{(a-g)b}{g}$ wofern anders $a > \frac{bg}{b-g}$ iſt, welches im 215 §. der zuletzt betrachtete Fall war. Wäre zwar $a > g$, aber doch $a < \frac{bg}{b-q}$, ferner des projicirten deutlichen Bildes Fläche = ζ^2, ſo hätte man $I = \frac{M}{\zeta^2}$, und $\zeta^2 = \frac{a^2}{g^2} . \varepsilon^2$, des deutlichen Bildes Fläche = ε^2 geſetzt.

Für das andre Licht, deſſen Glanz man vergleichen will, ſey $i, \mu, \varrho, \alpha, \beta, \gamma, \varkappa$, was für das erſtere I, M, r, a, b, g, q, war; auch ſey $\alpha > \frac{\beta . \gamma}{\beta - \varkappa}$: ſo iſt für daſſelbe $i = \frac{\mu}{\pi \varrho^2}$, und $\varrho = \frac{(\alpha-\gamma)\beta}{\gamma}$.
102F In der 102. Fig. ſtellen OP, QR die Zerſtreuungskreiſe vor, denen die Halbmeſſer R und ϱ zugehören. Wenn nun anfangs FL = Gl, und FD = GK genommen iſt, L aber ſtärker als l glänzt; ſo wird OP ſtärker als QR erleuchtet ſeyn. Demnach rücke man das Glas D weiter von AB weg, ſo wächſt der Kreis OP, und ſeine Erleuchtung wird kleiner: alſo kann man es allein durch Verrückung des Glaſes D dahin bringen, daß

daß I = *i* werde, und das giebt $\frac{M}{\pi . R^2} = \frac{\mu}{\pi . \varrho^2}$. Weil nun M von dem Glanz S und μ von dem Glanz *s* abhängt, ſo kann aus dieſer Gleichung das Verhältniß S : *s* gefunden werden; wenn man M und μ gehörig ausdrückt.

302. §.

Es ſey demnach L ſowohl als *l* eine Lichtflamme, ſo kann man dem 284. §. gemäß die Erleuchtung, welche die Vorderfläche des Glaſes D von L empfängt, $= \frac{E^2 . S}{DL^2}$, alſo die auffallende Strahlenmenge $M = \frac{\pi E^2 . S . b^2}{DL^2}$ annehmen. Aus eben dem Grunde iſt die Lichtmenge, welche die Flamme *l* auf das Glas K wirft oder $\mu = \frac{\pi . e^2 . s . \beta^2}{Kl^2}$. Dieſe Werthe in die Gleichung $\frac{M}{\pi R^2} = \frac{\mu}{\pi \varrho^2}$ geſetzt, geben $\frac{E^2 . S . b^2}{R^2 . DL^2} = \frac{e^2 . s . \beta^2}{\varrho^2 . Kl^2}$, alſo $E^2 . S : e^2 . s = \frac{\beta^2}{\varrho^2 . Kl^2} : \frac{b^2}{R^2 . DL^2}$. Ferner war $R = \frac{(a-g)\, b}{g}$, $\varrho = \frac{(\alpha-\gamma)\, \beta}{\gamma}$, alſo hat man $E^2 . S : e^2 . s = \frac{\gamma^2}{(\alpha-\gamma)^2 . Kl^2} : \frac{g^2}{(a-g)^2\, DL^2}$,

 oder

oder $E^2 . S : e^2 . s = \frac{\gamma^2}{GN^2 . Kl^2} : \frac{g^2}{FM^2 . DL^2}$.

Wenn die Gläſer gleiche Brennweiten haben, ſo werden auch g und γ beynahe gleich groß ſeyn, wenn DL, Kl in Vergleichung mit der Brennweite ziemlich groß, und dabey einander nicht ſehr ungleich ſind: alſo kann man beynahe $E^2 . S : e^2 . s = \frac{1}{GN^2 . Kl^2} : \frac{1}{FM^2 . DL^2}$ annehmen, oder $E^2 . S : e^2 . s = FM^2 . DL^2 : GN^2 . Kl^2$.

Nach dieſer Regel verfährt H. Bouguer a. a. O. 10. u. f. S. Richtiger iſt es, wenn man g und γ durch die Brennweite der Gläſer ausdrückt, da dann wenn dieſe gleich groß $= f$ angenommen wird, $g = \frac{DL . f}{DL - f}$, $\gamma = \frac{Kl . f}{Kl - f}$ geſetzt werden muß, und man erhält $E^2 . S : e^2 . s = \frac{1}{GN^2 . (Kl - f)^2} : \frac{1}{FM^2 (DL - f)^2}$ oder $E^2 . S : e^2 . s = FM^2 (DL - f)^2 : GN^2 (Kl - f)^2$. Man findet alſo, wie H. Bouguer a. a. O. Liv. I. Sect. I. Art. VIII. pag. 40. richtig erinnert, auf dieſe Art das Verhältniß der Lichtmengen, welche die Flammen nach allen Seiten um ſich her verbreiten, nicht das Verhältniß des Glanzes beyder Lichtflammen: letzteres wäre $S : s = \frac{FM^2 . (DL - f)^2}{E^2} : \frac{GN (Kl - f)^2}{e^2}$.

Wenn alles Glas vollkommen durchſichtig wäre, ſo würde es nicht nothwendig ſeyn, bey dem Verſuch Glaslinſen von gleicher dicke und mit gleichen Oef-

Oefnungen zu wählen. Weil aber dickeres Glas undurchſichtiger als dünneres iſt; ſo wählt man Linſen ſo viel möglich aus einerley Glasart, und mit völlig gleichen Abmeſſungen, damit nicht zu fürchten ſey, daß die verſchiedene Undurchſichtigkeit der Gläſer das Reſultat des Verſuchs unſicher mache.

303. §.

Sonſt giebt die Vorausſetzung $b = \beta$, auch $E^2 . S : e^2 . s = \frac{1}{\varrho^2 . Kl^2} : \frac{1}{R^2 . DL^2}$, oder $E^2 . S : e^2 . s = R^2 . DL^2 : \varrho^2 . Kl^2$, und vermittelſt dieſer Proportion lieſſe ſich ebenfalls die Vergleichung zwiſchen $E^2 . S$ und $e^2 . s$ anſtellen, wenn man nur R und ϱ richtig meſſen könnte. Wofern ſo wohl L als auch l nur ein einziger Punct wäre; ſo würde das deutliche Bild ſo wohl in M als auch in N nur ein einziger Punct ſeyn; hinter dem Bilde würden ſich die Strahlen wieder ausbreiten, und wo man ſie nun auch hinter dem Bilde mit einer Ebene wie AB, BC, ſenkrecht auffienge, da würden die Kreiſe OP, QR, gleichförmig erleuchtet ſeyn. Was im 208. §. das falſche Bild hies, wäre nun mit dem Zerſtreuungskreiſe einerley, weil es bey der angenommenen Vorausſetzung nur einen einzigen Zerſtreuungskreis geben würde. Eben das ergeben die im 215. §. angegebenen Formuln, weil hier $r = \frac{a . q}{g} = 0$ wäre, $q = 0$ geſetzt, alſo des falſchen Bildes Halbmeſſer $s = \varrho - r = \varrho =$ dem Halbmeſſer des Zerſtreuungskreiſes. H. Bou-

guer a. a. O. empfielt die zulezt angegebene Proportion, zeichnet die Figur ſo, wie hier die 102te, und nimmt OP, QR für die Durchmeſſer 2R und 2ϱ. Dagegen könnte man nun wohl einwenden, daß die Gröſſe der Lichtflammen zu beträchtlich ſey, als daß der ganze erleuchtete Kreis OP, oder QR für denjenigen anzunehmen wäre, wozu der Halbmeſſer R oder ϱ gehörte, welche leztern eigentlich die Zerſtreuungshalbmeſſer ſind; ſtatt deſſen, daß man nach Herrn Bouguer die Halbmeſſer oder Durchmeſſer der beyden undeutlichen Bilder meſſen ſoll. Das deutliche Bild der Lichtflamme iſt kein Kreis, weil die Lichtflamme nicht kreisförmig iſt: demnach iſt auch ſo wenig das projicirte deutliche Bild, als das undeutliche Bild Kreisförmig. Man kann ſich indeſſen von der Mitte der Flamme nach allen Seiten bis an ihren Umfang Halbmeſſer vorſtellen, deren Gröſſe ſich mit ihrer Lage ändert; ſo wird auch q nach eben dem Geſetz veränderlich ſeyn, wovon hiernächſt bey jeder gegebenen Lage der Halbmeſſer des projicirten deutlichen Bildes $r = \frac{a \cdot q}{g}$, und der Halbmeſſer des undeutlichen Bildes $r + R$, ſo wie auch des falſchen Bildes $r - R$ abhängt. Hat nun das Glas eine kurze Brennweite, ſo wächſt $R = \frac{(a-g)\,b}{g}$ ſchneller mit a als $r = \frac{a \cdot q}{g}$, wenn jedes q in Vergleichung mit b ziemlich klein iſt; alſo nähern ſich die Halbmeſſer des undeutlichen Bildes einander deſto mehr, je gröſſer a wird, und die Geſtalt des undeutlichen

Bildes

Bildes nähert ſich der Geſtalt eines Kreiſes. Mißt man nun den Halbmeſſer dieſes undeutlichen Bildes, ſo mißt man $r + R = \frac{aq}{g} + \frac{ab}{g} - b$, und man ſollte eigentlich $R = \frac{ab}{g} - b$ meſſen: mithin iſt der Fehler $= \frac{a \cdot q}{g}$, und derſelbe iſt deſto weniger beträchtlich, je kleiner q in Vergleichung mit b iſt. Dieſer Fehler iſt hier um ſo weniger beträchtlich, weil es hier nur auf das Verhältniß $r + R : r + \varrho$ ankommt: daſſelbe iſt $= \frac{R+r}{\varrho+r} : 1$ $= \left(\frac{R}{\varrho} + \frac{r}{\varrho+r} - \frac{rR}{\varrho(R+r)}\right) : 1$ beynahe $= \frac{R}{\varrho} : 1 = R : \varrho$.

304. §.

Bey Verſuchen dieſer Art bedient ſich H. Bouguer eines Inſtruments unter dem Nahmen eines Lichtmeſſers, deſſen Einrichtungen oben im 253 und 254 §. ſchon iſt beſchrieben worden. Man kann jede der beyden Röhren AB, CD, welche das Werkzeug ausmachen, gegen ein eigenes leuchtendes oder erleuchtetes Object richten, und durch Bedeckung eines Theils der Oefnung des einen dem Object zugekehrten Glaſes es dahin bringen, daß beyde Bilder eine gleiche Klarheit erhalten. Sehr weit entlegene Gegenſtände werden im Brennraum der Gläſer ein deutliches Bild machen. Wenn alſo die Glä- 91 F.

ſer gleiche Brennweiten haben, ſo können beyde Röhren gleich lang ſeyn, und bey gleicher Klarheit der Bilder wird ſich der Glanz des einen Objects zum Glanz des andern, umgekehrt wie die Oefnung der Gläſer verhalten. Bey nicht ſo gar weit entlegenen und ungleich weit entfernten Gegenſtänden, iſt der Abſtand des deutlichen Bildes nicht einerley für beyde Gläſer: demnach werden die Röhren ſo eingerichtet, daß man ſie nach Gefallen verlängern oder verkürzen kann, um jedesmahl ein paar deutliche Bilder zu haben, deren centrale Klarheit man vergleicht: da dann im Fall der Gleichheit dieſer centralen Klarheit aus dem 300. §. die Proportion

$$S : s = \frac{\beta^2}{\gamma^2} : \frac{b^2}{g^2}, \text{ oder } S : s = \beta^2 . g^2 : b^2 . \gamma^2$$

ihre Anwendung findet.

305. §.

103F Noch einfacher wird dies Inſtrument, wenn man es aus zweyen Röhren GA, GB, die an der innern Fläche ſchwarz ſeyn müſſen, bey FG vermittelſt eines Gewindes zuſammenſetzt, ſo daß man die Axen beyder Röhren unter einem gefälligen Winkel gegen einander neigen, und jede derſelben gegen ein gefälliges Object richten kann. Bey C und D ſind ein paar kleine kreisrunde, mit weiſſem Papier oder mattem Glaſe bedeckte Löcher, und die vordern Enden bey A und B haben kreisförmige Oefnungen, etwa von einem Zoll im Durchmeſſer, beyde von gleicher Gröſſe: auch muß die Axe einer jeden Röhre auf den Ebenen der kreisförmigen Oefnungen bey A und C in ihren Mittelpuncten ſenkrecht

recht ſeyn. Noch muß eine dieſer Röhren AC ſo eingerichtet ſeyn, daß man ſie nach Gefallen länger als die andre machen kann, und um deswillen wird das Stück EA bey E in das andre GE hineingeſchoben.

Man richte nun die Röhre DB grade gegen dasjenige Object, welches den ſchwächſten Glanz hat, und hiernächſt CA gegen dasjenige, welches am ſtärkſten glänzt. Wofern nun beyde Objecte, wie hier vorausgeſetzt werden muß, eine ſo große ſcheinbare Ausdehnung haben, daß das Auge in C oder D angenommen, keines von beyden durch die Oefnungen bey A oder B überſehen könnte, ſo wird C ſtärker als D erleuchtet ſeyn, wenn beyde Röhren gleich lang ſind. Um alſo die Klarheit in C zu vermindern, verlängert man die Röhre CA, und ſobald nun auf C und D gleichviel Erleuchtung fällt, verhält ſich der Glanz oder die Klarheit beyder Objecte wie die Quadrate der Länge der Röhren.

Es ſey nemlich HL ein Schnitt durch die Axe 104F
der Röhre, und AC ſtelle ſelbſt die Axe vor, AL den Halbmeſſer der vordern Oefnung; ſo iſt ACL der ſcheinbare Halbmeſſer des Objects, ſoweit es aus C überſehen werden kann: und wenn S der Glanz des Objects iſt, ſo fällt auf C die ſenkrechte Erleuchtung $\pi S \sin ACL^2$. Setzt man nun $AC = a$, $AL = b$, ſo iſt dieſe Erleuchtung $= \frac{\pi S \,.\, b^2}{a^2 + b^2}$. Für das andre Object ſey s, α, β, was hier S, a, b, ſind, ſo fällt auf D die Erleuch- 103F

tung $\frac{\pi . s . \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$; und wenn beyde Erleuchtungen gleich ſind, hat man $\frac{S . b^2}{a^2 + b^2} = \frac{s . \beta}{\alpha^2 + \beta^2}$. Weil überdem $b = \beta$ iſt, ſo erhält man $S : s = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} : \frac{1}{a^2 + b^2}$, oder $S : s = a^2 + b^2 : \alpha^2 + \beta^2$ beynahe $= a^2 : \alpha^2$.

306. §.

In ſolchen Fällen, wenn der Glanz des einen Objects den Glanz des andern ſehr viel mahl übertrift, kann man auch ein Zerſtreuungsglas auf ähnliche Art, wie im 303. §. das Sammlungsglas brauchen, um die durchfallende mit einer weiſſen Fläche ſenkrecht aufgefangene Erleuchtung zu ſchwächen. Das deutliche Bild *qr* liegt vor dem
81 F. Zerſtreuungsglaſe BD, und die Strahlen fahren hinter demſelben nach eben dem Geſetz auseinander, nach welchem ſie hinter dem deutlichen Bilde des Sammlungsglaſes (74. Fig.) auseinander fahren. Der Raum *ef*, welchen alle Zerſtreuungskreiſe mit einander gemein haben, das falſche Bild, (216. §.) iſt gleichförmig erleuchtet, und wenn M die auf das Glas fallende Strahlenmenge bezeichnet, ſo iſt die Erleuchtung dieſes falſchen Bildes $= \frac{M}{\pi . cs^2}$ oder $= \frac{M}{\pi . R^2}$, $cs = R$ geſetzt. Kann man nun $cs = R$ meſſen, welches ſich wenigſtens, ſo weit es hier erfordert wird, beynahe richtig bewerkſtelligen läßt; (M. ſ. die am Ende des 303 §.

bey-

beygefügte Erinnerung,) ſo hat man die Erleuchtung $I = \frac{M}{\pi R^2}$, ſobald M gehörig ausgedruckt iſt. Alsdenn wird M vom Glanz S des leuchtenden Objects abhängen, und man vergleicht denſelben mit dem Glanz eines andern leuchtenden Objects eben ſo, wie im 302 und 303 §. ſchon gewieſen iſt.

307. §.

Herr Bouguer hat auf dieſe Art den Glanz der Sonne vermittelſt des Glanzes einer Kerze mit dem Glanz oder der Klarheit des Mondes verglichen. Am 22 Sept. 1725 als die Sonne 31° hoch über dem Horizont war, ließ er ihr Licht in ein finſteres Zimmer durch eine kreisrunde Oefnung von 1 Linie im Durchmeſſtr fallen, worin er ein Zerſtreuungsglas geſetzt hatte. In einer Entfernung von 5 bis 6 Fuß vom Glaſe fing er das durchfallende Licht auf, da es ſich dann in einen Kreis von 108 Linien im Durchmeſſer ausgebreitet hatte. Hier war alſo R = 54 Linien, und den Halbmeſſer der Oefnung $= b$, den ſcheinbaren Halbmeſſer der Sonne $= \alpha$ geſetzt, war die auf das Glas fallende Strahlenmenge $M = \pi b^2 . \pi S \sin \alpha^2$, und die Erleuchtung der Fläche, die das Licht auffieng $= \frac{\pi b^2 S \sin \alpha^2}{R^2}$. In einer Entfernung $d = 16$ Zoll ward dieſelbe Ebene von einer Kerze eben ſo ſtark erleuchtet. Setzt man alſo den Glanz der Kerze $= s$, den Schnitt durch die Axe der coniſch brennenden Flamme $= E^2$; ſo war $\frac{\pi b^2 S \sin \alpha^2}{R^2}$

=

$= \frac{E^2 . s}{d^2}$. In der darauf folgenden Nacht, als der Vollmond gleichfalls die Höhe von 31° erreicht hatte, ließ er das Mondlicht durch eben das Zerſtreuungsglas fallen, und fing es mit derſelben Fläche ſo nahe beym Glaſe auf, daß es nur einen Kreis von 8 Linien im Durchmeſſer einnahm. Es war alſo $\varrho = 4$ Linien, und wenn der Glanz des Monds $= \Sigma$ geſetzt wird, ſo war $\Sigma = \frac{\pi b^2 \Sigma \sin \alpha^2}{\varrho^2}$, weil der ſcheinbare Durchmeſſer der Sonne und des Monds gewöhnlich beynahe gleich groß ſind. Zugleich ward dieſelbe Ebene von der vorhin gebrauchten Kerze in einer Entfernung $\delta =$ 50 Fuß = 600 Zoll eben ſo ſtark erleuchtet, alſo hatte man $\frac{\pi b^2 \Sigma \sin \alpha^2}{\varrho^2} = \frac{E . s}{\delta^2}$. Das giebt nun

$$S : s = \frac{E^2}{d^2} : \frac{\pi b^2 \sin \alpha^2}{R^2}.$$

$$s : \Sigma = \frac{\pi b^2 \sin \alpha^2}{\varrho^2} : \frac{E^2}{\delta^2}$$

alſo $S : \Sigma = \frac{1}{d^2 . \varrho^2} : \frac{1}{\delta^2 . R^2}$

oder $S : \Sigma = \delta^2 . R^2 : d^2 . \varrho^2$.

Demnach iſt vermöge des Verſuchs $S : \Sigma = 600^2 . 54^2 : 16^2 . 4^2 = 75^2 . 27^2 : 4^2 = 4100625 : 16$, oder $S : \Sigma = 256289 : 1$. Verſuche dieſer Art ſind, wie leicht zu erachten iſt, ſo ſicher nicht, daß bey Wiederhohlung derſelben nicht merklich verſchiedene Zahlen ſollten gefunden werden,

den, wie denn auch die Verſchiedenheit der ſcheinbaren Halbmeſſer der Sonne und des Monds oft nicht ſo ganz unbeträchtlich iſt, daß bey genauerer Rechnung nicht darauf Rückſicht genommen werden müſte. Setzt man den ſcheinbaren Halbmeſſer des Monds $= \beta$, ſo iſt eigentlich $S : \Sigma = \delta^2 . R^2 . \sin \beta^2 : d^2 . \varrho^2 . \sin \alpha^2$. Als im Julius des Jahrs 1725 der Vollmond ein fiel, fand Herr Bouguer $S = 284089 . \Sigma$, und im Auguſt $S = 331776 . \Sigma$; noch einander mahl $S = 302500 . \Sigma$: er ſchließt daraus, man könne als eine Mittelzahl annehmen, der Glanz der Sonne ſey 300000 mahl gröſſer, als die Klarheit des Vollmonds. Man wird nach angeſtellter Vergleichung wahrnehmen, daß dieſe Zahlen von den im 293 und 295 §. gefundenen nicht gar ſehr verſchieden ſind: dieſemnach dürfte die dortige Vorausſetzung $A = \frac{1}{3}$ auch nicht gar ſehr unrichtig ſeyn, wiewohl dieſe Zahl doch nur ſo anzuſehen wäre, daß ſie die mittlere Weiſſe der uns zugekehrten Mondsfläche ausdrücke, weil ſelbige nicht überall einerley Weiſſe hat, wie die Flecken beweiſen.

Der XXIII. Abſchnitt.

Von der ſcheinbaren Klarheit beym undeutlichen Sehen.

308. §.

Eine Sache wird deutlich geſehen, wenn ihre äuſſere Gränzen vollkommen und wohl beſtimmt

ſtimmt erſcheinen, und ihre verſchiedenen Theile, wofern ſie nicht zu klein ſind, nach ihrer verſchiedenen Geſtalt, Gröſſe und Farbe ſich gut unterſcheiden laſſen. Ohne Zweifel ſiehet man in dieſem Verſtande deutlich, wenn alle Strahlen, die von einerley Punct der Sache ausgehen, ſich wieder in einem einzigen empfindlichen Punct der Netzhaut vereinigen: und wofern bey einiger Undeutlichkeit des Bildes auf der Netzhaut auch die Empfindung des Sehens gleichfalls undeutlich iſt; ſo giebt es bey einerley Beſchaffenheit des Auges nur eine beſtimmte Entfernung des Gegenſtandes vom Auge, worin derſelbe recht deutlich geſehen werden kann. Bey dem allen lehrt die Erfahrung, daß wir einerley Sache in ziemlich verſchiedener Entfernung vom Auge ohne ſehr merkliche Veränderung der Deutlichkeit ſehen. Dies hat bey einigen die Vermuthung erreget, es mögten vielleicht die Häute, welche die Capſel der Kryſtallinſe und die proceſſus ciliares ausmachen, die bewundernswürdige Eigenſchaften haben, daß ſie durch ihre mehrere oder mindere Ausdehnung der Linſe nach Erfordern eine plattere oder mehr erhabene Geſtalt geben, und dadurch zuwege bringen können, daß der verſchiedenen Entfernung des Gegenſtandes ungeachtet, doch die Entfernung des deutlichen Bildes dieſelbe bleibe: auch hat man vermuthet, die ganze Kryſtallinſe könnte vielleicht nach Erfordern beym entlegenen Gegenſtande ſich der Netzhaut nähern, beym nähern Gegenſtande aber ſich davon weiter entfernen. Bey dem allen aber läßt ſich aus folgenden Verſuchen ſchlieſſen, daß eben nicht die vollkommenſte

Ver-

Vereinigung der Lichtſtrahlen auf der Netzhaut zum deutlichen Sehen erfordert werde.

309. §.

Man nehme ein Titelbladt von einem Buche, worauf ſich Schrift von drey- oder viererley Gröſſe befindet. Dies Buch bringe man Anfangs in eine ſolche Entfernung vom Auge, daß man jede dieſer Art Schriften ohne Anſtrengung des Auges vollkommen deutlich ſiehet, ſo kann man vorausſetzen, daß in dieſer Entfernung jeder auf den Stern im Auge fallende Strahlenkegel, der von einem Punct eines Buchſtaben kommt, ſeinen Vereinigungspunct auf der Netzhaut habe. Hiernächſt nähere man das Buch dem Auge, oder entferne es dem Auge ſoweit, daß die kleinere Schrift unleſerlich zu werden anfängt, ſo wird man doch die gröſſere noch ohne ſonderliche Anſtrengung des Auges ganz gut leſen können.

Dieſemnach kann man mit Hn. Jurin (in der oben im 237. §. ſchon angeführten Abhandlung: vom deutlichen und undeutlichen Sehen) das **vollkommen deutliche** vom **unvollkommen deutlichen Sehen** unterſcheiden. Wenn man Kürze halber lezteres ſchlechthin das **deutliche Sehen** nennt, ſo beweiſet die eben angeführte Erfahrung, daß ſelbiges beydes zugleich auf die Entfernung und Gröſſe der ſichtbaren Sache beruhe; ſo wie zum **vollkommen deutlichen** Sehen nur eine beſtimmte Entfernung vom Auge erfordert wird, damit ſich alle zu einerley auffallenden Lichtkegel gehörige Strahlen genau wieder in einerley Punct der Netzhaut ſammlen: der Gegenſtand mag übrigens groß oder klein ſeyn, nur daß er nicht wegen ſeiner

Klei-

Kleinigkeit ganz unempfindlich werde. Alle Sachen, ſie mögen groß oder klein ſeyn, erſcheinen in eben der Entfernung vollkommen deutlich, worin eine einzige ſo erſcheint. Weil aber das unvollkommen deutliche Sehen von der Gröſſe und Entfernung der betrachteten Sache zugleich abhängt, ſo kann von zweyen ungleich großen und gleich weit entfernten Sachen die eine deutlich, die andre undeutlich erſcheinen. Vermöge der Erfahrung giebt es bey jeder Gröſſe des ſichtbaren Objects eine kleinſte und eine gröſte Entfernung, wobey die Empfindung anfängt undeutlich zu werden, falls die Entfernung des Objects die eine oder die andre dieſer Gränzen überſchreitet.

310. §.

Soviel iſt man indeſſen berechtiget anzunehmen, daß die Empfindung nicht vollkommen deutlich ſey, wenn das Bild der empfundenen Sache auf der Netzhaut im Auge nicht vollkommen deutlich iſt. Iſt dies Bild bey nahe gelegenen Sachen deutlich, ſo wird daſſelbe bey weit entlegenen Sachen undeutlich ſeyn; und das aus der Urſache, weil das deutliche Bild entlegener Sachen der Kryſtallinſe näher liegt als die Netzhaut. Die Strahlen, welche in den Puncten des deutlichen Bildes ſich vereinigen, fahren hinter demſelben auseinander, und breiten ſich auf derſelben in Zerſtreuungskreiſe aus, wodurch ein undeutliches Bild von der Art entſtehet, wie es die 78ſte und 79ſte Figur vorſtellt, womit der 213 und 214 §. zu vergleichen iſt. Dieſe Beſchaffenheit hat es mit Augen, die man kurzſichtige nennt, ſo wie es mit weitſichtigen

ſichtigen Augen im Gegentheil folgende Bewandniß hat.

Das deutliche Bild eines weit entlegenen Gegenſtandes fällt auf die Netzhaut: wenn aber der Gegenſtand dem Auge näher rückt, ſo werden die Kegel der hinter der Kryſtallinſe zuſammen gehenden Strahlen länger, und ihre Vereinigungspuncte, die das deutliche Bild ausmachen würden, fallen hinter der Netzhaut. Auf der leztern alſo breitet ſich das zu jedem dieſer Strahlenkegel gehörige Licht in einen Zerſtreuungskreis aus, und es entſteht ein undeutliches Bild von der Art, als die 75, 76, oder 77ſte Figur vorſtellt, und worüber im 207 - 212 §. nähere Unterſuchungen ſind angeſtellet worden.

311. §.

Die Gröſſe einer Sache beurtheilen wir aus der Gröſſe ihres optiſchen Winkels POQ am Auge, 87 F.
und dieſem iſt zugleich der Winkel pOq proportional. Wenn man ſich vorſtellt, daß das Bild undeutlich ſey, und daß die Strahlen, welche ſich in q ſammlen ſollten, ſich in einen Zerſtreuungskreis ausbreiten, deſſen Halbmeſſer qr iſt; ſo kann pOr der zum undeutlichen Bilde gehörige optiſche Winkel heiſſen. Wofern nun die ſcheinbare Gröſſe einer undeutlich geſehenen Sache allein von der Gröſſe des erleuchteten Theils der Netzhaut abhängt, ſo ſcheint es, daß man annehmen könnne: dieſe ſcheinbare Gröſſe ſey dem Winkel pOr proportional. Herr Jurin ſetzt dieſe Vorausſetzung bey ſeinen Unterſuchungen über das undeutliche Sehen zum Grunde, und ich werde ſie bis auf fernere Prüfung mit ihm annehmen, weil es

noch darauf ankommen wird, ob alle Erſcheinungen beym undeutlichen Sehen ſich der Erfahrung gemäß daraus erklären laſſen.

312. §.

Gehet man nun bis auf diejenigen Unterſuchungen zurück, welche im 206 und f. §. §. über die Erleuchtung des undeutlichen Bildes einer durchſichtigen Linſe ſind angeſtellet worden; ſo iſt zuförderſt
74 F. zu bemerken, daß die Halbmeſſer Cπ, CI, CS, CE, des projicirten Bildes, des falſchen Bildes, des Zerſtreuungskreiſes, und des ganzen undeutlichen Bildes, ſich wie die Winkel CKπ, CKI, CKS, CKE verhalten, wenn dieſe Winkel ſehr klein ſind: wie ſie allemahl ſeyn werden, wenn nicht allein der betrachtete Gegenſtand, ſondern auch der Durchmeſſer BD der Linſe ſelbſt ſehr klein iſt. Man ſetze alſo wie oben im 206. u. f. §. §. KC $= a$, nehme aber nun die Winkel CKπ $= \frac{C\pi}{a} = r$, CKS $= \frac{CS}{a} = \varrho$ an, und drücke dieſe Winkel in Minuten und Secunden aus; ſo iſt auch $r = \frac{q}{g}$, und $\varrho = \pm \frac{(g-a)b}{a \cdot g}$. Wird ferner CKI $= s$ geſetzt, ſo bleibt $s = \pm (\varrho - r)$, ſo wie CKE $= \varrho + r$. Wenn das r in der eben angezeigten Bedeutung gebraucht wird, ſo iſt r zugleich der ſcheinbare Halbmeſſer des betrachteten Objects, und in dieſer Rückſicht kann man dies r mit H. Jurin den Halbmeſſer des wahren Bildes nennen, wie denn auch Cπ, pr, als kleine zum Mittelpunct K gehörige

hörige Kreisbogen betrachtet, gleich viele Minuten und Secunden faſſen. Uebrigens braucht Hr. Jurin den Ausdruck: Zerſtreuungskreis, auch ſo lange $\varrho < r$ iſt, den Ausdruck: falſches Bild in eben der Bedeutung, die oben im 207. und 208. §. feſtgeſetzt iſt; nur verſteht er nicht den ganzen Ring, der das gleichförmig erleuchtete falſche Bild umgiebt, und deſſen Erleuchtung vom Umkreis des falſchen Bildes bis an die äuſſere Gränze des ganzen undeutlichen Bildes abnimmt, wenn er den Ausdruck: ringförmiger Halbſchatten, braucht.

So lange nemlich $\varrho < r$ mithin des falſchen Bildes Halbmeſſer $= r - \varrho$ iſt, wie in der 77 und 78 Fig., ſo lange wird die Breite LE des Ringes zwiſchen dem Umkreis des falſchen und des ganzen undeutlichen Bildes durch den Umfang des wahren Bildes in π halbirt; und H. Jurin nennt den äuſſerſten Theil zwiſchen dem Umfang des wahren Bildes und die äuſſerſte Gränze des undeutlichen Bildes den ringförmigen Halbſchatten. Ich ſehe nicht, aus welchem Grunde, weil der innere eben ſo breite Ring zwiſchen dem Umfang des falſchen und wahren Bildes würklich eben ſowohl im Halbſchatten liegt, als der äuſſere.

313. §.

Wird $\varrho > r$, wie in der 79 Fig., mithin des falſchen Bildes Halbmeſſer $= \varrho - r$; ſo nennt H. Jurin das ein mattes falſches Bild, was bisher ſchlechthin das falſche Bild geheiſſen hat. Die Urſache werde ich unten anführen, hier bemerke ich nur, daß H. Jurin nun abermahl die Fälle $\varrho - r < r$, und $\varrho - r > r$, unterſcheidet. So lange

$\varrho - r < r$ iſt, ſo lange rechnet er den Ring zwiſchen des falſchen und wahren Bildes Umkreis, deſſen
79 F. Breite Fπ nun $= r - (\varrho - r) = 2r - \varrho$ iſt, nicht mit zum Halbſchatten: mithin iſt bey ihm in beyden betrachteten Fällen des Halbſchattens Breite $= \varrho$. Wird dagegen $\varrho - r > r$; ſo übertrift das falſche Bild das wahre ſo, wie es die 75ſte Fig. vorſtellt: nun verſteht H. Jurin durch den Halbſchatten den ganzen Ring zwiſchen dem Umfang des falſchen und des ganzen undeutlichen Bildes, deſſen Breite $= 2r$ iſt. (M. ſ. H. Käſtners Ueberſ. von Smiths Optik, 485 - 488. S.)

314. §.

Was Herr Jurin hier das wahre Bild nennet, der kleine Bogen $\pi\varkappa$, oder $\varepsilon\zeta$, $\omega\sigma$, (74 Fig.) muß nicht mit dem vollkommen deutlichen Bilde qr verwechſelt werden. Es kann ſonſt der Nahme: das wahre Bild zum Mißverſtand Anlaß geben, und deswegen habe ich oben im 207 §. den Kreis $\pi\varkappa$, oder $\varepsilon\zeta$, $\omega\sigma$, lieber das projicirte Bild nennen wollen. Es iſt wahr, was H. Jurin a. a. O. num. 9 am Ende ſagt: (ich verſtehe die Nummern des Käſtneriſchen Auszugs aus Jurins Abhandlungen) jeder Punct innerhalb des Kreiſes IL (77 Fig. oder EF 78 Fig.) wenn man ihn als den Mittelpunct eines darum beſchriebenen Zerſtreuungskreiſes betrachtet, bekömmt Licht von jedem Punct innerhalb ſeines Zerſtreuungskreiſes, und theilt jedem dieſer Puncte eben ſoviel Licht wieder mit; es iſt aber zweydeutig, wenn daraus geſchloſſen wird: alſo wird er (jeder Punct innerhalb des Kreiſes IL oder EF, 77. 78 Fig.) gleich ſo ſtark erleuch-

erleuchtet, als behielte er ſein Licht allein, und bekäme kein fremdes, wie bey einem vollkommen deutlichen Bilde geſchehen würde. Eben ſo zweydeutig iſt die Erklärung num. 10 wenn es heiſt: dieſen Theil des wahren Bildes, der durch die Zerſtreuung kein Licht verliert, ſondern eben ſo ſtark, und durchaus gleich ſtark erleuchtet iſt, als wenn das Sehen vollkommen wäre, heiſſe ich das falſche Bild. Was hier in der 78 Fig. $\pi\kappa$, EF, iſt, das iſt in der 74ſten $\omega\sigma$, $\varphi\psi$; die Ebene uv ſtellt die Netzhaut vor, das Auge iſt kurzſichtig und das Object zu weit entfernt, als daß es deutlich geſehen werden könnte. Wäre dagegen das Auge weitſichtig, ſo würden die Kegel BrD, BpD, BqD, länger ſeyn, ihre Spitzen würden in $\omega\sigma$ fallen, oder $\omega\sigma$ würde das deutliche Bild ſeyn, und dies wäre nun eben ſo ſtark erleuchtet, als vorhin $\varphi\psi$ erleuchtet war. Ohne zweifel iſt dies die Meinung, und ſo hat alles ſeine Richtigkeit. Wenn aber in dem weitſichtigen Auge alles übrige mit dem vorigen kurzſichtigen einerley, die Entfernung der Netzhaut von der Kryſtallinſe aber kürzer wäre, ſo daß für daſſelbe qr auf der Netzhaut läge, ſo wäre für dies Auge das deutliche Bild qr ſtärker erleuchtet, als das falſche $\varphi\psi$ für jenes kurzſichtige Auge. Man vergleiche den 213 §., und erinnere ſich, daß die Erleuchtung des vollkommen deutlichen Bildes $I = \frac{M}{\pi q^2}$ ſey, ſo wie die Erleuchtung des falſchen Bildes $\varphi\psi$, oder $Y = \frac{M}{\pi r^2} = \frac{g^2 M}{\pi a^2 q^2}$ iſt.

 315. §.

315. §.

Ich habe im 312 §. bemerkt, daß Herr Jurin die Fälle $\varrho < r$ und $\varrho > r$ unterſcheide, daß er im erſten Fall den gleichförmig erleuchteten Kreis, wozu der Halbmeſſer $r - \varrho$ gehört, ſchlechthin das falſche Bild, im zweyten Fall aber den gleichförmig erleuchteten Kreis, wozu der Halbmeſſer $\varrho - r$ gehört, ein mattes falſches Bild nenne. Was zur Rechtfertigung dieſes Sprachgebrauchs a. a. O. 487 S. num. 14. 15. angeführt wird, iſt nur nicht recht deutlich, und wenn es damit ſeine Richtigkeit haben ſoll, ſo muß es, wie ich dafür halte, ſo verſtanden werden. Der Kreis *ef* (74 Fig.) iſt ſo ſtark erleuchtet, als *st* erleuchtet wäre, wenn alle Zerſtreuungskreiſe damit zuſammen fielen: mithin iſt diese Erleuchtung $= \frac{M}{\pi \cdot cs^2}$. Das Auge iſt kurzſichtig, der Gegenſtand zu weit entfernt, als daß er vollkommen deutlich geſehen werden könnte, und *il* ſtellt die Netzhaut vor. Hätte das Auge bey eben der Entfernung der Netzhaut vom Auge diejenige Einrichtung, welche zum vollkommen deutlichen Sehen erfordert wird, ſo würden die Spitzen *r*, *p*, *q*, der Strahlenkegel B*r*D, B*p*D, B*q*D, in Θ, *c*, Δ, liegen, und der Kreis $\Delta\Theta$ wäre das deutliche Bild, ſo wie die Erleuchtung deſſelben $= \frac{M}{\pi \cdot c\Delta^2}$. Weil aber $cs > c\Delta$, ſo iſt jene Erleuchtung kleiner, als dieſe ſeyn würde.

316. §.

Beym undeutlichen Sehen wird das Auge von dem gleichförmig erleuchteten Kern des Bildes auf der

der Netzhaut eben ſo gerührt, als wenn ein in allen Elementen gleich ſtark glänzendes kreisförmiges Object von einem ſcheinbaren Durchmeſſer ſo groß, als der Durchmeſſer des falſchen Bildes in Minuten und Secunden ausgedrückt, von eben dem Auge deutlich geſehen würde: von dem Halbſchattenringe auf der Netzhaut aber eben ſo, als wenn jenes Object noch mit einem Ringe umgeben wäre, deſſen Glanz gegen den äuſſern Umfang zu abnähme. Wenn alſo gleich das Object für ſich überall gleich ſtark glänzt, ſo muß es doch ſo ſcheinen, als wäre nur ein kreisförmiger Theil deſſelben überall gleich ſtark glänzend, die Klarheit des übrigen Ringes aber muß gegen den äuſſern Umfang bis auf nichts abzunehmen ſcheinen. Drückt man die beyden Halbmeſſer r und ϱ in Minuten und Secunden aus, ſo wird $r + \varrho$ der Halbmeſſer des Objects zu ſeyn ſcheinen, das eigentlich unter dem halben optiſchen Winkel r geſehen wird. Weil jedoch der Halbſchattenring ganz nahe bey ſeinem äuſſerm Umfang ſehr ſchwach erleuchtet iſt; ſo kann es ſeyn, daß er daſelbſt nicht empfindlich genug bleibt, und daß das Object unter einem Halbmeſſer geſehen wird, der nicht völlig $= r + \varrho$ iſt.

317. §.

Hat das Object einen ſehr ſtarken Glanz, ſo iſt der Halbſchatten in der Nähe ſeines äuſſern Randes empfindlicher, als wenn der Glanz des Objects ſchwächer wäre: denn in gegebener Entfernung vom Mittelpunct des Ringes, wenn alles übrige gleich iſt, verhält ſich die Erleuchtung wie der Glanz des Objects ſelbſt. Zwey ungleich ſtark glänzende Ob-

jecte alſo, die ſoweit entfernt ſind, daß ſie beym vollkommen deutlichen Sehen einen gleichen ſcheinbaren Halbmeſſer hätten, würden doch beym undeutlichen Sehen, wofern alles übrige gleich bliebe, ungleich groß, das ſtärker glänzende gröſſer als das ſchwächer glänzende, zu seyn ſcheinen.

Wenn man aber hiebey zur Betrachtung der 74 Fig. zurück geht, ſo nimmt man leicht wahr, daß die Gröſſe des Zerſtreuungshalbmeſſers von der Oefnung BD der Linſe abhänge, und in einerley Entfernung KC von der Linſe dem Halbmeſſer der Oefnung proportional ſey. Wie nun die Oefnung des Sterns im Auge veränderlich, bey ſtärkerer Erleuchtung des Bildes kleiner, bey ſchwächerer Erleuchtung gröſſer iſt; ſo erhellet, daß bey gleicher Entfernung gleich groſſer und ungleich ſtark glänzender Objecte, der undeutlich geſehene Halbmeſſer des ſtärker glänzenden Objects um deswillen kleiner ſey als der Halbmeſſer des ſchwächer glänzenden, weil der ſtärkere Glanz die Oefnung des Sterns im Auge, mithin zugleich den Zerſtreuungshalbmeſſer vermindert.

318. §.

Bey den meiſten Perſonen hat das Auge die Einrichtung, welche zum vollkommen deutlichen Sehen bey mittelmäßiger Entfernung des betrachteten Objects erfordert wird: deswegen müſſen ſehr weit entfernte Objecte, dergleichen die Gegenſtände am geſtirnten Himmel ſind, undeutlich geſehen werden. Die Fernröhre, wovon die Dioptrik umſtändlicher handeln wird, zeigen ihren deutlich geſehenen ſcheinbaren Durchmeſſer: könnte man den

undeutlich geſehenen ſcheinbaren Durchmeſſer auch meſſen, ſo lieſſe ſich daraus der Durchmeſſer oder Halbmeſſer des Zerſtreuungskreiſes finden. Wenn nemlich r und ϱ ihre bisherige Bedeutung behalten, und δ den undeutlich geſehenen ſcheinbaren Halbmeſſer bezeichnet; ſo iſt $\delta = r + \varrho$, mithin könnte $\varrho = \delta - r$ aus r und δ gefunden werden. Hr. Jurin a. a. O. n. 20. muthmaßet, daß bey Augen, die man für gut hält, der Zerſtreuungshalbmeſſer 2 Minuten betrage, wenn ſie Gegenſtände am geſtirnten Himmel betrachten. Hätte dies ſeine Richtigkeit, ſo würde man aus dem deutlich geſehenen ſcheinbaren Durchmeſſer der himmliſchen Körper ihren undeutlich geſehenen ſcheinbaren Durchmeſſer leicht finden: auch würde ſich der Durchmeſſer des gleichförmig erleuchteten Kerns vom undeutlichen Bilde auf der Netzhaut daraus ergeben, und unter einem eben ſo groſſen ſcheinbaren Durchmeſſer müſte der mittlere Theil des himmliſchen Körpers einerley Glanz zu haben ſcheinen.

319. §.

Wäre demnach der deutlich geſehene ſcheinbare Durchmeſſer des Vollmonds 32 Minuten, ſo würde ſein undeutlich geſehener ſcheinbarer Durchmeſſer 36 Minuten, der Durchmeſſer des gleichförmig glänzenden Kerns 28 Minuten betragen. Wegen der Schwäche der Erleuchtung gegen den äuſſern Umfang des Halbſchattens würde der empfindliche Durchmeſſer jedoch nicht völlig 36 Minuten betragen. Der Vollmond zeigt indeſſen dieſe Erſcheinung nicht, der Rand erſcheint nicht ſchwächer erleuchtet, als die übrigen Stellen näher beym Mit-

telpunct. Hr. Jurin führt einige Gründe an, woraus nach ſeiner Meinung die Abweichung der würklichen Erſcheinung des Vollmonds von derjenigen, ſo jener Vorausſetzung gemäß zu erwarten wäre, erklärt werden könne. Mich dünkt aber, die Urſache könnte wohl vornemlich dieſe ſeyn, weil wegen der ſchon ziemlich ſtarken Erleuchtung, die der Vollmond ins Auge ſchickt, der Stern im Auge bey Betrachtung deſſelben nur eine ſehr kleine Oefnung hat, weswegen alſo auch der Zerſteuungshalbmeſſer keine beträchtliche Gröſſe haben kann. (317. §.) Geſetzt alſo, dieſer Halbmeſſer betrüge, wie H. Jurin annimmt, bey Betrachtung eines Planeten oder eines Fixſterns zwey Minuten, ſo wird er bey Betrachtung des Vollmonds gewiß ſehr viel kleiner ſeyn, und vielleicht ſo klein, daß die äuſſere Hälfte der Breite des Halbſchattenringes nicht mehr empfunden werden kann. Betrüge der Zerſtreuungshalbmeſſer etwa nur $\frac{2}{3}$ einer Minute, ſo würde vermöge des 20 §. der Optik wegen der ſchwachen Erleuchtung des äuſſern Halbſchattenringes die Erſcheinung eines äuſſern Halbſchattens um den Vollmond wegfallen. Der innere Halbſchatten hätte nur eine eben ſo geringe Breite, ſeine Helligkeit nimmt von der Helligkeit des Kerns durch unmerkliche Stuffen ab, die das Auge ſobald nicht unterſcheidet, und hiezu kommt noch der Vortheil, daß dem äuſſern Rande die Vergleichung mit dem darum befindlichen dunklen Himmel ein noch helleres Anſehen giebt. Auf ſolche Art würde der ſcheinbare Durchmeſſer des Mondes mit bloßen Augen geſehen von demjenigen, welchen die Fernröhre zeigen, nicht merklich verſcheiden ſeyn: auch

könnten die alten Sternforſcher, und beſonders Hevel, deren Augen ohnehin ſehr dazu gewohnt waren, weit entlegene Sachen deutlich zu ſehen; gar wohl den Durchmeſſer des Mondes mit bloſſen Augen gemeſſen, ſehr nahe eben ſo groß gefunden haben, als ihn die Fernröhre zeigen.

Sehr kurzſichtigen Perſonen ſcheint indeſſen der Vollmond merklich gröſſer, als ſolchen, die ſcharf und deutlich in die Ferne ſehen, und es iſt wohl kein Zweifel, daß ſich denſelben nicht ohngefehr eine ſolche Erſcheinung darſtelle, wie den Schlüſſen des 318. §. gemäß iſt.

320. §.

Wenn man in einer ſonſt heitern vom Mondenlicht aber nicht erleuchteten Nacht einen Planeten, oder einen Fixſtern betrachtet, ſo empfängt das Auge nur eine ſehr geringe Erleuchtung, und der Kern hat faſt ſeine gröſte Oefnung: ſind alſo die übrigen Umſtände einerley, ſo iſt der Zerſtreuungshalbmeſſer ohne Zweifel beträchtlich gröſſer, als bey Betrachtung des Vollmonds, und er könnte wohl, wie H. Jurin annimmt, zwey Minuten betragen. Wie nun unter den Planeten keiner iſt, deſſen wahrer ſcheinbarer Halbmeſſer auch in ſeiner kleinſten Entfernung von der Erde eine Minute beträgt, und die Fixſterne durch die beſten Fernröhre nur wie helle Puncte erſcheinen, ſo fällt von denſelben auf die Netzhaut ein mattes falſches Bild, daß bey den Fixſternen dem ganzen undeutlichen Bilde wenigſtens ungemein nahe gleich iſt. Für die Fixſterne hätte man nemlich $\varrho = 2' = 120''$

und

und gewiß $r < 1''$, alſo auch $\varrho - r$ faſt $= 120''$. H. Jurin nimmt an, in der mittlern Entfernung von der Erde ſey

für den Jupiter

$2r = 38''$, $2\varrho = 240''$, das giebt

$2\varrho - 2r = 202''$, und $2\varrho + 2r = 278''$;

für den Mars

$2r = 6''$, $2\varrho = 240''$, alſo

$2\varrho - 2r = 234''$, $2\varrho + 2r = 246''$;

für die Venus

$2r = 18''$, $2\varrho = 240''$, mithin

$2\varrho - 2r = 222''$, $2\varrho + 2r = 258''$.

321. §.

Hat es mit allen dieſen Vorausſetzungen ſeine Richtigkeit; ſo fließt daraus noch dieſe Folge. Wenn zwey Fixſterne einander ſo nahe ſtehen, daß ihre ſcheinbare Entfernung dem Durchmeſſer des Zerſtreuungskreiſes gleich iſt, ſo müſſen beyde einander zu berühren ſcheinen, ſo wie überhaupt ihre Entfernung von einander, der Bogen zwiſchen ihren Mitelpuncten ſeyn wird, um den Durchmeſſer des Zerſtreuungskreiſes vermindert. Iſt der Abſtand beyder Fixſterne von einander kleiner, als der Zerſtreuungsdurchmeſſer, mithin nach Jurins Beſtimmung kleiner, als 4 Minuten; ſo ſehen beyde wie ein einziger Stern aber heller aus, als einer allein ausſehen würde, weil ihre undeutlichen Bilder zum Theil zuſammen fallen. Dies würde alſo eine Methode an die Hand geben, den Zerſtreuungshalbmeſſer zu finden, wenn man den Abſtand zweyer

Fix-

Fixſterne, die einander zu berühren ſcheinen vermittelſt des Fernrohrs und anderer in der Aſtronomie zu beſchreibenden Verrichtungen ſuchte: der gefundene Abſtand wäre der geſuchte Zerſtreuungsdurchmeſſer. Umſtändliche Anwendungen hievon auf die Fixſterne und Planeten gehören in die Aſtronomie: hier muſten indeſſen die optiſchen und photometriſchen Gründe davon vorgetragen werden.

322. §.

So ſinnreich übrigens H. Jurins Vortrag über die Erſcheinungen des undeutlichen Sehens iſt; ſo wenig ſcheinen doch ſeine Vorausſetzungen demjenigen, was bekannte Erfahrungen lehren, völlig gemäß zu ſeyn. Die Formul für den Zerſtreuungshalbmeſſer war $\varrho = \frac{(a-g)b}{g}$, (213. §.) und in derſelben iſt b der Halbmeſſer der Oefnung des Sterns im Auge, g die Länge der Axe der Strahlenkegel hinter der Kryſtallinſe als ihrer Grundfläche, aus deren Spitzen das deutliche Bild beſtehet, $a - g$ der Abſtand der Netzhaut von dem deutlichen Bilde, oder die Länge der Axe der den vorigen entgegen geſetzten Strahlenkegel, wovon jeder einen Zerſtreuungskreis auf der Netzhaut zur Grundfläche hat. Dieſe erwehnten drey Gröſſen ſind für alle Fixſterne einerley; mithin müſte auch ϱ für alle einerley ſeyn, und das heiſt: alle Fixſterne müſten gleich groß zu ſeyn ſcheinen. Es iſt aber eine ſehr bekannte Sache, daß die Fixſterne, eben wegen ihrer ſehr merklich verſchiedenen ſcheinbaren Gröſſe, ſchon von den älteſten Aſtronomen in ſechs bis ſieben

ben Claſſen nach der Ordnung ihrer ſcheinbaren Gröſſe ſind eingetheilt worden. Noch jezt unterſcheidet man aus demſelben Grunde Sterne erſter, zweyter Gröſſe, und ſo ferner bis zur ſechſten und ſiebenden Gröſſe von einander. Es muß alſo entweder für Sterne die zu verſchiedenen von den erwehnten Claſſen gehören, der Zerſtreuungshalbmeſſer verſchieden ſeyn; oder es muß beym undeutlichen Sehen noch ein anderer vom Hn. Jurin nicht bemerkter Umſtand hinzu kommen, aus welchem ſich dieſe Verſchiedenheit in der ſcheinbaren Gröſſe der Fixſterne erklären läßt.

323. §.

Herr Lambert (Photom. Part. VI. Cap. II. §. 117. ſqq. pag. 495. ſqq.) hebt dieſe Schwierigkeit auf folgende Art. Er nimmt an, das undeutliche Bild auf der Netzhaut ſey zwar für alle Fixſterne gleich groß, und dem Zerſtreuungskreiſe gleich, es ſey aber nicht für alle in ſeinem ganzen Umfange empfindlich. Deswegen unterſcheidet er das erleuchtete Bild des Fixſterns von dem empfindlichen Bilde deſſelben, da dann das letztere für verſchiedene Fixſterne, wegen der Verſchiedenheit ihres Glanzes und der verſchiedenen Lebhaftigkeit, womit das von ihnen ins Auge geſchickte Licht die Netzhaut und ihre Fibern rührt, gar wohl verſchieden ſeyn könnte, wenn gleich das erſte für alle gleich groß wäre. Es könnte wohl ſeyn, daß diejenigen Fibern und Nervenfäſerchen der Netzhaut, welche das erleuchtete Bild zunächſt umgeben, wegen ihrer Verbindung unter einander mit gereizt werden, und daß dadurch die Empfindung

dung einer mehrern Gröſſe des betrachteten Objects veranlaſſet wird, als dem erleuchteten Bilde allein gemäß wäre. Bey lebhafterm Lichte könnte alſo wohl der Umfang des empfindlichen Bildes gröſſer als beym ſchwächern Licht ſeyn, wenn letzteres die Fibern der Netzhaut nicht ſo lebhaft rührt. Hiernach würden alſo ſowohl die Sätze des 321 §. als auch andere Folgen, die H. Jurin aus ſeinen Vorausſetzungen herleitet, zu berichtigen ſeyn. Wie aber bey verſchiedenen Perſonen die Beſchaffenheit der Augen ſehr verſchieden iſt, ſo wird doch faſt jeder Beobachter denſelben Fixſtern unter einer eigenen ſcheinbaren Gröſſe ſehen, und es läßt ſich für die Gröſſe des Halbmeſſers des erleuchteten ſo wenig, als des empfindlichen Bildes etwas gewiſſes feſtſetzen.

Der XXIV. Abſchnitt.

Allgemeine Geſetze der Schwächung des Lichts in durchſichtigen Maſſen.

324. §.

Wenn das Licht auf eine durchſichtige Maſſe fällt, ſo hängt die Menge des zurückgeworfenen Lichs nicht allein von der Dichtigkeit dieſer durchſichtigen Maſſe, ſondern zugleich von der Dichtigkeit derjenigen Maſſe ab, aus welcher das Licht auf jene auffällt. Es ſcheint daß dieſe mehrere oder mindere Zurückwerfung des Lichts von

eben den Urſachen herrühre, welche die Brechung des in die Maſſe eindringenden Lichts verurſachen, denn die Verſuche lehren, daß mit einer ſtärkern Brechung des Lichts, auch eine ſtärkere Zurückwerfung verbunden iſt, als mit einer geringern Brechung. Wofern aber eben die Urſachen, welche die Brechung des Lichts bewürken, auch die Zurückwerfung zu wege bringen, ſo wird, falls alles übrige einerley bleibt, auch die Menge des zurückgeworfenen Lichts einerley bleiben, es mag die Maſſe, welche es zurück wirft, das hineindringende Licht mehr oder weniger zerſtreuen, ſie mag mehr oder weniger durchſichtig ſeyn, wenn ſich nur ihre übrige Beſchaffenheit nicht ändert.

Herr Lambert füllte ein irdenes inwendig ſchwarz glaſürtes Gefäß mit dem klärſten Waſſer, ein anderes Gefäß von eben der Art aber mit recht ſchwarzer Dinte. Er brachte beyde Gefäße unter den freyen Himmel, betrachtete das Bild deſſelben, in beyden Gefäßen, und fand daſſelbe von gleicher ſcheinbaren Klarheit. Eben den Verſuch wiederhohlte er zur Nachtzeit, und betrachtete in beyden Gefäßen das Bild einer weiſſen Wand, die er mit einem davon etwas entfernten Licht erleuchtet, und wobey er alles ſo eingerichtet hatte, daß die Einfalls- und Zurückwerfungswinkel auf den Flächen beyder flüßigen Maſſen einerley Gröſſe erhielten. Beyde Bilder hatten wiederum eine gleiche ſcheinbare Klarheit. (Photom. P. II. C. I. §. 328.) Die Gefäße muſten um deswillen inwendig eine ſchwarze Fläche haben, weil ſonſt der weiſſe Grund durch das klare Waſſer durchgeſchienen, das daher rührende Licht ſich mit dem Licht, was das Bild ins Auge

ſchickte,

ſchickte, vermiſcht, und es klärer gemacht hätte, als es die Zurückwerfung allein machte.

325. §.

Bey dergleichen ſcheinbaren Klarheit war alſo zugleich die würkliche Klarheit beyder Bilder einerley, und jeder Punct des einen Bildes ſchickte ſoviel Licht ins Auge, als der damit zuſammengehörige Punct des andern Bildes. Weil nun für beyde auch die auffallende Strahlenmenge einerley war, ſo hatte für beyde Maſſen die zurückgeworfene Lichtmenge zur auffallenden einerley Verhältniß, obgleich die eine Maſſe ſehr durchſichtig, die andre völlig undurchſichtig war. Der in der Dinte aufgelöſete Vitriol, mogte die Brechung des Lichts in derſelben wohl etwas vermehren, weswegen der angenommenen Regel gemäß, auch die Zurückwerfung von der Dinte ſtärker, als von dem klaren Waſſer ſeyn muſte; es war aber der Unterſchied für das Auge unempfindlich, wie denn auch dadurch die brechende Kraft der Dinte nur um ein geringes vergrößert ward.

Es ſcheint, daß gegen den Schluß nichts erhebliches einzuwenden ſey: es werde eben das von allen Graden der Undurchſichtigkeit gelten, was von den beyden äuſſerſten gilt. Dieſemnach wird bey einerley Einfallswinkel und gleicher auffallenden Lichtmenge das Waſſer gleichviel Licht zurück werfen, es mag ſo undurchſichtig ſeyn, als es wolle. Die Rede iſt hier, wie man leicht ſiehet, von dem ſpiegelartig zurückgeworfenen Licht, und die Menge deſſelben hängt, vermöge des Ver-

ſuchs, von der Undurchſichtigkeit der zurückwerfenden Maſſe nicht ab.

326. §.

Man erinnere ſich nun wieder an dasjenige, was von der dreyfachen Zertheilung des auf eine durchſichtige Maſſe fallenden Lichts im 195 bis 197 §. vorgetragen iſt, und halte ſich an die daſelbſt ſchon feſtgeſetzten Begriffe einer vollkommenen und unvollkommenen Durchſichtigkeit. In dem Verſtande iſt keine Maſſe in der Natur durchſichtig, daß ſie alles auffallende Licht durchlieſſe, gar nichts zurück würfe. Die mehrere oder mindere Durchſichtigkeit hängt ab von der geringern oder gröſſern Menge des innerhalb der Maſſe, wie auch an der zurückwerfenden und brechenden Fläche ſelbſt zerſtreueten Lichts. Eine vollkommen durchſichtige Maſſe wäre diejenige, welche gar kein Licht zerſtreuete, und alles, was nicht ſpiegelartig zurückgeworfen wird, durchlieſſe. In vollkommen durchſichtigen Maſſen ſind die Theilchen, welche den Durchgang des auf ſie fallenden Lichts hindern, oder ſelbiges innerhalb der Maſſe zerſtreuen, entweder durch die ganze Maſſe gleichförmig, oder ungleichförmig vertheilt. Im erſten Fall kann ſie eine gleichförmig durchſichtige Maſſe, im letztern Fall eine ungleichförmig durchſichtige Maſſe heiſſen. Die folgenden Unterſuchungen werden vor der Hand allein auf die erſte Art der unvollkommen durchſichtigen eingeſchränkt ſeyn, bis ausdrücklich das Gegentheil wird erinnert werden.

227. §.

Es ſey nun HFGI eine zwiſchen zwoen paralle- 105. Fig.
len Ebenen FG, HI, eingeſchloſſene durchſichtige Maſſe; man ſtelle ſich ſelbige in ſoviele Schichten von gleicher Dicke als man will, mittelſt ſolcher Ebenen eingetheilt vor, die mit den vorigen parallel ſind. Wenn nun in B die Lichtmenge L ſenkrecht auffält, ſo geht gleich anfangs wegen der Zurückwerfung ein Theil davon ab, der übrige Theil dringt in die Maſſe hinein. Es ſey dieſer Theil = Λ, und derſelbe vermindere ſich in dem Verhältniß $1 : m$, indem er um die Tiefe BC eindringt, ſo daß in C die Lichtmenge $m\Lambda$ anlangt. Man nehme ferner CD = BC an, und ſetze $m\Lambda = \lambda$, ſo frägt ſich nun: in welchem Verhältniß dieſer Theil λ abnimmt, indem er ferner um die Tiefe CD eindringt? Weil die Maſſe von gleichförmiger Durchſichtigkeit angenommen wird, ſo ſind von C bis D eben die Urſachen der Zerſtreuung des Lichts vorhanden, die von B bis C vorhanden waren; und deswegen hat man keinen Grund anzunehmen, daß ſich die Lichtmenge λ von C bis D in einem andern Verhältniß vermindere, als dasjenige war, in welchem ſich die Lichtmenge Λ von B bis C verminderte. Man nehme alſo bis auf weitere Prüfung an, die Lichtmenge λ vermindere ſich von C bis D wiederum in dem Verhältniß $1 : m$, ſo wird in C die Lichtmenge $m\lambda = m^2\Lambda$ anlangen. Es ſey BC = c, ſo will dieſe angenommene Vorausſetzung ſoviel ſagen: wenn das Licht in der durchſichtigen Maſſe die Wege c, $2c$, $3c$, $4c$, u. ſ. f. zurück gelegt hat; ſo hat ſich die anfänglich bey B hineindringende Lichtmenge Λ in die Lichtmengen

$m\Lambda$, $m^2\Lambda$, $m^3\Lambda$, $m^4\Lambda$, mithin überhaupt in die Lichtmenge $m^n\Lambda$ verändert, wenn der Weg, welchen das Licht in der durchſichtigen Maſſe zurück gelegt hat, $= nc$ iſt.

328. §.

Nun ſey $m^n\Lambda = Z$, ſo iſt $m^n = \frac{Z}{\Lambda}$, und wenn man die Logarithmen hievon nimmt, ſo hat man $n \,.\, lm = l\,\frac{Z}{\Lambda}$. Weiter ſey $nc = x$, ſo iſt $n = \frac{x}{c}$, und man erhält die Gleichung $\frac{x}{c}\ lm = l\,\frac{Z}{\Lambda}$. Das Verhältniß $Z : \Lambda$ läßt ſich durch ein paar Linien ausdrücken, die ich mit y und a bezeichnen will, ſo daß $Z : \Lambda = y : a$ iſt, und man erhält $\frac{x}{c}\ lm = l\,\frac{y}{a}$. Wie nun jede unbeſtimmte Gleichung zwiſchen zwoen veränderlichen Gröſſen die Natur einer gewiſſen krummen Linie ausdrückt;
106. Fig. ſo nehme man an, daß CEM diejenige Linie ſey, wofür die Gleichung $\frac{x}{c}\ lm = l\,\frac{y}{a}$ gehört. Ferner ſey AB die Abſciſſenlinie, die Ordinaten PM $= y$ darauf ſenkrecht, und A der Anfangspunct der Abſciſſen AP $= x$; ſo wird erfordert, daß $y = a$ ſey, wenn $x = 0$ iſt, alſo AC $= a$. Weiter ſey AD $= c$, ſo muß $\frac{y}{a} = m$ ſeyn, wenn x

= AD

$= AD = c$ iſt, oder $\frac{y}{a} = \frac{\lambda}{\Lambda}$. Es ſey $\Lambda : \lambda$ $= a : b$, und $DE = b$, ſo hat man $m = \frac{b}{a}$, und $\frac{x}{c}\, l\, \frac{b}{a} = l\, \frac{y}{a}$. Weil übrigens $l\, \frac{a}{b} = -$ $l\, \frac{b}{a}$, und $l\, \frac{a}{y} = -\, l\, \frac{y}{a}$ iſt, ſo hat man auch $l\, \frac{a}{y} = \frac{x}{c}\, l\, \frac{a}{b}$. Aus dieſer Gleichung kann für jede Abſciſſe $x = AP$ die dazu gehörige Applicate $y = PM$, vermittelſt der Logarithmen Tafeln gefunden werden, und die ſolchergeſtalt verzeichnete krumme Linie, ſtellt mit ihren Abſciſſen und Applicaten ein ganzes logarithmiſches Syſtem vor: deswegen heiſt ſie auch in der höhern Geometrie die logarithmiſche Linie.

Nimmt man ſtatt A einen andern Anfangspunct der Abſciſſen in H an, und ſetzt $HP = w$, $AH = k$, $HK = \alpha = \frac{1}{n}\, a$, alſo $a = n\alpha$, ſo hat man $x = k + w$, und es iſt $l\, \frac{n\alpha}{y} = \frac{k + w}{c}\, l\, \frac{a}{b}$, oder $l\, \frac{\alpha}{y} + ln = \frac{k + w}{c}\, l\, \frac{a}{b}$. Es iſt aber $ln = l\, \frac{a}{\alpha} = \frac{k}{c}\, l\, \frac{a}{b}$, alſo erhält man auch $l\, \frac{\alpha}{y} = \frac{w}{c}\, l\, \frac{a}{b}$, oder $\frac{w}{l(\alpha : y)}$

$= \frac{c}{l(a:b)}$, und dieſe Gleichung iſt der vorigen l

$\frac{a}{y} = \frac{x}{c} \; l \frac{a}{b}$, die man auch ſo ausdrücken

kann $l \frac{x}{(a:y)} = \frac{c}{l(a:b)}$, in allem ähnlich. Wenn alſo die logarithmiſche Linie ſchon verzeichnet iſt, und man nimmt ein Paar Abſciſſen AD, HP, wo man will, durch deren Endpuncte die Applicaten AC, DE, und HK, PM, gezogen ſind; ſo verhalten ſich die Abſciſſen, wie die Logarithmen der Verhältniſſe der beyden zu jeder Abſciſſe gehörigen Applicaten.

329. §.

Es iſt an ſich gleichgültig, was man für Logarithmen brauchen will, wenn man aus der Gleichung $l \frac{a}{y} = \frac{x}{c} \; l \frac{a}{b}$ rechnet: wenn man aber die beſtändige Linie $\frac{c}{l(a:b)} = f$ ſetzt, ſo hat man $\frac{x}{l(a:y)} = f$ und man muß nun bey den Rechnungen aus der lezten Gleichung die Logarithmen deſſelben Syſtems behalten, welches man bey Berechnung der Linie f gebraucht hat. Es ſey nemlich $x = f$, wenn $y =$ FG iſt, ſo hat man $\frac{f}{l(AC:FG)} = \frac{c}{l(a:b)}$: wenn alſo $f = \frac{c}{l(a:b)}$ ſeyn ſoll, ſo muß l (AC : FG) $= 1$ ſeyn. Demnach

nach iſt AC : FG das Fundamental-Verhältniß des Syſtems, welches die Logarithmiſche Linie vorſtellt, und in der Gleichung $\frac{x}{l(a:y)} = f$, iſt f die Abſciſſe zwiſchen zweyen Applicaten, deren Verhältniß gegen einander das Fundamental-Verhältniß des Syſtems iſt. Es ſey alſo AC : FG $= e : 1$, und e die baſis der natürlichen Logarithmen, ſo iſt von nun an in der Gleichung $l \frac{a}{y} = \frac{x}{f}$ allemahl das l das Zeichen des natürlichen Logarithmen.

Man nehme an, die Abſciſſe AP $= x$ wachſe um das Stück P$p = \Delta x$, pm ſey die Applicate durch p, und mR, Mr, mit Pp parallel; ſo iſt $rm = \text{RM} = \Delta y$, die Differenz um welche y abnimmt, wenn x um die Differenz Δx wächſt. Die Sehne durch M und m ſchneide die Axe AB in t, ſo iſt $\text{tang PM}t = \frac{\text{R}m}{\text{RM}} = \frac{\Delta x}{\Delta y}$. Wenn aber Δx und zugleich Δy nach und nach abnehmen, ſo nähert ſich die Lage der Linie Mt der Lage der Linie MT, welche die Krumme Linie CEM in M berührt, und fällt mit ihr zuſammen, wenn Δx und Δy verſchwinden, ſo daß man $\frac{dx}{dy} = \text{tang PMT}$ erhält. Nun iſt PT die Subtangente (299. §. Perſp.) und man hat für ſelbige die allgemeine Formul PT $= y \cdot \text{tg PMT} = \frac{ydx}{dy}$.

Die Gleichung für die Logarithmiſche Linie läßt ſich ſo ausdrücken $la - ly = \frac{x}{f}$, und die Differentialrechnung giebt $-\frac{dy}{y} = \frac{dx}{f}$, alſo $\frac{ydx}{dy} = -f$, oder die Subtangente PT $= - f$. Das Zeichen (—) bezieht ſich nur auf die Lage der Linie PT, die wenn y, wie im gegenwärtigen Fall abnimmt, indem x wächſt, nicht mit PA auf einerley Seite von PM, ſondern PA gegen über liegt; ſo wie gegentheils PT mit PA auf einer Seite von PM liegt, wenn y mit x wächſt. Demnach iſt die Subtangente der Logarithmiſchen Linie überall von einerley Gröſſe, wo auch der Punct M genommen wird, ſie iſt der Abſciſſe zwiſchen zweyen Ordinaten gleich, deren Verhältniß gegen einander das Fundamental-Verhältniß des natürlichen Logarithmen-Syſtems iſt. Auch findet man die Subtangente $f = \frac{c}{\text{log. nat. } (a : b)}$ für eine gegebene Logarithmiſche Linie, wenn irgend ein Stück der Abſciſſenlinie AD $= c$, und das Verhältniß der Applicaten AC : DE $= a : b$ durch die Endpuncte deſſelben gegeben iſt.

330. §.

Nun ſey wie im 328 §. $a : b = \Lambda : \lambda$ das Verhältniß, in welchem ſich das Licht vermindert,
105. Fig. wenn es in die durchſichtige Maſſe HFGI um die Tiefe BC $= c$ eindringt; ſo ſtellt die Logarithmiſche Linie CEM (106 Fig.) mit ihren Abſciſſen und Ordinaten das Geſetz vor, nach welchen das Licht in der

der durchſichtigen Maſſe abnimmt. Die Abſciſſe x ſtellt jede unbeſtimmte Tiefe BP vor, um welche das Licht eindringt, und das Verhältniß der Ordinaten $a : y = \Lambda : Z$ iſt dem Verhältniß gleich, in welchem das Licht abnimmt, wenn es um dieſe Tiefe eindringt. Hat man durch einen Verſuch gefunden, in welchem Verhältniß $a : b$ ſich das Licht vermindert, wenn es in eine gewiſſe Maſſe um die bekannte Tiefe c eindringt, ſo findet man leicht die Subtangente PT $= \frac{c}{\text{log. nat. } (a : b)}$ für die logarithmiſche Linie, deren Ordinaten nach eben dem Geſetz abnehmen, wie das Licht in der durchſichtigen Maſſe abnimmt. Herr Bouguer nennt ſie die Lichtverminderungslinie (Gradulicique) für dieſe Maſſe. (Traité d'optique ſur la gradation de la lumiere Liv. III. Sect. I. p. 235.) Uebrigens kann man am bequemſten, vermittelſt der Gleichung $l \frac{a}{y} = \frac{x}{c} \; l \frac{a}{b}$ das Verhältniß $a : y$ gefunden werden, in welchem ſich das Licht vermindert, wenn es in eben der Maſſe jeden andern Weg x zurück leget: und weil es gleichgültig iſt, welche Logarithmen man bey dieſer Rechnung brauchen will, ſo können die Briggiſchen Tafeln gebraucht werden. Auch umgekehrt findet man den Weg $x = \frac{c \cdot l\,(a : y)}{l\,(a : b)}$, den das Licht in eben der Maſſe zurück legen muß, wenn es in jedem andern Verhältniß $a : y$, daß von $a : b$ verſchieden iſt, abnehmen ſoll.

331. §.

Wenn Maſſen von verſchiedener Art nicht gleich durchſichtig ſind, ſo ſind die Subtangenten für die Lichtzerſtreuungslinien dieſer Maſſen verſchieden. Man nehme an, daß F und f dieſe Subtangenten für zwey verſchiedene Maſſen ſind: die der erſtern zugehörige Gleichung ſey $l\,\frac{A}{Y} = \frac{X}{F}$, für die andere aber gehöre die Gleichung $l\,\frac{a}{y} = \frac{x}{f}$. Soll nun in beyden Maſſen das Licht in gleicher Verhältniß abnehmen, ſo ſoll $A : Y = a : y$ ſeyn, und das giebt $\frac{X}{F} = \frac{x}{f}$, oder $X : x = F : f$. Dieſemnach verhalten ſich die Tiefen um welche das Licht eindringen muß, wie die Subtangenten der Lichtzerſtreuungslinie, wenn das Licht in ungleich durchſichtigen Maſſen in gleicher Verhältniß abnehmen ſoll.

Soll dagegen das Licht in beyde Maſſen gleich tief eindringen; ſo ſoll $x = X$ ſeyn, mithin $F \,.\, l\,\frac{A}{y} = f \,.\, l\,\frac{a}{y}$, und $l\,\frac{A}{Y} : l\,\frac{a}{y} = f : F$. Demnach ſtehen die Logarithmen der Verhältniſſe in welchen das Licht abnimmt, wenn es in ungleich durchſichtigen Maſſen gleiche Wege zurück legt, im umgekehrten Verhältniß der Subtangenten ihrer Lichtzerſtreuungslinien.

332. §.

Die Durchſichtigkeit zwoer Maſſen von verſchiedener Art, wovon jedoch jede

für ſich gleichförmig durchſichtig iſt, mit einander zu vergleichen.

Aufl. Je tiefer das Licht in eine ſolche Maſſe eindringt, bevor es in einem gegebenen Verhältniß abnimmt, deſto durchſichtiger iſt die Maſſe. Wäre das Verhältniß der Lichtverminderung in beyden gleich, und die eine zweymahl ſo dick wie die andre, ſo wäre jene noch mahl ſo durchſichtig als dieſe: alsdenn aber wäre die der erſten zugehörige Subtangente nochmahl ſo groß, als diejenige, ſo der zweyten zugehört. Bleibt daſſelbe Verhältniß der Lichtverminderung, wenn die eine *n* mahl dicker als die andre iſt; ſo iſt jene *n* mahl durchſichtiger: aber auch die zur erſten gehörige Subtangente iſt *n* mahl gröſſer, als die, welche zur zweyten gehört. (331. §.) Demnach verhalten ſich die Durchſichtikeiten zweyer Maſſen, wie die Subtangenten der dazu gehörigen Lichtzerſtreuungslinien.

Man kann ſich auch vorſtellen, eine dieſer Maſſen ſey noch mahl ſo durchſichtig als die andre, wenn bey gleicher Dicke das Verhältniß der Lichtverminderung bey der erſten nur halb ſo groß, als bey der zweyten iſt: alſo des erſten Verhältniſſes Logarithme halb ſo groß, als des zweyten Logarithme. Ueberhaupt würde ſich alſo die Durchſichtigkeit umgekehrt verhalten, wie der Logarithme des Verhältniſſes der Lichtverminderung bey gleicher Dicke. Aber der Logarithme dieſes Verhältniſſes verhält ſich umgekehrt, wie die Subtangente der Lichtzerſtreuungslinie, mithin kommt man auch auf dieſem Wege auf die vorhin ſchon gefundene Regel.

333. §.

Braucht man bey Berechnung der Subtangente $f = \frac{c}{l\,(a\,:\,b)}$ die Briggiſchen Logarithmen, ſo wird f diejenige Tiefe, um welche das Licht in die Maſſe dringen muß, wenn das Verhältniß der Lichtverminderung, $= 10 : 1$ ſeyn ſoll. Braucht man dagegen die natürlichen Logarithmen, ſo iſt das Verhältniß der Lichtverminderung $= e : 1 = 2{,}71828 : 1$, wenn das Licht in der Maſſe den Weg f zurück legt. Sucht man nur das Verhältniß der Durchſichtigkeiten, ſo iſt es gleichgültig, ob man die Briggiſchen oder die natürlichen Logarithmen braucht, nur muß man für beyde Maſſen, wie für ſich klar iſt, einerley Logarithmen brauchen. Bey ſehr durchſichtigen Maſſen iſt indeſſen der Weg ſehr groß, den das Licht zurück legen muß, wenn es zehnmahl ſchwächer werden ſoll; alsdenn ſetzt man bequemer das Verhältniß $e : 1$ zum Grunde. wenn nun m den Modulus des Briggiſchen Syſtems bedeutet, ſo iſt $\log.\,\mathrm{nat.}\,\frac{a}{b} = \frac{1}{m}\,.\,\log.\,\mathrm{tab.}\,\frac{a}{b}$, und man findet $f = \frac{m\,.\,c}{\log.\,\mathrm{tab.}\,(a\,:\,b)}$. Alsdenn nimmt das Licht in dem Verhältniß $e : 1$ ab, wenn es in der Maſſe den Weg $= f$ zurück legt, und die Lichtzerſtreuungslinie ſtellt das natürliche Logarithmen-Syſtem vor. Aus dem 163 §. Allg. Rech. weis man, daß $m = 0{,}4342944 = \frac{1}{2{,}302585}$ ſey,

mithin

mithin iſt $f = \frac{0,4342944 \cdot c}{\text{log. tab. } (a : b)}$, oder $f =$

$\frac{c}{2,302585 \cdot \text{log. tab. } (a : b)}$ als das Maaß der Durchſichtigkeit der Maſſe zu betrachten. Eben dieſe Linie giebt auch für ſich ſchon einen Begrif von der Durchſichtigkeit der Maſſe, weil ſie mit derjenigen Tiefe einerley iſt, um welche das Licht eindringen muß, bevor es in dem Verhältniß $e : 1$ beynahe $= 19 : 7$ oder $= 8 : 3$ geſchwächt wird.

334. §.

Das Geſetz zu finden, nach welchem das Licht geſchwächt wird, wenn es ſich in einer durchſichtigen Maſſe von einem leuchtenden Punct nach allen Seiten ausbreitet. 106. Fig.

Aufl. Es ſey AB die Axe der logarithmiſchen Linie CEM, deren Ordinaten AC, DE, PM die Verminderung des Lichts anzeigten, wenn daſſelbe wegen keiner andern Urſache, als wegen der Undurchſichtigkeit des Raums, worin es ſich ausbreitet, ſchwächer würde, und L der leuchtende Punct, von dem es ausgehet. Man ſetze, wie oben im 328 §. AC $= a$, DE $= b$, PM $= y$, AP $= x$. AD $= c$, und überdem LA $= h$. Auf der andern Seite der Axe AB ſey eine krumme Linie *cem* verzeichnet, deren Ordinaten AC $= \alpha$, De $= \beta$, P*m* $= z$, die Lichtverminderung ausdrücken, welche von beyden Urſachen zugleich herrührt, nemlich von der Ausbreitung des Lichts nach allen Seiten, und der Undurchſichtigkeit des Raums, worin es ſich ausbreitet: ſo hat man

$\alpha : \beta =$

$$\alpha : \beta = \begin{cases} (h + c)^2 : h^2 \\ a : b \end{cases}$$

$$\text{oder } \alpha : \beta = a(h+c)^2 : b \cdot h^2;$$

ferner eben ſo

$$\alpha : z = \begin{cases} (h + x)^2 : h^2 \\ a : y \end{cases}$$

$$\text{oder } \alpha : z = a(h+x)^2 : h^2 y.$$

Das giebt $\frac{a}{y} = \frac{\alpha h^2}{z(h+x)^2}$, und wenn man dieſen Werth in die Gleichung $l\frac{a}{y} = \frac{x}{c}\,l\frac{a}{b}$ (328. §.) ſetzt, ſo erhält man $l\frac{\alpha h^2}{z(h+x)^2} = \frac{x}{c}\,l\frac{a}{b}$, oder $l\frac{\alpha}{z} = \frac{x}{c}\,l\frac{a}{b} - l\frac{h^2}{(h+x)^2}$.

Weil die Durchſichtigkeit der Maſſe, worin ſich das Licht ausbreitet, als bekannt vorausgeſetzt wird, ſo weis man, welches Verhältniß $\frac{a}{b}$ mit einem bekannten Werth c zuſammen gehöre. Sind alſo zwo Stellen A und P gegeben, nach welche der leuchtende Punct L hinſcheinen kann; ſo zeigt die gefundene Gleichung, wie viel mahl das Licht in der entferntern Stelle ſchwächer, als in der nähern ſey.

Umgekehrt, wenn die Differenz x zwoer Entfernungen $h =$ LA, und $h + x =$ LP von dem leuchtenden Punct gegeben iſt, und das Verhältniß

niß $\frac{\alpha}{z}$ der auf beyde Stellen A und P fallenden Erleuchtungen; ſo giebt die Gleichung $l\,\frac{h^2}{(h+x)^2} = \frac{x}{c}\,l\,\frac{a}{b} - l\,\frac{\alpha}{z}$ das Verhältniß $\frac{h}{h+x}$ mithin auch h, weil x gegeben iſt, und ſo findet man beyde Entfernungen LA und LP ſelbſt.

335. §.

Wenn man auf ein Stück Glas, oder ſonſt ein Stück einer durchſichtigen Maſſe, das von zwoen ebenen und parallelen Seitenflächen eingeſchloſſen iſt, wie RPQS (73. Fig.) das Licht ſenk- 73 F.
recht fallen läſt; ſo giebt es zwar Mittel, die auffallende Lichtmenge mit der durchgehenden zu vergleichen: allein das Verhältniß jener Lichtmenge zu dieſer iſt noch nicht das geſuchte Verhältniß $a : b$, in welchem das Licht wegen der Undurchſichtigkeit der Maſſe vermindert wird, indem es darin den Weg c ſo groß, als die Dicke der Maſſe zurück legt. Um nunmehro völlig deutlich zu überſehen, was es mit dieſer Sache für eine Bewandniß habe, ſtelle man ſich anfangs noch vor, der Strahlencylinder AB falle auf PQ unter dem ſchiefen Winkel PBA, und erinnere ſich daran, was vermöge des im 196 §. beſchriebenen Verſuchs erfolget. Auf B falle die Lichtmenge L, nach Bb werde der Theil q . L zurückgeworfen, in die Lage BC aber der Theil n . L gebrochen, ſo würde eben dieſer

dieſer Theil in C anlangen, wenn die Maſſe vollkommen durchſichtig wäre. Nun aber langt daſelbſt nur der Theil λnL an, der übrige wird zerſtreuet. Von dieſer Lichtmenge λnL wird abermahl in C ein Theil $= p\lambda n$L nach CD zurück geworfen, der übrige $m\lambda n$L in die Lage C*c* gebrochen. Von jener Lichtmenge $p\lambda n$L langt nur der Theil $p\lambda^2 n$L in D an, hievon wird der Theil $p^2\lambda^2 n$L nach DE zurück geworfen, ein anderer Theil $mp\lambda^2 n$L nach D*d* gebrochen, da dann in E nur die Menge $p^2\lambda^3 n$L anlangt. Dieſe Schlüſſe ſetzt man leicht fort, da ſich denn folgendes ergiebt.

Aufwärts wird zurück geworfen,
nach B*b* die Lichtmenge q . L
nach D*d* = = = = $mp\lambda^2 n$. L
nach F*f* = = = = $mp^3\lambda^4 n$. L
nach H*h* = = = = $mp^5\lambda^6 n$. L.

So entſtehet, das erſte Glied qL ausgenommen, eine geometriſche Progreßion, wovon $p^2 \lambda^2$ der Exponent iſt, und dieſe Progreßion läuft ins unendliche fort. Die Summe aller Glieder iſt alſo

$$= \left(q + \frac{mp\lambda^2 n}{1 - p^2\lambda^2}\right) \text{L}$$ (223 §. Allg. Rech.)

weil der Exponent $p^2 \lambda^2$ ein eigentlicher Bruch iſt. Man ſetze den Coefficienten von L = M, ſo iſt die Lichtmenge, welche von der Vorderfläche PQ wieder zurück gehet, = ML, und man hat M =

$$q + \frac{mp\lambda^2 n}{1 - p^2 \lambda^2}.$$

Weiter fällt durch die hintere Fläche RS
nach C*c* die Lichtmenge $m\lambda n$. L
nach E*e* = = = $mp^2\lambda^3 n$. L

nach

nach Gg die Lichtmenge $mp^4\lambda^5 n$. L
nach Ii = = = $mp^6\lambda^7 n$. L.

Alle dieſe Glieder machen abermahl eine geometriſche Progreßion, wovon die Summe = $\frac{m\lambda n}{1 - p^2\lambda^2}$. L iſt. Setzt man demnach $\frac{m\lambda n}{1 - p^2\lambda^2}$ = N, ſo iſt die durch die hintere Fläche RS durchgehende Lichtmenge = N . L. Uebrigens giebt die Vergleichung der Werthe von M und N auch die Gleichung $M = q + p\lambda N$. Je mehr ſich das in der Richtung AB einfallende Licht der auf PQ ſenkrechten Lage nähert, deſto näher rücken die Puncte B, D, F, H, u. ſ. f, imgleichen C, E, G, I, u. ſ. f. zuſammen: und jene ſowohl, als dieſe, fallen zuſammen, wenn AB auf PQ ſenkrecht fällt. Allemahl aber iſt die geſammte zurück geworfene Lichtmenge = M . L, die durchfallende = N . L, die zerſtreuete Lichtmenge = (1 — M — N) L. Man vergleiche H. Lamberts Photom. Part. II. Cap. I. §. 403. pag. 193.

336. §.

Wäre die Maſſe vollkommen durchſichtig, ſo wäre $\lambda = 1$, alſo $M = q + \frac{mpn}{1-p^2}$, $N = \frac{mn}{1 - pp}$ und $M = q + pN$. Ferner wäre $q + n = 1$ und $p + m = 1$, oder $m = 1 - p$, $n = 1 - q$; mithin $M = q + \frac{p(1-q)}{1+p} = \frac{q+p}{1+p}$

$N = \frac{1 - q}{1 + p}$, und $M + N = 1$, wie erfordert wird, weil gar kein Licht zerſtreuet würde. M. ſ. Lamberti Photom. Part. II. Cap. I. §. 342. ſq. pag. 106 ſq. Wäre dagegen die Maſſe vollkommen undurchſichtig, ſo könnte man $\lambda = 0$ ſetzen. Das würde $M = q$, $N = 0$ geben. Vermuthlich giebt es dergleichen vollkommen undurchſichtige Maſſen in der Natur eben ſo wenig, als es vollkommen durchſichtige Maſſen giebt: für jeden noch ſo kleinen Weg, den das Licht in einer ſolchen Maſſe zurück legte, würde $\lambda = 0$ ſeyn. Allein vermöge der Erfahrungen die bereits oben im 256 §. ſind angeführt worden, werden alle uns bekannte Maſſen nur alsdenn (und vielleicht nur für unſre Empfindung) völlig undurchſichtig, wenn ſie eine gewiſſe beſtimmte Dicke haben; ſehr dünne Blättchen davon haben allemahl einige Durchſichtigkeit. Der Fall, daß $\lambda = 0$ wird, kann alſo doch in der Natur ſtatt haben, wenn die Maſſe, welche das Licht auffängt, ſo dick iſt, daß das Licht, bis an die hintere Fläche derſelben nicht eindringen kann. Wofern es indeſſen mit dem im 327 §. angenommenen Geſetz ſeine Richtigkeit hat, wofern das Licht beym Durchgang durch die Maſſe in geometriſcher Progreßion abnimmt, wenn der zurück gelegte Weg in arithmetiſcher Progreßion wächſt; ſo kann nie $\lambda = 0$ werden: doch könnte wohl bey einer geringen Dicke λ ſo klein werden, daß der durchfallende Theil des Lichts für unſer Auge unempfindlich wäre. Vermuthlich hat es dieſe Bewandniß mit den Maſſen, die wir undurchſichtig nennen.

Der XXV. Abſchnitt.

Vergleichung des von durchſichtigen Maſſen ſpiegelartig zurückgeworfenen, wie auch des durchſcheinenden und zerſtreueten, mit der Menge des auffallenden Lichts.

337. §.

Unter den undurchſichtigen feſten Maſſen, die eine gute Politur annehmen, und alsdenn einen anſehnlichen Theil des auffallenden Lichts ſpiegelartig zurück werfen, ſind vornemlich die Metalle merkwürdig. Auch iſt wohlgereinigtes Queckſilber zwar undurchſichtig, aber die äuſſere Fläche deſſelben, wenn es in einem Gefäß ruhig ſteht, hat die Natur einer polirten Fläche, und wirft einen beträchtlichen Theil des auffallenden Lichts ſpiegelartig zurück. Für dergleichen Maſſen iſt demnach allemahl $M = q$, und $N = o$. Diejenigen ebenen Spiegel aber, welche am meiſten gebraucht werden, beſtehen aus einer zwiſchen zwoen parallelen Ebenen eingeſchloſſenen Glastafel, und die von dem Object abgekehrte Seite iſt mit der ſogenannten Spiegel-Folie, einer aus Zinn und Queckſilber zubereiteten Maſſe belegt. Dieſe Folie hat an der Seite, womit ſie am Glaſe anliegt, wie ſonſt ein metallener Spiegel ihre Politur, und wirft das durchs Glas darauf fallende Licht

ſtark zurück. Allein eben dies verurſacht einen ſehr beträchtlichen Unterſchied unter der Würkung eines gläſernen, und eines metallenen Spiegels. Der leztere hat nur eine polirte zurückwerfende Fläche: dagegen wirſt der gläſerne Spiegel einen Theil des auffallenden Lichts von ſeiner Vorderfläche zurück, von dem übrigen durch das Glas hindurch ſcheinenden Licht, welches zugleich an eben der Vorderfläche in eine andere Lage gebrochen wird, gehet, wegen der Zerſtreuung im Glaſe von neuen etwas ab, und das übrige wirſt die hintere polirte Fläche zurück. Da, wo dies von der hintern Fläche zurück geworfene Licht die Vorderfläche wieder erreicht, wird es zum Theil gebrochen, indem es zum Spiegel herausgeht, zum Theil wieder nach der hintern Fläche zurück geworfen, die es aufs neue der vordern Fläche zuſchickt. Der Erfolg iſt völlig ſo, wie er im 196 §. iſt beſchrieben worden, nur mit dem Unterſchied, daß die hintere Fläche des gläſernen polirten Spiegels undurchſichtig iſt, und kein Licht durchläßt.

338. §.

Will man für die geſammte Lichtmenge, welche der polirte gläſerne Spiegel zurück wirſt, eine ähnliche Formul haben, wie im 335 §. die Formuln für die durchſichtige Glastafel waren, ſo wähle man nur ſtatt das p für die hintere Fläche einen andern Buchſtaben, wenn ſie foliirt iſt. Demnach ſetze man, es theile ſich die auf C fallende Lichtmenge in dem Verhältniß $\pi : m$, ſo wird zurückgeworfen

nach

nach B*b* die Lichtmenge $q \,.\, L$
nach D*d* = = = $m\pi\lambda^2 n \,.\, L$
nach F*f* = = = $m\pi^2 p\lambda^4 n \,.\, L$
nach H*h* = = = $m\pi^3 p^2\lambda^6 n \,.\, L$

Das erſte Glied, q ausgenommen, giebt dies eine geometriſche Reihe, deren Exponent $\pi p\lambda^2$ iſt, und man hat nun $M = q + \frac{m\pi\lambda^2 n}{1 - \pi p\lambda^2}$. Für die durchſichtige Glastafel iſt alsdenn $\pi = p$, und die geſammte hindurch fallende Lichtmenge $=$ N.L, wenn $N = \frac{m\lambda n}{1 - p^2\lambda^2}$ angenommen wird.

339. §.

Die Werthe der Buchſtaben q, n, p, m, λ, (334 §.) ſind nicht allein bey einerley Einfallswinkel für verſchiedene Maſſen, ſondern auch bey einerley Maſſe und verſchiedenen Einfallswinkeln verſchieden, und ſie laſſen ſich nur durch regelmäßig angeſtellte Verſuche für jede beſondre Art durchſichtiger Maſſen, oder zurückwerfender polirter Flächen, und jeden gegebenen Einfallswinkel finden. Eigentlich kommt es nur darauf an, daß man q, p, und λ ſuche, weil allemahl $q + n = 1$, und $p + m = 1$ ſeyn muß. Für undurchſichtige polirte Flächen läßt ſich q beſonders finden, und die Zahlen p und λ kommen dabey nicht vor. Bey Glastafeln und andern durchſichtigen Maſſen läßt ſich ebenfalls q beſonders auf ähnliche Art, wie für undurchſichtigen Spiegelflächen finden: nur werden die folgenden Unterſuchungen ergeben, daß die Sache ihre Schwierigkeit habe, wenn

das Licht völlig, oder beynahe ſenkrecht, oder auch unter einem kleinen Neigungswinkel gegen die polirte Fläche auffällt. Wenn nicht allein q ſondern auch p gefunden iſt, ſo kann man ohne große Schwierigkeit λ finden: allein es iſt ſo leicht nicht die Zahl p zu finden, ſo lange λ noch unbekannt iſt. Das Licht was die hintere Fläche zurück wirft, leidet in der durchſichtigen Maſſe, wegen der Zerſtreuung, einen neuen Abgang, und da, wo es durch die Vorderfläche wieder in die Luft geht, wird abermahl ein Theil davon zurück geworfen. Was man alſo in der Luft auffangen kann, iſt nur ein Theil desjenigen Lichts, was die hintere Fläche zurück wirft. Herr **Bouguer** im Traité d'optique Liv. I. Sect. I. Art. III. IV. V. giebt dazu eine nähere Anleitung, wie man das ſpiegelartig zurück geworfene Licht mit dem einfallenden vergleichen kann, und ſein Verfahren läßt ſich nicht allein auf undurchſichtige Spiegelflächen, ſondern auch auf Glastafeln und andre durchſichtige Maſſen anwenden. Will man aber bey der Anwendung auf Glastafeln nur dasjenige Licht, was die vordere Fläche an der Stelle, wo es auffällt, zurück wirft, mit dem einfallenden vergleichen, und auf ſolche Art die Zahl q finden; ſo muß man verſichert ſeyn, daß beym Verſuch dasjenige Licht, was die hintere Fläche zurück ſchickt, ſich nicht mit jenem vermiſche: das iſt aber alsdenn, wenn der Einfallswinkel entweder völlig, oder beynahe ein rechter Winkel, oder auch ein kleiner Winkel von wenigen Graden iſt, nicht wohl zu vermeiden.

340. §.

Die bloſſe Betrachtung der 73 Figur ergiebt, daß die Stellen B, D, F, H, u. ſ. f. zuſammen fallen, und alle zurück gehende Strahlen Bb, Dd, Ff, Hh, ſich mit einander ſelbſt, und mit dem einfallenden Strahl AB vermiſchen, wenn AB ſenkrecht auf PQ fällt. Wächſt der Winkel LBA, ſo wachſen BD, DF, FH u. ſ. f., und mit dieſen Linien zugleich die ſenkrechten Entfernungen der zurückgehenden Strahlen Bb, Dd, Ff, von einander: leztere aber nehmen wieder ab, wenn LBA ſich dem rechten Winkel nähert, und PBA ein kleiner Winkel von wenigen Graden wird. Man ſetze den Neigungswinkel LBA $= \alpha$, den gebrochenen Winkel MBC $= \beta$, die Dicke der Glastafel BM $= c$, ſo iſt BD $= 2c \tang \beta$, und der ſenkrechte Abſtand Db der zurückgehenden Strahlen Bb, Dd, u. ſ. f. $= 2c \tang \beta \cos \alpha$. Das Verhältniß der Refraction ſey, $1 : \mu$, ſo iſt $\sin \beta = \mu \sin \alpha$, $\cos \beta = \sqrt{(1 - \mu^2 \sin \alpha^2)}$, alſo $\tang \beta = \frac{(n \sin \alpha)}{\sqrt{(1 - \mu^2 \sin \alpha^2)}}$, und der Abſtand D$b$ $= \frac{2 \mu c \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{(1 - \mu^2 \sin \alpha^2)}} = \frac{\mu c \sin 2\alpha}{\sqrt{(1 - \mu^2 \sin \alpha^2)}}$. Dieſer Ausdruck verſchwindet nicht allein, wenn $\alpha = 0$, ſondern auch wenn $\alpha = 90°$ iſt, er wächſt bis auf eine gewiſſe Gränze und nimmt nachher wieder ab, wenn α von $0°$ bis $90°$ zunimmt, und der gröſte Werth wird gefunden, wenn man $d \,.\, \frac{\mu c \sin 2\alpha}{\sqrt{(1 - \mu^2 \sin \alpha^2)}} = 0$

ſetzt. Das giebt $\cos 2\alpha\,(1 - \mu^2 \sin \alpha^2) + \frac{1}{4}\,\mu^2\,(\sin 2\alpha)^2 = 0$, oder $(\cos \alpha^2 - \sin \alpha^2)\,(1 - \mu^2 \sin \alpha^2) + \mu^2 \sin \alpha^2 \cos \alpha^2 = 0$, und wenn man $1 - \sin \alpha^2$ ſtatt $\cos \alpha^2$ ſchreibt, hiernächſt aber alles gehörig ordnet, ſo erhält man

$$\sin \alpha^4 - \frac{1}{\mu^2} \sin \alpha^2 = - \frac{1}{\mu^2},$$

mithin $\sin \alpha^2 = \frac{1}{\mu^2} \pm \surd \left(\frac{1}{\mu^4} - \frac{1}{\mu^2}\right)$.

Das zeichen $+$ kann vor dem Wurzelzeichen nicht gebraucht werden, weil μ ein eigentlicher Bruch iſt, und $\sin \alpha$ nicht gröſſer als 1 ſeyn kann.

Nimmt man für Luft und Glas $\mu = \frac{2}{3}$ an, ſo iſt $\sin \alpha^2 = \frac{9}{4} - \surd \left(\frac{81}{16} - \frac{9}{4}\right) = \frac{9}{4} - \surd \frac{45}{16}$, oder $\sin \alpha^2 = \frac{9 - 3\surd 5}{4} = \frac{3(3 - \surd 5)}{4}$, und $\sin \alpha = \frac{1}{2} \surd 3\,(3 - \surd 5) = 0{,}756934$ und $\alpha = 49^\circ\, 12'$. Je dicker Uebrigens das Glas iſt, deſto gröſſer iſt Db für einerley Neigungswinkel α; und wenn dieſer Abſtand Db nicht ſo gar klein iſt; ſo kann man den Strahl Bb allein mit einer kleinen Fläche auffangen, und dadurch eine Erleuchtung zu wege bringen, die von demjenigen Licht herrührt, welches die Vorderfläche allein von der Stelle, wo es auffällt, zurück ſchickt.

Dieſe Erinnerung wegen der Glastafeln und ſolirten gläſernen Spiegel, ſetze ich nun ein für allemahl bey der folgenden Beſchreibung derjenigen Art von Verſuchen voraus, welche man nach des Hn. Bouguer Anleitung anſtellen kann, um das

ſpie-

ſpiegelartig zurück geworfene Licht mit dem einfallenden zu vergleichen.

341. §.

Man richte ein Paar kleine viereckte Tafeln B 107.
und D ſo ein, daß man ſie etwa auf einem ebenen Fig.
Tiſch vertical, und beyde mit einander parallel ſtellen kann. Dieſe kleinen Tafeln müſſen gleich weiß ſeyn, auch einerley Geſtalt und Gröſſe haben. In A ſtehe ein ebener Spiegel von eben der Geſtalt wie die Tafeln, von Gröſſe allenfalls noch etwas kleiner. Stellt man nun in B eine von den Tafeln mit dem Spiegel parallel, ſo wird derſelbe das Licht, was er in der Richtung BA von B empfängt, nach AO zurück werfen. Man ſtelle ſich die Ebene BAO horizontal, alſo auf den Ebenen A und B ſenkrecht vor, ſie ſchneide die Ebene des Spiegels in AC: ferner ſey BC der Einfalls-Cathetus; ſo werden BC und OA einander in D ſchneiden, als der Stelle des Bildes von B, und es iſt BC = BD, ſo wie AB = AD (84. §.) Würde nun die andre Tafel in D geſtellt, ſo könnte ein Auge, daß in O ſtehet, ſie wegen des Spiegels nicht ſehen. Damit man alſo aus O beydes, das Bild der Tafel B im Spiegel, und die Tafel D grade zu auf einem Blick ſehen könne, ſtelle man die Tafel D ein wenig höher, als die Stelle, wohin das Bild der Tafel B fällt, oder auch ein wenig mehr ſeitwärts; ſo wird man es ohne Schwierigkeit dahin bringen, daß dieſe Tafel D und das Bild der Tafel B im Spiegel, beyde aus O geſehen, einander zu berühren ſcheinen. In der graden Linie BD zwiſchen beyden Tafeln ſtelle man eine Lichtflamme L, um die

Tafeln zu erleuchten, ſo wie übrigens der Verſuch im finſtern Zimmer angeſtellet, auch das Licht der Flamme L durch eine Vorſetzung ſowohl vom Auge O, als auch vom Spiegel A abgehalten werden muß.

Stellte man die Lichtflamme grade in der Mitte C zwiſchen beyden Tafeln, ſo würden ſelbige eine gleiche Erleuchtung empfangen, und wenn alles Licht vom Spiegel zurück geworfen würde, ſo würden auch beyde dem Auge in O gleich klar zu ſeyn ſcheinen. (290 §.) Weil nemlich beyde gleich weiß angenommen werden, ſo haben ſie bey gleicher Erleuchtung eine gleiche Klarheit: und weil man beyde mit einem Blick überſiehet, mithin die Oefnung des Sterns im Auge für beyde Empfindungen einerley iſt; ſo müſte auch die ſcheinbare Klarheit einerley ſeyn. Allein der Spiegel wirft nicht alles Licht zurück, was auf ihn fällt, mithin wird das Bild von B nicht ſo klar, als D zu ſeyn ſcheinen, wenn die Lichtflamme L in C ſteht. Demnach rücke man ſie etwas mehr nach B zu, ſo wird die Klarheit von D abnehmen, die Klarheit der Tafel B aber, alſo auch ihres Bildes im Spiegel, wird zunehmen. Demnach muß es eine Stelle für das Licht L geben, aus welcher beyde Tafeln ſo erleuchtet werden, daß die Tafel D und das Bild von B gleich helle zu ſeyn ſcheinen.

Nun ſey die Klarheit der Tafel D $= \sigma$, der Tafel B $= \Sigma$, ſo iſt die Klarheit des Bildes der leztern, vermöge des Verſuchs $= \sigma$. Ein Element $= \omega^2$ des Bildes der Tafel B, wenn der Ausflußwinkel des Lichts $= \alpha$, des Sterns im Auge Halbmeſſer $= \omega^2$, der Abſtand $OD = OA + AB = \delta$ iſt,

iſt, ſchickt die Strahlenmenge $\frac{\pi b^2 \omega^2 \sin\alpha}{\delta^2} \cdot \sigma$ ins Auge: es würde aber die Strahlenmenge $\frac{\pi b^2 \omega^2 \sin\alpha}{\delta^2} \cdot \Sigma$ ins Auge ſchicken, wenn der Spiegel alles auffallende Licht zurück ſchickte. Mithin verhält ſich die auffallende Strahlenmenge zur zurück geworfenen, wie $\Sigma : \sigma$. Die Erleuchtung der Tafel D ſey $= i$, der Tafel B $=$ I, ſo iſt $\sigma : \Sigma = i : I$, weil beyde Tafeln gleich weiß angenommen werden. Wird alſo vorausgeſetzt, daß entweder der Spiegel ein metallener ſey, oder doch das Bild, was man im gläſernen Spiegel ſiehet, allein von der hintern foliirten Fläche deſſelben herrühre; das Verhältniß der auffallenden Strahlenmenge zur zurückgeworfenen $1 : q = I : i$. Es iſt aber $I : i = LD^2 : LB^2$, mithin erhält man $1 : q = LD^2 : LB^2$.

342. §.

Wenn man auf dieſe Art den Verſuch mit einerley Spiegel unter verſchiedenen Einfallswinkeln BAC wiederhohlt; ſo findet man q deſto gröſſer, je kleiner der Einfallswinkel iſt. Um kleine Einfallswinkel zu erhalten, müſſen die beyden Tafeln B und D einander ſehr nahe gebracht werden: alsdenn hat es nicht allein ſeine Schwierigkeit die Lichtflamme L gehörig zu ſtellen, ſondern auch die Entfernungen LB und LD genau genug zu meſſen, damit das Verhältniß $LD^2 : LB^2$, welches durch den Verſuch gefunden wird, nicht zu ſehr von dem eigentlich geſuchten richtigen Verhältniß abweiche. Um dies

zu vermeiden, ſtelle man die Tafel B ſo, daß ſie
108. gegen den Spiegel unter einem Winkel geneigt iſt,
Fig. der den Einfallswinkel BAC zum rechten Winkel ergänzt. Nun wird das Bild von B übrigens eben ſo wie vorhin in D fallen, und man kann in dieſe Stelle die andre Tafel nur ein wenig höher oder mehr ſeitwärts bringen, damit man beydes, die Tafel D und das Bild von B, aus O neben einander auf einem Blick überſehen kann. Das Licht L ſtelle man nun in L über dem Spiegel A nur ein wenig über ihn erhöhet, ſo wird es zwar auf den Spiegel keine Strahlen unmittelbar werfen, man muß aber auch dahin ſehen, daß auf ihn kein anderswoher reflectirtes Licht, ſondern allein das Licht von B falle. Das Auge muß ebenfalls gegen das Licht durch eine Vorſetzung gedeckt werden. Nun fallen die Lichtſtrahlen von L auf beyde Tafeln beynahe ſenkrecht, in gleicher Entfernung LB = LD werden beyde gleich ſtark erleuchtet, aber das Bild von B im Spiegel ſcheint alsdenn nicht ſo klar zu ſeyn, als D. Um die Klarheit gleich zu machen, muß man LB vermindern, oder LD vergröſſern, damit entweder die Klarheit des Bildes B zunehme, oder die Klarheit von D abnehme. Hat man nun beyde Tafeln auf ſolche Art in die Stellung gegen den Spiegel gebracht; daß die ſcheinbare Klarheit des Bildes von B und der Tafel D gleich groß ſind; ſo findet man das Verhältniß $1 : q = LD^2 : LB^2$, wie im vor. §. Wenn man es nur zugleich dahin bringt, daß die ſcheinbare Gröſſe des Bildes B eben ſo groß bleibt, als die ſcheinbare Gröſſe der Tafel D, obgleich nun des Bildes Entfernung OA + AB vom Auge kleiner, als

als der Tafel D Entfernung OA + AD vom Auge iſt. In ſolcher Abſicht kann man kleine ſchwarze Rahmen von etwas wiewohl nur wenig ungleicher Breite machen laſſen, um ſie vor der Tafel B zu ſetzen, damit die ſcheinbare Gröſſe ihres Bildes dadurch ſoviel als nöthig iſt, vermindert werde.

Weil nemlich die Klarheit des Bildes B und der Tafel D gleich groß ſcheinen; ſo iſt auch bey dieſem Verfahren noch die würkliche Klarheit des Bildes B und der Tafel einerley; obgleich nun des Bildes Entfernung OA + AB kleiner als der Tafel D Entfernung OA + AD vom Auge iſt. Die ſcheinbare Klarheit hängt von der Entfernung nicht ab, wenn die ſcheinbare Gröſſe nur einerley iſt. (241. 249. 290. §.) Behält man alſo die Bezeichnungen des vor. §., ſo iſt noch $1 : q = \Sigma : \sigma = I : i = LD^2 : LB^2$.

343. §.

Herr Bouguer (a. a. O. Liv. I. Sect. II. Art. II. pag. 57.) hat auf dieſe Art mit einem metallenen Spiegel den Verſuch unter einem Winkel von 15° angeſtellt. Alsdenn war LD = 53″ und LB = 40″; mithin $1 : q = 53^2 : 40^2 = 1000 : 569$. Ein gläſerner foliirter Spiegel, der 1 Linie dick, und aus einer ſehr reinen Glastafel verfertiget war, warf das Licht etwas ſtärker zurück in dem Verhältniß 1000 : 628; es war nemlich LB = 42″, wenn LD = 53″ blieb. Bey kleinern Neigungswinkeln ward die Zurückwerfung merklich ſtärker, ein Winkel von 3° gab für den gläſernen Spiegel ohngefehr das Verhältniß 1000 : 700, und für den metallenen Spiegel war bey

eben

eben dem Winkel von 3° das Verhältniß 1 : q von dem eben angeführten wenig verſchieden. Wegen des gläſernen Spiegels muß ich mich übrigens auf die im 339 §. vorausgeſetzten Erinnerungen beziehen: daß von der hintern foliirten Fläche zurückgeworfene Licht vermiſcht ſich bey dieſem Verſuch mit demjenigen, was die Vorderfläche zurück ſchickt: man findet alſo nicht eigentlich das Verhältniß 1 : q in der Bedeutung, wie dieſe Bezeichnung bisher gebraucht iſt. Es wäre dies Verhältniß für die foliirte Fläche, wenn das Glas vollkommen durchſichtig wäre, und die Vorderfläche gar kein Licht zurück würfe.

344. §.

Man kann den Verſuch mit einiger Veränderung auch auf folgende Art anſtellen. In A ſtehe
109. Fig. der Spiegel, in L das Licht, das ſeine Strahlen auf den Spiegel wirft, der ſie nach AB zurück wirft. LC ſey das Einfallsperpendicul, welches AB verlängert in Λ ſchneidet, ſo iſt Λ das Bild des Lichts L. Durch L ſey LD mit AB parallel, und LΔ = AB; man ſtelle in B und Δ die obbeſchriebenen Tafeln mit dem Spiegel parallel, ſo wird B von dem reflectirten Licht, ſo wie Δ unmittelbar von L, und beyde gleich ſtark erleuchtet, wofern der Spiegel alles auf ihn fallende Licht zurück wirft. Es empfängt nemlich B, wenn alles auffallende Licht zurück ſtrahlet, eben die Erleuchtung, die darauf fallen würde, wenn das Licht in Λ ſtünde, und der Spiegel nicht da wäre. Weil aber der Spiegel nicht alles auffallende Licht zurück ſchickt, ſo iſt Δ ſtärker als B erleuchtet, und man muß

muß die Tafel aus der Stelle Δ vom Licht L weiter entfernen, wenn beyde Erleuchtungen gleich werden ſollen. Um dies zu prüfen, ſucht man für das Auge eine Stelle in O, aus der beyde Tafeln ganz nahe an einander zu ſtehen ſcheinen: wenn alsdenn beyder ſcheinbare Klarheit einerley iſt, ſo iſt auch ihre würkliche Klarheit, mithin beyder Erleuchtung gleich groß. Auf jedes Element $= \omega^2$ der Tafel B fällt alſo nun die Strahlenmenge $\frac{\omega^2 \ S \ \sin \alpha^2}{LD^2}$, wenn der Einfallswinkel $= \alpha$, und der Glanz der Flamme $= S$ iſt. Schickte aber der Spiegel alles Licht zurück, ſo wäre dieſe Strahlenmenge $= \frac{\omega^2 S \sin \alpha}{L\Delta^2} = \frac{\omega^2 S \sin \alpha}{\Delta B^2}$, mithin hat man $1 : q = LD^2 : \Delta B^2$, oder $1 : q = LD^2 : (LA + AB)^2$.

345. §.

Metallene und gläſerne Spiegel kann man auf die bisher beſchriebene Art bequem, ſo wie die Tafeln, welche das Licht auffangen, vertical ſtellen: allein die Oberflächen flüßiger Maſſen, des Waſſers, des Queckſilbers u. a. m., werfen das Licht ſpiegelartig zurück, wenn ſie ruhig in einem Gefäß ſtehen, und alsdenn ſind dieſe Oberflächen wagerecht. Wie ſtark die Zurückwerfung ſey, unterſucht man nun am bequemſten im finſtern Zimmer auf folgende Art. Durch ein paar kleine Oefnungen B und D im Fenſterladen, läßt man an einem völlig heitern Tage das Tageslicht ins Zimmer fallen, und zwar von einer Gegend des Himmels, die der Sonne grade gegen über liegt. Was durch 110. Fig.

die

die eine Oefnung fällt, fängt man mit der horizontalen Fläche A einer ſtillſtehenden flüßigen Maſſe, oder wenn man auch will, jeder andern zurückwerfenden Fläche auf, und beydes, das von der Spiegelfläche zurückgeworfene, und das durch D grade hinein ſcheinende Licht, fängt man mit einer ebenen Tafel RS auf, die eben ſo wie die Wand PQ vertical ſtehen, und mit PQ parallel seyn muß. Wenn nun E die helleſte von dem durch D hinein fallenden Licht beſchienene Stelle iſt, ſo ſtelle man die Spiegelfläche A ſo, daß BA mit DE parallel ſey. Wenn alsdenn AC das zurückgehende Licht iſt, ſo wird $BA + AC = DE$ ſeyn. Denn würde AB verlängert die Fläche RS in G treffen, ſo wäre $BG = BA + AG = DE$, und es iſt $AC = AG$, mithin auch $BA + AC = DE$. Die parallele Lage der Wege des Lichts BF, DE iſt auch deswegen nöthig, damit daß auf C und E fallende Licht von einerley Stelle des ſcheinbaren Himmels-Gewölbes komme. Man muß ferner alles ſo einrichten, daß die Stellen E und C nahe bey einander liegen. Zu dem Ende muß die Oefnung B der Oefnung D nahe zur Seite, und dabey ein wenig niedriger, als D angebracht werden. Am bequemſten wird ſelbige in ein dünnes Bret, oder ein Stück ſchwarzer Pappe geſchnitten, das mit einer Einfaſſung verſehen iſt, worin man es nach Erfordern etwas höher oder niedriger ſchieben kann. Die Tafel RS muß ſchwarz ſeyn, in E und C aber ſchneidet man ein paar Kreisrunde Löcher, die mit dem weiſſeſten Papier verſchloſſen werden. Auf E muß nichts von demjenigen Licht fallen, daß durch B hineinſcheint, und auf C nichts

von

von dem durch D hineinſcheinenden Licht: deswegen muß man dies durch die Hülfe eines Vorhangs, oder wie es ſich ſonſt am bequemſten bewerkſtelligen läßt, verhindern: auch grade über der Spiegelfläche A etwas undurchſichtiges hindern, daß kein anderes als das Spiegelartig zurückgeworfene Licht auf C fallen kann.

Weiter muß man ſich mit kleinen Rahmen oder Ringen aus ſchwarzer Pappe verſehen, um die Oefnung D nach Gefallen zu vermindern. Wenn nemlich alles Licht von der Spiegelfläche A zurück ſtrahlte, ſo würden die Stellen C und E gleich ſtark erleuchtet ſeyn, mithin gleiche ſcheinbare Klarheit haben, wenn man die Fläche der Oefnungen B und D gleich groß machte. Weil aber nicht alles auf A fallende Licht zurück ſtrahlt, ſo muß man entweder B gröſſer oder D kleiner machen, damit die auf C und E fallenden Erleuchtungen gleich groß werden. Iſt alsdenn der Oefnung B Fläche $= h^2$, der Oefnung D Fläche $= k^2$, ſo findet man $1 : q = h^2 : k^2$.

Wenn nemlich die Abmeſſungen der Oefnungen B und D in Vergleichung mit der Entfernung DE ſehr klein ſind, ſo iſt die Erleuchtung, welche B nach C ſchicken würde, wenn alles Licht zurück ſtrahlte, $= \frac{h^2 \sin \alpha^2}{DE^2}$, den Ausfluß- und Einfalls-Winkel, die hier beyde gleich groß ſind, $=$ α genommen. (36. §.) Allein die Erleuchtung in C iſt $= \frac{k^2 \sin \alpha^2}{DE^2}$. Demnach iſt das Verhältniß der Strahlenmengen, welche C im erſten und lezten Fall auffängt $= h^2 : k^2 = 1 : q$.

346. §.

Wenn eine Spiegelfläche von der auffallenden Lichtmenge L den Theil l zurück wirft, eine andre aber von der Lichtmenge Λ den Theil λ, ſo iſt für jene Spiegelfläche $q = \frac{l}{L}$ für dieſe $= \frac{\lambda}{\Lambda}$.

Setzt man alſo für leztere die Spiegelfläche $\frac{\lambda}{\Lambda} = Q$, ſo iſt $q : Q = \frac{l}{L} : \frac{\lambda}{\Lambda} = l . \Lambda : \lambda . L$; und in dem Fall $l = \lambda$ hat man $q : Q = \Lambda : L$. Um alſo das Zurückwerfungsvermögen zweyer Spiegelflächen von verſchiedener Art mit einander zu vergleichen, bringe man die Oefnungen B und D gleich hoch an, und laſſe das Licht auf C und E grade zu ſcheinen. Hinter der Tafel RS lege man beyde Spiegelflächen neben einander hin, ſo daß man in der einen das Bild von C, in der andern das Bild von E ſehen kann. Das Verhältniß der Oefnungen B und D ändere man ſo lange, bis die Bilder von C und E in beyden Spiegeln gleiche Klarheit erlangen, ſo iſt für dieſe Spiegel $l = \lambda$. Wenn alſo B > D, mithin C klärer als E iſt, und die Buchſtaben q, L, l, und Q, Λ, λ, mit den Spiegeln zuſammen gehören, welche die Bilder von C und E auffangen; ſo hat man $q \ldots : Q = \frac{1}{L} : \frac{1}{\Lambda} = \Lambda : L = k^2 : h^2$.

Es iſt nicht nothwendig, daß bey dieſem Verſuch die Tafel RS vertical ſtehe, man kann ſie ein wenig rückwärts neigen, damit C und E das Licht ſenk-

ſenkrecht auffangen, und deſto mehr erleuchtet werden. Auch kann man alsdenn die Bilder von C und E in den Spiegeln bequemer ſehen.

347. §.

Damit die Erleuchtung nicht zu ſchwach ausfalle, können die Oefnungen B und D nicht ſo gar klein ſeyn. Hr. Bouguer machte ſie viereckt, und wenn ſie am gröſten waren, 7 bis 8 Zoll im Quadrat, da dann DE 7 bis 8 Fuß lang war. Alsdenn iſt das Verhältniß 1 : M (339. §.) nur beynahe $= h^2 : k^2$, und wenn man es genauer haben wollte, ſo könnte man die Oefnungen B und D kreisrund einrichten, alsdenn aber die Formul des 75 §. brauchen, um die Erleuchtungen zu berechnen, welche B und D nach C und E ſchicken. Es ſey DF auf der Ebene RS ſenkrecht, ſo iſt nach der im 75 §. gebrauchten Bezeichnung DF $= a$, FE $= b$, und DE $= \sqrt{(a^2 + b^2)}$, wofür ich hier f ſchreiben will. Ferner ſollen nun h und k die Halbmeſſer der Oefnungen B und D bedeuten. Dies vorausgeſetzt, wäre die Erleuchtung, welche B nach C ſchickte, wenn der Spiegel alles auffallende Licht zurück würfe dem 75 §. gemäß $= \frac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{f^2 - h^2}{\sqrt{((f^2 - h^2)^2 + 4a^2h^2)}}\right)$, und man erhielt

$$1 : q = 1 - \frac{f^2 - h^2}{\sqrt{((f^2 - h^2)^2 + 4a^2h^2)}} : 1 - \frac{f^2 - k^2}{\sqrt{((f^2 - k^2)^2 + 4a^2k^2)}}.$$

Bey dem Verſuch im 346 §. aber wär $q : Q =$

$$1 - \frac{f^2 - k^2}{\surd((f^2 - k^2)^2 + 4a^2k^2)} : 1 - \frac{f^2 - h^2}{\surd((f^2 - h^2)^2 + 4a^2h^2)}.$$

Wenn $h < \frac{1}{10} f$ iſt, ſo iſt die Formul $\frac{f^2 - h^2}{\surd((f^2 - h^2) + 4a^2h^2)} = \frac{1}{\surd(1 + 4a^2h^2 : (f^2 - h^2))}$ ſchon ziemlich nahe $= \frac{1}{\surd(1 + 4a^2h^2 : f^2)}$ $= \frac{1}{1 + 2a^2h^2 : f^2}$ 1 und 1 $- \frac{1}{1 + 2a^2h^2 : f^2} = \frac{2a^2h^2 : f^2}{1 + 2a^2h^2 : f} = \frac{2a^2h^2}{f^2 + 2a^2h^2}$, oder beynahe $= \frac{2a^2h^2}{f^2}$. Das giebt alsdenn $1 : q = h^2 : k^2$, wie im 344 §., und $q : Q = k^2 : h^2$, wie im 345. §.

348. §.

Daß die Menge des zurückgeworfenen Lichts bey einerley Spiegelfläche zunehme, wenn der Einfallswinkel abnimmt, iſt oben ſchon bemerkt worden. (341 342 §.) Dieſe Aenderung der Zurückwerfung bey Aenderung des Einfallswinkels richtet ſich aber bey verſchiedenen Spiegelflächen nicht nach einerley Geſetz. Hr. Bouguer hat dieſe Aenderung beym ſchwarzen Marmor am ſtärkſten gefunden. (a. a. O. Liv. II. Sect. II. Art. II. p. 125.) Unter einem Winkel von

von 3° 35′ war das Verhältniß $1 : q = 1000 : 600$. Unter den Winkeln von 15°, 30°, 80°, aber war es 1000 : 156, 1000 : 51, 1000 : 23. Bey metallenen Spiegeln war dieſe Aenderung der Zurückwerfung bey Aenderung des Einfallswinkels lange nicht ſo ſtark. Bey einem Verſuch mit Queckſilber im finſtern Zimmer unter dem Einfallswinkel von 21° war das Verhältniß $1 : q = 1000 : 637$, ein andermahl = 1000 : 666. Weiter verglich Herr Bouguer das Zurückwerfungsvermögen des Queckſilbers und eines metallenen Spiegels nach der im 345 §. beſchriebenen Methode; er fand bey kleinen Winkeln die Zurückwerfung des Queckſilbers etwas ſtärker, als des metallenen Spiegels, bey gröſſern Einfallswinkeln blieb der Unterſchied kaum merklich. Uebrigens erinnert Hr. Bouguer noch, daß bey den Verſuchen mit dem Queckſilber viele Vorſicht nöthig ſey, theils weil die zärtſten Stäubchen, die auf das Queckſilber fallen, einen Theil des zurückgehenden Lichts aufhalten, theils weil die Oberfläche deſſelben in kleinen Gefäßen ein wenig erhaben, zuweilen aber in kleinen runden Gefäßen in der Mitte ein wenig hohl ausfällt: es wird aber bey allen den oben beſchriebenen Arten, das zurückgeworfene Licht mit dem einfallenden zu vergleichen, vorausgeſetzt, daß die Spiegelfläche völlig eben ſey.

349. §.

Vor Herrn Lambert hat ſich niemand mehr Mühe gegeben, als Hr. Bouguer, das Geſetz ausfündig zu machen, nach welchem ſich das Verhältniß der einfallenden Strahlenmenge zur zurück-

geworfenen ändert, wenn der Einfallswinkel geändert wird: er glaubt aus einer Menge ſorgfältig angeſtellter Verſuche gefunden zu haben, daß die allgemeine Formul $q = A + B\,(\text{coſ}v\,.\,\eta)^3 + C\,.\,(\text{coſ}v\,.\,\eta)^6$ wenigſtens für Waſſer und Glaß richtig genug die Menge des zurückgeworfenen Lichts ausdrücke, wenn die Menge des einfallenden $= 1$ angenommen wird, und η den Einfallswinkel bezeichnet. (Traité d'optique Liv. II. Sect. II. Art. IV. V. pag. 134. — 137.) Wäre dies richtig, ſo würden drey Verſuche für drey verſchiedene Einfallswinkel genügen, die Coefficienten A, B, C, zu beſtimmen. Beym Waſſer glaubt Hr. Bouguer gefunden zu haben, ſey $q = \frac{1}{55}$ für den Einfallswinkel $\eta = 90°$, und das giebt $A = \frac{1}{55}$. Eben ſo findet er $q = 0{,}097$ für $\eta = 25°$, und $q = \frac{3}{4}$ wenn η faſt verſchwindet. Das giebt ihm die Formul $q = \frac{1}{55} + \frac{1}{3}(\text{coſ}v\,.\,\eta)^3 + \frac{2}{5}(\text{coſ}v\,.\,\eta)^6$, und er theilt dabey für die Zurückwerfung von der Waſſerfläche folgende Tafel mit, die er wie es ſcheint, aus Verſuchen geſchloſſen hat.

η	q	η	q	η	q	η	q
$\frac{1}{2}$	0,721	5	0,501	$17\frac{1}{2}$	0,178	50	0,022
1	0,692	$7\frac{1}{2}$	0,409	20	0,145	60	0,019
$1\frac{1}{2}$	0,669	10	0,333	25	0,097	70	0,018
2	0,639	$12\frac{1}{2}$	0,271	30	0,065	80	0,018
$2\frac{1}{2}$	0,614	15	0,211	40	0,090	90	0,018

Beym Spiegelglaſe iſt nach Hn. Bouguer $q = \frac{1}{40} + \frac{7}{10}(\text{coſ}v\,.\,\eta^3) + \frac{1}{40}(\text{coſ}v\,.\,\eta)^6$, und dabey giebt er folgende Tafel an für die zuſammengehörigen Werthe von η und q

n	q	n	q	n	q
$2\frac{1}{2}$	0,584	15	0,299	50	0,034
5	0,543	20	0,222	60	0,027
$7\frac{1}{2}$	0,474	25	0,157	70	0,025
10	0,412	30	0,112	80	0,025
$12\frac{1}{2}$	0,356	40	0,057	90	0,025

Obgleich nach der Formul dem Winkel von 90° der Werth $q = \frac{1}{40}$ zugehört; ſo hat H. Bouguer doch bey andern Glasarten $q = \frac{1}{31}$ gefunden. Er nimmt daher oft im folgenden die Mittelzahl $q = \frac{1}{36}$ beym ſenkrecht auffallenden Licht. Die Würkung der ſtarken Zurückwerfung der Sonnenſtrahlen bey kleinen Einfallswinkeln von der Waſſerfläche erfährt man im Sommer, wenn man ſich gegen Abend am Ufer eines ſtillſtehenden Waſſers, und zwar an einer ſolchen Stelle befindet, wo man von den Sonnenſtrahlen nicht allein grade zu, ſondern auch zugleich von denjenigen getroffen wird, welche die Waſſerfläche zurück wirft: man ſpürt daſelbſt eine merklich ſtärkere Hitze, als wenn man den Strahlen, die grade zu von der Sonne kommen, allein ausgeſetzt iſt.

350. §.

Wenn in einer durchſichtigen Maſſe ein Lichtſtrahl auf die gemeinſchaftliche Gränze dieſer Maſſe mit einer andern dünnern Maſſe fällt, ſo weis man ſchon aus dem 124 §., daß das Licht nicht allemahl aus der dichtern Maſſe in die dünnere übergehe. Iſt das Verhältniß der Refraction für Licht, daß aus der dichtern Maſſe in die dünnere übergehen ſoll, $= n : m$, alſo $m > n$; ſo erfolgt die Brechung nur ſo lange, als der Sinus des

Neigungswinkels $< \sqrt{\frac{n}{m}}$ oder der Sinus des Einfallswinkels $> \sqrt{\frac{m^2 - n}{m^2}}$ iſt. Daher kommt es, daß die Menge des von der innern Gränze einer durchſichtigen Maſſe zurückgeworfenen Lichts, wenn dieſe Maſſe an eine dünnere gränzt, anfangs bey kleinen Einfallswinkeln ſehr beträchtlich iſt, hiernächſt aber ſchnell abnimmt, wenn der Sinus des Einfallswinkels, (desjenigen, den der einfallende Strahl mit der Brechenden Fläche einſchließt) größer als $\sqrt{\frac{m^2 - n^2}{m^2}}$ wird. Wenn für Glas und Luft $n : m = 2 : 3$ iſt, ſo hat man $\frac{\sqrt{(m^2 - n^2)}}{m} = \frac{\sqrt{5}}{3} = 0{,}7453559$ und der zu dieſem Sinus gehörige Winkel beträgt 48° 11′ 23″. Wenn alſo in der 73 Fig. der Winkel MCB $<$ 48° 11′ 23″ iſt, ſo geht gar kein Licht mehr nach Cc durch die Fläche RS. Aus dem 145 §. weis man nun, daß für die Strahlen von mittlerer Brechbarkeit richtiger $n : m = 20 : 31$ geſetzt werden müſſe: das giebt hier $\frac{\sqrt{(m^2 - n^2)}}{m} = \sqrt{\frac{561}{961}} = \sqrt{0{,}58376691} = 0{,}7640464$, und zu dieſem Sinus gehört ein Winkel von 49° 49′ 20″. Für Waſſer und Luft iſt $n : m = 3 : 4$, oder für Strahlen von mittlerer Brechbarkeit genauer $= 396 : 529$: daraus findet man $\sqrt{\frac{m^2 - n^2}{m^2}} =$

0,6629072

0,6629072, und dieſer Sinus gehört zu einem Winkel von 41° 32′. So lange demnach in der 73 Fig. beym Glaſe der Winkel MCB kleiner als 49° 49⅓′ iſt, ſo lange geht kein Licht durch RS, und die Zurückwerfung nach CD iſt ſehr ſtark: ſobald aber MCB die Gränze von 49° 49′ zu übertreffen anfängt, ſobald vermindert ſich auf einmahl die Menge des zurückgeworfenen Lichts ſehr ſtark, und ein Theil des Lichts geht durch RS nach Cc. Wie nun oben das Verhältniß des auf RS fallenden Lichts zur Menge des nach CD zurückgeworfenen = 1 : p angenommen iſt; ſo frägt ſich, wie man die Zahl p für einen gegebenen Einfallswinkel durch Verſuche finden könne?

351. §.

Es ſey IK ein Stück Glas, das die Stelle des 111. Fig.
Spiegels A in der 107 Fig. vertritt, in B und D ſtelle man ſich ein paar kleine weiſſe Tafeln vor, wie die im 340 §. beſchriebenen waren, und aus der Vorderfläche des Glaſes werde das von B auf A fallende Licht zum Theil nach P zurückgeworfen, zum Theil nach E gebrochen; ſo würde nun das Auge in AP ſtehen müſſen, wenn man nach Anleitung des 340 §. q finden wollte. Man müſte wie ſchon bekannt iſt, das Bild von B im Spiegel IK, und zugleich D grade zu über dem Spiegel weg, beydes mit einem Blick überſehen, und dabey das Licht L ſo weit nach B rücken, bis das Bild von B im Spiegel, und D grade zu über dem Spiegel weg geſehen, beyde gleich helle erſcheinen. Der nach E gebrochene Theil des Lichts iſt der bisherigen Bezeichnung gemäß = n, daß in A auffallende

Licht = 1 geſetzt, wegen der Undurchſichtigkeit des Glaſes aber fällt auf E nur der Theil $= \lambda n$, aus E wird nach F der Theil $p\lambda n$ zurückgeworfen, und auf F fällt davon ein Theil $= p\lambda^2 n$, wovon wiederum nur ein Theil $= mp\lambda^2 n$ in die Lage FO gebrochen wird. Steht nun das Auge in O, ſo ſieht es ein Bild von B, das die hintere Fläche des Glaſes IK darſtellet, wiewohl die Helligkeit deſſelben ſchon aus einem doppelten Grunde Abgang gelitten hat.

Nun ſey der Neigungswinkel QAB $= \alpha$, der gebrochene Winkel QAR $= \beta$, die Dicke des Glaſes IK $= c$, ſo iſt AE $= c$. ſec . β = EF. Ueber dem Glaſe IK liege ein andres Stück Glas MN, das nochmahl ſo dick, als IK iſt; ſo wird das Auge O, wenn es das Bild von B ſiehet, das die hintere Fläche von IK verurſachet, oben über IK weg das Object D durch das Glas MN ſehen. Der Strahl HΩ, welcher mit FO parallel ins Auge kommt, fällt aus D in der Lage DG ⵜ HΩ auf, und wird das erſte mahl in die Lage GH, das zweyte mahl in die Lage HΩ gebrochen. Demnach iſt auch SGD $= \alpha$, und GH $= 2c$. ſec β = AE + EF = 2 AE = 2 EF.

In G wird von dem aus D auffallenden Licht der Theil q nach GT zurückgeworfen, der Theil n aber in GH gebrochen; und weil GH = 2 AE iſt, ſo fällt wegen der Undurchſichtigkeit des Glaſes auf H der Theil $\lambda^2 n$ (327 §.), und der Theil $m\lambda^2 n$ wird in HΩ gebrochen. Aus B falle auf A die Lichtmenge L, aus D auf G die Lichtmenge l; ſo empfängt das Auge O von B die Lichtmenge $mp\lambda^2 n$L, und von D die Lichtmenge $m\lambda^2 nl$.

Man

Man nähere das Licht L dem Object B ſoweit, bis das Bild von B in der Richtung OF geſehen, und das durch MN geſehene Object D gleich helle erſcheinen, ſo kann man weiter eben ſo, wie im 349 §. ſchlieſſen. Die Klarheit der Tafel D ſey $= \sigma$, der Tafel B $= \Sigma$, die Erleuchtung der erſten $= i$, der zweyten $= I$; ſo iſt vermöge des Verſuchs die Klarheit des Bildes von B $= m\lambda^2 n \,.\, \sigma$; und weil die von B auf A fallende Lichtmenge ſich zu der nach FO zurückgeworfenen verhält, wie $1 : mp\lambda^2 n$; ſo hat man $1 : mp\lambda^2 u = \Sigma : m\lambda^2 n \,.\, \sigma$, mithin $p = \frac{\sigma}{\Sigma} = \frac{i}{I} = \frac{LB^2}{LD^2}$. Dieſe Zahl p gehört alsdenn mit dem Neigungswinkel QAR = VEA $= \beta$, oder dem Einfallswinkel, KEA $= 90^\circ - \beta$ zuſammen. M. ſ. Bouguer Traité d' optique Liv. II. Sect. II. Art. VIII. pag. 152. ſqq.

352. §.

Bey dieſem Verſuch hat man ein paar Stücken Glas nöthig, wovon jedes die Geſtalt eines rechtwinklichten Parallelepipedi hat, und wovon das eine genau nochmahl ſo dick als das andre iſt: beyde müſſen von einerley Glasart, ſo viel möglich gleichartig und von gleicher Durchſichtigkeit ſeyn. Aus einem Stück ſehr weiſſen und klaren Glaſes, daß 5 Linien dick war, lies Hr. Bouguer zwey Parallelepipeda in Form zweyer Lineale ſchneiden, wovon das eine 4 Linien, das andre 8 Linien breit war, und durch dieſe lies er das Licht nach der Richtung der Breite durchgehen. In dieſer Richtung genommen, iſt eine ſolche Glasart nie ſo gleichförmig

förmig durchſichtig, als in der Richtung der Dicke der Glastafel, woraus die Stücke geſchnitten werden; daher ſchien auch das von der hintern Fläche zurückgeworfene Bild bey Wiederhohlung des Verſuchs ſowohl mit eben den Glasſtücken, als auch mit andern, gewöhnlich ein wenig röther, als das grade zu durch das andre Stück Glas geſehene Object. Allein dieſe Unbequemlichkeit war nicht zu vermeiden, weil ſonſt nicht leicht zwey Stücken Glas wären zu erhalten geweſen, wovon eines genau eine nochmahl ſo große Dicke, als das andre gehabt hätte. Unter dem Einfallswinkel CAB von 75°, alſo dem Neigungswinkel QAB $= \alpha = 15°$; war $q = \frac{1}{40} = 0{,}025$, und Hr. Bouguer fand zugleich $p = \frac{1}{27}$ bis $\frac{1}{28}$ ohngefehr $= 0{,}036$. Es war alſo ſin. VEA $= \sin\beta = \frac{2}{3} \sin 15° = 0{,}1725460$, und $\beta = 9°\ 56'$, mithin der Einfallswinkel KEA $= 80°\ 4'$. Bey mehrmahliger Wiederhohlung des Verſuchs (ob auch unter andern Einfallswinkeln der Verſuch ſey wiederhohlt worden, ſagt H. Bouguer nicht deutlich, vermuthlich iſt es geſchehen) ſchienen zuweilen beyde Zurückwerfungen von der vordern und hintern Fläche gleich ſtark zu ſeyn, gewöhnlich aber ſchein die Zurückwerfung von der hintern Fläche ſtärker zu ſeyn, als die von der Vorderfläche.

Es ſcheint alſo, daß man vermöge dieſer Verſuche des Hn. Bouguer berechtiget ſey, anzunehmen, die Aenderung in der Menge des zurückgeworfenen Lichts von der hintern Fläche des Glaſes richte ſich ohngefehr nach eben dem Geſetz, nach welchem die Zurückwerfung von der Vorderfläche erfolgt. Hätte dies ſeine Richtigkeit, ſo würde man

man die im 349 §. mitgetheilte Tafel, welche dieſe Aenderungen für die Vorderfläche anzeigt, leicht ergänzen können, ſo daß ſie für jeden Einfallswinkel η auch den dazu gehörigen Werth p für die hintere Fläche anzeigte: es wäre nemlich allemahl ohngefehr $p = \frac{4}{3} q = \frac{4}{3} (A + B \cos v\, \eta^3 + C \,.\, \cos v\, \eta^6)$. (349 §.)

353. §.

Herr Lambert hat ſich im I. und II. Cap. des zweyten Theils ſeiner Photometrie ganz anderer, von den hier beſchriebenen ſehr verſchiedener, ungemein ſinnreicher, Methoden bedient, um das von polirten Glastafeln zurückgeworfene, das durchſcheinende und das zerſtreuete Licht mit dem auffallenden zu vergleichen: ſie dienen zugleich als Muſter, wie man auch bey Unterſuchungen über andere Gegenſtände der mathematiſchen Naturlehre, Rechnungsſchlüſſe mit Verſuchen verbinden kann, um der Natur in ihren geheimſten Würkungen nachzuforſchen. Was ich bisher aus Hn. Bouguers Traité d'optique vorgetragen habe, dient als eine gute Vorbereitung, wenn man Hn. Lambert in ſeinen Schlüſſen folgen will. Die Gründe dieſer Lambertiſchen Theorie von der Durchſichtigkeit der Glastafeln werde ich hier zwar ebenfalls vortragen müſſen; nur werde ich nicht alle Rechnungen bey den vom Herrn Lambert gemachten Anwendungen auf beſondere Fälle durchführen können, weil ich nach der Abſicht dieſes Lehrbuchs auf ſo ganz ſpecielle Unterſuchungen, die mehr phyſikaliſch als mathematiſch ſind, mich nicht einlaſſen kann. In den übrigen optiſchen Wiſſenſchaften hat man über-

dem

dem die Reſultate dieſer auf Glastafeln eingeſchränkten Unterſuchungen nicht leicht für andre Fälle nöthig, als für den Fall des ſenkrecht auffallenden Lichts: und wenn es nur darauf ankommt, das ſenkrecht durch eine Glaslinſe fallende Licht mit dem auffallenden zu vergleichen; ſo kann das im 218 §. ſchon erklärte Verfahren völlig genügen.

354. §.

Wofern man nicht mit Vorſatz ſehr undurchſichtige Glastafeln zu den Verſuchen wählt, ſo kann man anfangs die Undurchſichtigkeit derſelben ganz beyſeit ſetzen, und ſie als vollkommen durchſichtig betrachten: wenigſtens können die Gleichungen des 336 §. $M = \frac{q + p}{1 + p}$, $N = \frac{1 - q}{1 + p}$, alſo auch $M + N = 1$ für klare und dünne Glastafeln als beynahe richtig zum Grunde gelegt werden, und Hr. Lambert rechtfertiget dieſe Vorausſetzung umſtändlich. Kann man nun durch einen Verſuch finden, welches bekannte Verhältniß $M : N$ mit einem gleichfalls bekannten Einfallswinkel zuſammen gehöre; ſo hat man vermöge der Gleichung $M + N = 1$ auch M und N. Die Gleichung $M = \frac{q + p}{1 + p}$ giebt ferner $p = \frac{M - q}{1 - M}$, und wenn zugleich q für eben den Einfallswinkel gefunden iſt, ſo kann auch p vermittelſt dieſer Gleichung gefunden werden. Hat man ſolchergeſtalt für mehrere Einfallswinkel p und q durch Verſuche gefunden, ſo entdeckt ſich ſchon einiger maſſen das Geſetz, wie p und q von dem Einfallswinkel abhängen; alſo

kann

kann man hiernächſt entweder nach einer phyſikaliſchen oder ſonſt muthmaßlich gewählten Hypotheſe ein paar Gleichungen, eine zwiſchen q, die andre zwiſchen p und dem Einfallswinkel annehmen, und daraus für andre Einfallswinkel zuerſt p und q, und hiernächſt M und N, mithin auch die Zahl $\frac{M}{N}$ berechnen. Wie nun durch anderweitige Verſuche wieder geprüft werden kann, welcher Einfallswinkel mit der Zahl $\frac{M}{N}$ zuſammen gehöre, ſo muß ſich ſolchergeſtalt entdecken, wie weit die angenommenen Gleichungen mit dem Erfolg in der Natur überein kommen, oder nicht.

355. §.

Für einen gegebenen Einfallswinkel η iſt das Verhältniß M : N bekannt, wenn das Licht durch eine ſehr durchſichtige Glastafel fällt: man ſoll das Verhältniß des zurückgeworfenen und durchgehenden Lichts zum einfallenden finden, wenn es durch mehrere in paralleler Lage hinter einander geſtellte Glastafeln ſcheint, und der Einfallswinkel auf die vordere derſelben bleibt.

Aufl. Es ſey x die Anzahl der hinter einander befindlichen Glastafeln $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ und das in der Richtung AB auffallende Licht $= 1$ theile ſich ſo, daß nach C ein Theil $= \varrho$ zurückgeworfen werde, nach D aber ein Theil $= r$ durchgehe, ſo ſoll man ϱ und r finden. Man nehme an, es komme noch eine Glastafel ζ hinzu, ſo daß nun 112. Fig.

die

die Anzahl aller Glastafeln $= x + 1$ iſt; ſo wird das durch die übrigen ſchon durchgefallene Licht die lezte Tafel ζ unter eben dem Einfallswinkel treffen, und vermöge der Vorausſetzung iſt das Verhältniß des davon zurückſtrahlenden Lichts zum auffallenden $= M : 1$, des durchſcheinenden zum auffallenden aber $= N : 1$. Es falle alſo in der Richtung AB auf die vordere Tafel die Lichtmenge $= 1$, ſo hat man vermöge der Vorausſetzung folgende Lichtmengen.

Die nach C zurückſtrahlende $= \varrho$
— nach D durchſcheinende $= r$
— nach E zurückſtrahlende $= Mr$
— nach F durchſcheinende $= Nr$
— nach G durchſcheinende $= Mr^2$
— nach H zurückſtrahlende $= Mr\varrho$
— nach I zurückſtrahlende $= M^2r\varrho$
— nach K durchſcheinende $= NMr\varrho$
— nach L durchſcheinende $= M^2r^2\varrho$
— nach M zurückſtrahlende $= M^2r\varrho^2$
— nach N zurückſtrahlende $= M^3r\varrho^2$
— nach O durchſcheinende $= NM^2r\varrho^2$
— nach P durchſcheinende $= M^3r^2\varrho^2$,

u. ſ. f. Demnach geht von allen $x + 1$ Tafeln zurück die Lichtmenge

$$R = \varrho + Mr^2 + M^2r^2\varrho + M^3r^2\varrho^2 + \ldots$$

und durch alle ſcheint durch die Lichtmenge

$$S = Nr + NMr\varrho + NM^2r\varrho^2 + NM^3r\varrho^3 \ldots$$

Weil nun, das erſte Glied der Reihe R ausgenommen, beyde Reihen geometriſche Progreßionen ſind, und der Exponent $= M\varrho$ iſt, ſo hat man

$$R = \varrho + \frac{Mr^2}{1 - M\varrho} \text{ und } S = \frac{Nr}{1 - M\varrho}.$$

Wären die Glastafeln vollkommen durchſichtig, ſo hätte man $M + N = 1$ und $\varrho + r = 1$. Demnach ſetze man in der erſten Gleichung $r = 1 - \varrho$, ſo erhält man $R = \varrho + \frac{M(1 - 2\varrho + \varrho^2)}{1 - M\varrho}$ oder $R = \frac{\varrho + M - 2M\varrho}{1 - M\varrho}$. In der zweyten Gleichung ſetze man $M = 1 - N$, $\varrho = 1 - r$, ſo wird $S = \frac{Nr}{N + r - Nr}$. Wäre nun auſſer ζ die Glastafel α allein vorhanden, ſo wäre $M = \varrho$, $N = r$, demnach iſt

für 2 Glastafeln

$R = \frac{2M}{1 + M}$ und $S = \frac{N}{2 - N}$. Kömmt auſſer α und ζ die dritte Tafel β hinzu, ſo iſt vermöge des gefundenen für 2 Glastafeln α und β die Zahl

$\varrho = \frac{2M}{1 + M}$ und $r = \frac{N}{2 - N}$, alſo

für 3 Glastafeln

$$R = \left(\frac{2M}{1 + M} + M - \frac{4M^2}{1 + M}\right) : \left(1 - \frac{2M^2}{1 + M}\right)$$

oder $R = \frac{3M - 3M^2}{1 + M - 2M^2} = \frac{3M}{1 + 2M}$,

und $S = \frac{N^2}{2 - N} : \left(N + \frac{N}{2 - N} - \frac{N^2}{2 - N}\right)$

oder $S = \frac{N^3\; N^2}{3N - 2N^2} = \frac{N}{3 - 2N}$.

Schreibt man x ſtatt der Zahl 3, ſo iſt

$$R = \frac{x . M}{1 + (x-1) M}, \text{ und } S = \frac{N}{x-(x-1) N}.$$

Wofern dieſe Formuln für x Glastafeln wahr ſind, ſo ſind ſie auch für $x + 1$ Glastafeln wahr. Denn man ſetze $\varrho = \frac{x . M}{1 + (x-1) M}$, $r = \frac{N}{x-(x-1)N}$, in den allgemeinen Formuln

$$R = \frac{\varrho + M - 2M\varrho}{1 - M\varrho}, \quad S = \frac{Nr}{N + r - Nr},$$

ſo findet man

für $x + 1$ Glastafeln

$$R = \left(\frac{x . M}{1+(x-1)M} + M - \frac{2x . M^2}{1+(x-1)M}\right) : \left(1 - \frac{x M^2}{1+(x-1)M}\right)$$

$$= \frac{(x+1)M-(x+1)M^2}{1+(x-1)M - x M^2} = \frac{(x+1)M(1-M)}{(1+xM)(1-M)}$$

oder $R = \frac{(x+1) M}{1 + x M}$.

Ferner findet man

$$S = \frac{N^2}{x-(x-1)N} : \left(N + \frac{N}{x-(x-1)N} - \frac{N^2}{x-(x-1)N}\right)$$

$$= \frac{N^2}{(x+1) N - x . N^2} = \frac{N}{x + 1 - x N}.$$

Wie nun beyde Formuln für 2 und 3 Glastafeln wahr ſind, ſo ſind ſie vermöge des erwieſenen auch für 4, 5, 6, 7, und jede folgende um 1 gröſſere Zahl von Glastafeln wahr. Demnach iſt überhaupt

für x Glastafeln

$$R = \frac{x . M}{1 + (x-1) M}, \quad S = \frac{N}{x-(x-1)N}.$$

356. §.

356. §.

Weil der Vorausſetzung gemäß $M + N = 1$, alſo auch $S = \frac{1 - M}{x - (x - 1)(1 - M)} = \frac{1 - M}{1 + (x - 1) M}$ iſt, ſo bleibt auch $R + S = 1$. Man nehme an, für einen gewiſſen Einfallswinkel η ſcheine durch alle Glastafeln eben ſo viel Licht durch, als davon zurück ſtrahlet, ſo hat man $R = S = \frac{1}{2}$, mithin $\frac{x \,.\, M}{1 + (x - 1) M} = \frac{1}{2}$ und $\frac{N}{x - (x - 1) N} = \frac{1}{2}$. Das giebt $2x M = 1 + (x - 1) M$, alſo $M = \frac{1}{1 + x}$ und $2 N = x - (x - 1) N$, mithin $N = \frac{x}{1 + x}$, und $\frac{M}{N} = \frac{1}{x}$. Kann man nun durch einen Verſuch finden, wie groß der Einfallswinkel η ſey, wenn von demjenigen Licht, das durch x Glastafeln ſcheint, eben ſo viel zurück ſtrahlet, als durchgehet; ſo iſt zugleich η der Einfallswinkel, unter welchem das Licht auf eine dieſer Glastafeln fallen muß, wenn es ſich in dem Verhältniß $M : N = 1 : x$ theilen ſoll. Hr. Lambert hat den Verſuch auf folgende Art angeſtellet. (Photom. 332. 377. §.)

Auf der weiſſen wagrecht liegenden Ebene ABCD war ein ſchwarzer oder ſonſt gefärbter Strich IK eine Linie breit gezogen, ſo viel thunlich 113. Fig.

 durch-

durchgängig von gleiſförmiger Schwärze, oder ſonſt überall gleichförmiger Farbe. Auf dieſer Ebene waren eine oder mehrere Glastafeln in paralleler Lage hinter einander lothrecht ſo aufgerichtet, daß die Grundlinie EH mit der Linie IK in ihrer Mitte bey L einen Winkel ILE machte, der nur um wenige Grade kleiner war, als ein rechter Winkel: ſolchergeſtalt ſahe das Auge O des Zuſchauers den hintern Theil LI des Strichs in LQ vermittelſt des gebrochenen Lichts, den vordern Theil LK aber in LP vermittelſt des zurückſtrahlenden Lichts. Die Ebene AC ſelbſt ward entweder von den auffallenden Sonnenſtrahlen, oder vom Tageslicht, oder im ganz finſtern Zimmer vom Kerzenlicht gleich ſtark, und zwar in der Stellung erleuchtet, daß die Strahlen mit den Glastafeln parallel auffielen, mithin leztere keinen Schatten auf den vordern oder hintern Theil der Ebene AC werfen konnten. Keiner von beyden Theilen des Strichs ſahe nun völlig ſchwarz, oder völlig ſo gefärbt aus, wie derſelbe ohne Glas geſehen erſchien. Denn mit dem Bilde des hintern Theils LI vermiſchte ſich das weiſſe von LN reflectirte Licht, und mit dem Bilde des vordern Theils vermiſchte ſich das weiſſe von LM durchſcheinende Licht: daher ſahen die Bilder des ſchwarzen Strichs aſchfarbicht, die Bilder des gefärbten Strichs blaſſer gefärbt aus, als die Striche ſelbſt. Nun kam es darauf an, für das Auge eine ſolche Stelle zu ſuchen, aus welcher beyde Bilder gleich aſchfärbig, oder ſonſt gleich blaß gefärbt erſchienen: und das ließ ſich um deswillen leicht bewerkſtelligen, weil die Klarheit des einen Bildes zunimmt, wenn bey geän-

derter

derter Stelle des Auges ſich die Klarheit des andern vermindert. Uebrigens muſte das Auge O ſoweit entfernt ſeyn, daß die Lage der in daſſelbe kommenden Strahlen von der parallelen Lage nicht zu ſehr verſchieden war.

Hatte nun das Auge die erforderliche Stelle, ſo waren die Winkel NQL, KPK, IQL, MPL, als die Einfallswinkel für das ins Auge kommende zurückſtrahlende und gebrochene Licht gleich groß, auch konnte eines jeden Gröſſe gefunden werden, wenn auf der Glastafel LP oder LQ gemeſſen war, weil $\frac{LK}{LP} = \frac{LN}{LQ}$ die Tangente eines jeden dieſer Winkel giebt. Wegen der gleichen Erleuchtung der Ebene AC auf beyden Seiten der Glastafeln, und der Gleichheit der Ausflußwinkel bey N, K, I, M, fällt auf ein paar zuſammen gehörige Stellen P, Q, gleich viel Licht, und wegen dergleichen ſcheinbaren Klarheit der Bilder kommt von beyden gleichviel Licht ins Auge. Von K oder I falle auf P oder Q die Lichtmenge α, davon ſtrahle zurück der Theil $r\alpha$, und ſcheine durch der Theil $s\alpha$; von N oder M falle auf P oder Q die Lichtmenge β, ſo ſtrahlt zurück der Theil $r\beta$, und es ſcheint durch der Theil $s\beta$. Demnach kommt von P ins Auge die Lichtmenge $r\alpha + s\beta$, und von Q die Lichtmenge $s\alpha + r\beta$. Beyde ſind vermöge des Verſuchs gleich groß, alſo $(r - s)\,\alpha = (r - s)\,\beta$. Weil aber α und β ungleich ſind, ſo kann dieſe Gleichung nur unter der Bedingung beſtehen, daß $r = s$ ſey. Das heiſt, von dem auffallenden Licht ſtrahlt ſo viel zurück, als durch die über EH be-

 findliche

findliche eine, oder mehrere hinter einander geſtell- ten, Glastafeln durchſcheint.

Die von Hn. Lambert angeſtellten Verſuche gaben folgende Reſultate.

Zahl x d. Glastaf.	Wink. η	M = $1:(1+x)$	N = $x:(1+x)$	Verh. M : N
1	$14\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1 : 1
2	22	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1 : 2
3	27	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1 : 3
4	31	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	1 : 4
5	35	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	1 : 5
6	39	$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	1 : 6
7	43	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$	1 : 7
8	47	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$	1 : 8
9	$50\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$	1 : 9

357. §.

114. Fig. Ueber der weiſſen Fläche AD ſtehe eine Glasta- fel AB lothrecht, welche das in der Richtung LE auffallende Licht auf AH zurück wirft. Neben die- ſer Tafel ſey ein dreyſeitiges gläſernes Prisma auf eine von ſeinen Seitenlinie ſo gelegt, daß dieſe Sei- tenlinie mit der Grundlinie der Tafel in grader Li- nie liege, und die dem Licht zugekehrte Seitenfläche AC das davon zurück ſtrahlende Licht auf AG werfe. Die Neigung dieſer Seitenfläche AC ändre man ſo lange, bis AG und AH gleich ſtark erleuchtet er- ſcheinen, wobey man ſorgfältig verhüten muß, daß auf dieſe Stellen ſonſt kein Licht fällt, als das von der Glastafel und dem Prisma zurückgewor- fene. Das von der Glastafel zurückſtrahlende Licht iſt nach der bisherigen Bezeichnung = M, das vom Prisma zurückſtrahlende = q, und zu jenem gehört

gehört der Einfallswinkel BEL = AEH, zu dieſem der Einfallswinkel CFL = AFG. Der Winkel BEL = AEH = 90° − AHE läßt ſich meſſen, und wenn auch BAC gemeſſen iſt, ſo hat man CFL = EFA = BEL − BAC. Es iſt aber die Klarheit der Fläche AH = $\frac{M}{AH}$, der Fläche AG = $\frac{q}{AG}$, und die eine iſt vermöge des Verſuchs der andern gleich: alſo hat man $q = \frac{M.AG}{AH}$, wenn M ſchon gefunden iſt. Zwey verſchiedene Verſuche, die Hr. Lambert anſtellte, fielen aus, wie folget.

	1. Verſuch	2. Verſuch.
AE	= 1	= 1
AH	= 0,9	= 2,1
AG	= 0,67	= 1,02
BEL	= 42°	= 65°
BAC	= 15°	= 19°
CFL	= 27°	= 46°

Im erſten Verſuch gehörte alſo zu M der Einfallswinkel $\eta = 42°$, und vermöge des 356 §. iſt

$$\text{diff. } \tfrac{1}{56} \begin{array}{l} M = \frac{1}{7} \text{ wenn } \eta = 39° \\ M = \frac{1}{8} \text{ wenn } \eta = 43°. \end{array} \text{ diff. } 4°.$$

Man ſubtrahire alſo $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{56} = \frac{1}{224}$ von $\frac{1}{8}$ und nehme $\frac{1}{8} - \frac{1}{224} = \frac{27}{224} = 0{,}12054 = M$ für $\eta = 42°$, ſo findet man $q = \frac{67 \cdot 0{,}12054}{90} = 0{,}08972$ für den Winkel $\eta = 27°$. Für eben dieſen

ſen Winkel iſt $M = \frac{1}{4}$, alſo $p = \frac{M-q}{1-M}$ (353 §.) $= \frac{4}{3} \cdot 0{,}16028 = 0{,}21371$.

Im zweyten Verſuch iſt der zu M gehörige Einfallswinkel $\eta = 65°$, und dazu gehört nach einer andern Beobachtung des Hn. Lambert $M = \frac{1}{13}$, mithin iſt $q = \frac{1}{13} \cdot \frac{162}{210} = \frac{1}{13} \cdot \frac{51}{105} = 0{,}03736$ wenn der Einfallswinkel $\eta = 46°$ iſt. Weil dieſer dem Winkel von 47° in der Tabelle am Ende des 356 §. ſehr nahe kommt, ſo iſt für $\eta = 46°$ auch noch beynahe $M = \frac{1}{9}$, und man hat für eben den Winkel $p = \frac{M-q}{1-M} = \frac{9}{8} = 0{,}08297$.

358. §.

115. Fig. Eine Glastafel AB ſey gegen die weiſſe Ebene DF unter dem Winkel FAB $= \alpha$ geneigt, und das in der Richtung LC auffallende Licht werde zum Theil nach CE zurück geworfen, ſo wie der übrige Theil nach CD durchſcheint. Bey ſtärkerer Neigung der Tafel nimmt der Einfallswinkel BCL ab, da dann zugleich die zurückgeworfene Lichtmenge wächſt, und die durſcheinende abnimmt. Man kann alſo die Lage der Tafel ſuchen, welche erfordert wird, damit beyde Stücke AD und AE der weiſſen Ebene gleich ſtark erleuchtet erſcheinen, wobey wiederum alles fremde Licht möglichſt abgehalten werden muß. Auf AE fällt alsdenn die Erleuchtung $\frac{M}{AE}$, auf AD die Erleuchtung $\frac{N}{AD}$, und

man

man hat vermöge des Verſuchs $\frac{M}{AE} = \frac{N}{AD}$,
oder $\frac{M}{N} = \frac{AE}{AD}$ für den Einfallswinkel BCL = ACD = ACE. Wenn aber FAC = α gemeſſen iſt, ſo hat man auch tg . ACE = $\frac{AE \sin\alpha}{AC - AE \cos\alpha}$.

Stellt man dieſen Verſuch mit Glastafeln von mehrerer und minderer Durchſichtigkeit an, ſo findet man allemahl ſehr nahe das Verhältniß M : N mit einem ſolchen Einfallswinkel zuſammen gehörig, wie es mit der Tabelle am Ende des 356 §. übereinſtimmt, und man kann ſich ſolchergeſtalt verſichern, daß das Verhältniß M : N für einen gegebenen Einfallswinkel nur ſehr geringe Aenderungen leide, wenn gleich die Durchſichtigkeit der Glastafel nicht allemahl einerley iſt.

359. §.

Wenn η den Einfallswinkel, (die Neigung des einfallenden Lichts gegen die zurückwerfende oder brechende Fläche, wie im 349 §.) bezeichnet, und die Buchſtaben q, p, eben die Bedeutung behalten, worin ſie bey der ganzen bisherigen Unterſuchung ſind gebraucht worden; ſo iſt nach Hn. Lambert (Photom. 425 - 438 §.) $l \frac{1}{1 - q} = \alpha . \operatorname{cosec}\eta^2$ und $l \frac{1}{1-p} = \alpha' . \operatorname{cosec}\eta^2$. Ferner beſtimmt Herr Lambert die Coefficienten α und α' aus

ſeinen Verſuchen ſo, daß $\alpha = 0{,}0087214$ und $\alpha' = 0{,}0199966$ ſeyn müſſe, wenn das l den briggiſchen Logarithmen bezeichnet. Dieſemnach hätte man

$$l \frac{1}{1 - q} = 0{,}0087214 \,.\, \mathrm{coſec}\,\eta^2$$

$$l \frac{1}{1 - p} = 0{,}0199966 \,.\, \mathrm{coſec}\,\eta^2.$$

Wieweit dieſe Gleichungen mit dem überein kommen, was die Verſuche lehren, läßt ſich aus der nachſtehenden Tafel überſehen.

Winkel	durch Rechnung			aus Beobacht.
η	q	p	M	M
$14\frac{1}{2}$°	0,2741	0,5136	0,5205	0,5000
22	0,1333	0,2753	0,3204	0,3333
27	0,0928	0,1968	0,2421	0,2500
31	0,0729	0,1566	0,1985	0,2000
35	0,0592	0,1283	0,1663	0,1667
39	0,0494	0,1078	0,1428	0,1429
43	0,0423	0,0925	0,1234	0,1250
47	0,0368	0,0810	0,1091	0,1111
$50\frac{1}{2}$	0,0332	0,0731	0,0991	0,1000

Wie nun die Reſultate der Rechnung den Reſultaten, welche die Verſuche gaben, ſo nahe kommen, wie bey ſo verwickelten Unterſuchungen nur erwartet werden kann; ſo hat man Grund genug beyde Gleichungen als ſolche anzunehmen, wonach man benöthigten Falles, ohne ſehr zu fehlen rechnen kann. Herr Lambert ſelbſt hat daraus folgende Tafel für Einfallswinkel von 10 zu 10 Graden berechnet.

η	q	p	M	N
10°	0,4862	0,7766	0,7108	0,2892
20	0,1578	0,3204	0,3622	0,6378
30	0,0772	0,1653	0,2070	0,7930
40	0,0474	0,1046	0,1376	0,8624
50	0,0337	0,0705	0,0973	0,9027
60	0,0264	0,0585	0,0802	0,9198
70	0,0225	0,0499	0,0690	0,9310
80	0,0203	0,0450	0,0624	0,9376
90	0,0199	0,0448	0,0619	0,9381

Nach Hn. Lambert würde alſo die Vorderfläche einer Glastafel $\frac{1}{50}$ des ſenkrecht auffallenden Lichts zurückwerfen, anſtatt daß nach Hn. Bouguer das ſenkrecht zurückſtrahlende Licht $\frac{1}{36}$ bis $\frac{1}{40}$ des auffallenden betragen würde. (349 §.) Das von der hintern Fläche ſenkrecht zurückſtrahlende beträgt dagegen nach Hn. Lambert mehr als nach Hn. Bouguer, nemlich $\frac{1}{23}$ ohngefehr, und nach Herrn Bouguer nur $\frac{1}{27}$, zuweilen etwas mehr. Uebrigens iſt hiebey noch folgende Anmerkung nöthig, wenn man etwa die Reſultate der Lambertſchen Unterſuchungen mit den Bouguerſchen im 349 und 352 §. vergleichen will. Herr Lambert ſetzt voraus, das Licht falle auf eine Glastafel, wie PQRS (73 Fig.), und bey ihm iſt η = PBA, oder nach ſeiner Bezeichnung LBA = γ. Wenn nun q vermittelſt der Gleichung $l\,\frac{1}{1-q} = \alpha\,.\,\text{coſec}\,\eta^2 = \alpha\,.\,\text{ſec}\,\gamma^2$ gefunden iſt, ſo ſcheint es, man müſſe um p zu finden in der Gleichung $l\,\frac{1}{1-p} = \alpha'\,.\,\text{coſec}\,\eta^2 = \alpha'\,\text{ſec}\,\gamma^2$ für η den Winkel MCB oder

für

für γ den Winkel MBC nehmen: allein Hr. Lambert ſagt im 437 §. ſeiner Photometrie, das ſolches mit ſeinen Verſuchen nicht überein ſtimme. Bey Berechnung der zuletzt mitgetheilten Tafel iſt vielmehr der Winkel $\eta = PBA$, oder $\gamma = LBA$ beybehalten worden, wiewohl es doch ſcheint, daß H. Lambert Verbeſſerungen angebracht habe, die ſich auf den 439 und 440 §. ſeiner Photometrie gründen, die er aber nicht deutlich anzeigt. Nach Hn. Bouguer würde man p vermittelſt der Gleichung $p = \frac{4}{3}(A + B \,.\, \text{coſv}\,\eta^3 + C \,.\, \text{coſv}\,\eta^6)$ (349. 352 §.) finden, den Winkel $\eta = MCB$ geſetzt: nach Herrn Lambert aber wäre für Glastafeln l

$$\frac{1}{1-p} = \alpha' \,.\, (\text{ſec Ang. ſin}\ \tfrac{31}{20}\ \text{ſin}\,(90^\circ - \eta))^2.$$

360. §.

Es ſey nun, daß die eine oder die andre dieſer Gleichungen den Vorzug verdiene, ſo kann doch keine derſelben für ſolche Winkel η gebraucht werden, die beym Glaſe weniger als $49^\circ\ 49\frac{1}{3}'$, und beym Waſſer weniger als $41^\circ\ 32'$ faſſen. Wird $\eta < 49^\circ\ 49\frac{1}{3}'$, ſo iſt $90^\circ - \eta > 40^\circ\ 10\frac{2}{3}'$, und $\frac{31}{20}\ \text{ſin}\,(90^\circ - \eta) > 1$, mithin kann die Lambertſche Gleichung nicht mehr beſtehen. Auch des H. Bouguer Gleichung iſt nicht weiter brauchbar: denn für Einfallswinkel, die nur ein wenig kleiner ſind, wächſt auf einmahl p ſehr ſchnell, und die Zurückwerfung iſt beym Glaſe für alle Winkel, die kleiner als $49^\circ\ 49\frac{1}{3}'$ ſind, beym Waſſer aber für Einfallswinkel die kleiner ſind, als $41^\circ\ 32'$ eben ſo ſtark, als die Zurückwerfung metallener Spie-

gel

gel und des gereinigten Queckſilbers. Weil übrigens alsdenn durch die hintere Fläche gar kein Licht mehr durchgehet; ſo iſt ſie in ſo fern, wie die Fläche des Queckſilbers, oder eines metallenen Spiegels als undurchſichtig zu betrachten: der Theil des Lichts, welcher mit zurückgeworfen wird, iſt als verlohren anzuſehen. Eben dieſe merkwürdige Eigenſchaft der innern Gränze einer durchſichtigen Maſſe, wenn auſſerhalb derſelben eine Maſſe von geringerer Dichtigkeit befindlich iſt, kann verurſachen, daß ein gläſernes mit Luft umgebenes Prisma die Natur eines undurchſichtigen Körpers annimmt, und gar kein Licht durchläßt, dagegen aber einen großen Theil des auffallenden Lichts zurück wirft. Die Umſtände, unter welchen dies erfolgen muß, kennet man ſchon aus dem 133 §.

Ein Verſuch der dieſe ſtarke Zurückwerfung von der innern Fläche des Waſſers beweiſet, läßt ſich ſo anſtellen. In ein gewöhnliches cylindriſches Trinkglas, oder noch beſſer, in ein gläſernes Gefäß, daß die Geſtalt eines rechtwinklichten Parallelepipedi hat, und aus reinen durchſichtigen weiſſen Glaſe beſtehet, gieſſe man auf den Boden Queckſilber bis an AB, und oben drüber Waſſer bis an CD. Die Figur ſtellt einen verticalen Schnitt des Gefäſſes vor, der entweder durch die Axe des Cylinders geht, oder wenn es ein Parallelepipedum iſt, zwey einander gegen über ſtehenden Seitenflächen ſenkrecht ſchneidet. In dieſer Verticalfläche befinde ſich ein weiſſes erleuchtetes Object bey G, und gegen über in O ſtehe das Auge, welches das von beyden Flächen AB und CD aus E und F zurück geworfene Licht empfängt: ſo ſiehet das Auge

116. Fig.

zwey

zwey Bilder von G, das eine in H, das andre in I, und dieſe beyden Bilder erſcheinen allemahl ſehr nahe gleich helle, wenn die Winkel BEO, DFO, weniger, als $41\frac{1}{2}$ Grade betragen. Die Menge des von der innern Waſſerfläche CD zurückgeworfenen Lichts beträgt alſo etwa $\frac{2}{3}$ und für die kleinſten Einfallswinkel $\frac{3}{4}$ des einfallenden Lichts, der übrige dritte oder vierte Theil des einfallenden Lichts wird entweder nach allen Seiten zerſtreuet, oder iſt doch ſonſt als verlohren anzuſehen.

361. §.

Ob nun gleich die innere Fläche des Glaſes und anderer durchſichtiger Maſſen ſo lange kein Licht durchläßt, bis der Neigungswinkel gegen das Einfallsloth bis auf eine gewiſſe Gränze abgenommen hat, oder der Einfallswinkel, welchen der Strahl mit der Fläche ſelbſt macht, eine gewiſſe Gränze übertrift; ſo wirft ſie doch bey eben den Umſtänden, wie ſchon bemerkt iſt, nicht alles auffallende Licht zurück, ſondern etwa nur $\frac{3}{4}$ deſſelben, und $\frac{1}{4}$ wird nach allen Seiten zerſtreuet oder geht ſonſt verlohren. Dies kann auf die Vermuthung leiten, es werde die Fläche etwas von dieſer Eigenſchaft auch alsdenn noch an ſich behalten, wenn die Einfallswinkel ſo groß werden, daß das Licht wieder durchgehet. Wäre dieſe Vermuthung gegründet, ſo könnte man im 336 §. nicht mehr $p + m = 1$ annehmen, es wäre vielmehr $p + m < 1$. Verhielte ſich nemlich die Menge des bey C zerſtreueten Lichts (73 Fig.) zur Menge des auffallenden, wie $\mu : 1$, ſo hätte man $p + m + \mu = 1$. Bey ſo bewandten Umſtänden würde nun die Unter-

terſuchung über die eigentlichen Werthe der Zahlen q, p, m, n, λ im 339. u. f. §. §. noch weitläuftiger, zumahl da nicht zu zweifeln iſt, daß nicht auch ein Theil des bey B auffallenden Lichts nach allen Seiten zerſtreuet werde, der nicht in die Maſſe eindringt. Wäre das Verhältniß der bey B zerſtreueten Lichtmenge zur auffallenden $= \nu : 1$, ſo hätte man $q + n + \nu = 1$. Herr Bouguer ſcheint anzunehmen, daß die Zerſtreuung bey B ſo beträchtlich nicht ſey, als die bey C, und daß ohne merklichen Fehler $q + n = 1$ geſetzt werden könne. Ich beziehe mich hiebey auf ſein oft angeführtes Werk Liv. II. Sect. II. Art. IX. pag. 156. ſqq. und ich werde ſeine Gedanken noch weiter zu erläutern ſuchen.

362. §.

Wenn das Licht durch eine Glastafel RPQS fällt, und die auffallende Lichtmenge $= 1$ geſetzt 94 F. wird, ſo iſt vermöge des 335 §. die geſammte durchgehende Lichtmenge $N = \frac{m \lambda n}{1 - p^2 \lambda^2}$. Es iſt die Summe aller der Lichtmenge, welche in den Richtungen C*c*, E*e*, Gg, u. ſ. f. durchgehen, und eine geometriſche Progreßion ausmachen, wovon das erſte Glied $m\lambda n$, der Exponent der Glieder $p^2 \lambda^2$ iſt. In Fällen, wenn der Strahl AB entweder völlig oder beynahe ſenkrecht auffällt, fallen die durchgehenden Strahlen C*c*, E*e*, Gg, u. ſ. f. zuſammen, und man kann die Strahlen C*c*, E*e*, u. ſ. f. nicht einzeln auffangen. Wenn demnach das Licht an den Stellen B, C, D, E, u. ſ. f. wegen

der

der Zerſtreuung nicht geſchwächt würde, ſo wäre die ſenkrecht durch eine ſolche Glastafel fallende Lichtmenge $= \frac{m\lambda n}{1-p^2\lambda^2}$. Um nun die Verminderung des Lichts wegen der erwehnten Zerſtreuung auf die bequemſte Art in Rechnung zu bringen, nehme man an, wegen der Zerſtreunng an den Stellen B und C zuſammen, gehe von der Lichtmenge, die ſonſt nach C*c* durchgehen würde, ein Theil verlohren, der ſich zum ganzen wie $r : 1$ verhält, ſo geht nur ein Theil $= m\lambda n (1 - r)$ nach C*c* durch. Man nehme $1 - r = s$ an, ſo erhellet leicht, wenn man die Schlüſſe des 335 §. vergleicht, daß nach E*e* die Lichtmenge $mp^2\lambda^3 ns$ gehe, vorausgeſetzt, daß beyde Zerſtreuungen an D und E zuſammen, das Licht in eben dem Verhältniß vermindern, als die Zerſtreuungen an B und C zuſammen es verminderten. Nach G*g* geht alſo die Lichtmenge $mp^4\lambda^5 ns^3$ u. ſ. f., und die geſammte durchfallende Lichtmenge iſt eine geometriſche Progreßion, wovon das erſte Glied $m\lambda ns$, der Exponent der Glieder $p^2\lambda^2 s$ iſt. Dieſemnach leidet der Ausdruck für N im 335 §. dieſe Verbeſſerung, daß eigentlich $N = \frac{m\lambda ns}{1 - p^2\lambda^2 s}$ angenommen werden muß: und dies iſt zugleich die Lichtmenge, welche nach C*c* durchgehet, wenn das Licht ſenkrecht durchſcheint, und alle übrige Strahlen E*e*, G*g*, u. ſ. f. mit C*c* zuſammen fallen. Wenn auf dieſe Art die Zahl $s = 1 - r$ in die Rechnung eingeführt wird, ſo bedarf es deſſen nicht, daß man die Zahlen μ und ν wie im 361 §. in Rechnung

nung bringe: es bleibt $q + n = 1$, $p + m = 1$: nur muß man alsdenn durch n die Lichtmenge verſtehen, die bey B nach der Zurückwerfung übrig bleibt, und ſowohl die in B noch zerſtreuete als die hineindringende zuſammen genommen ausmacht. Eben ſo iſt durch m die nach der Zurüwerfung in C noch übrige Lichtmenge zu verſtehen, die zum Theil zerſtreuet wird, zum Theil nach Cc durchgehet.

Nun ſind die Zahlen $n = 1 - q$, $m = 1 - p$ zwar eigentliche Brüche, ſie ſind aber von der Einheit nicht viel verſchieden: denn man weis ſchon, daß bey Glastafeln ohngefehr $q = \frac{1}{36}$ vielleicht nur $\frac{1}{50}$, $p = \frac{1}{27}$ ſey. Das auch r nur ein kleiner Bruch, mithin $s = 1 - r$ von der Einheit nicht ſehr verſchieden ſeyn werde, läßt ſich ebenfalls zum voraus vermuthen, ſo wie auch s von der Einheit nicht ſehr verſchieden ſeyn kann; es müſte denn das Glas ſehr dick, oder für ſich ſehr undurchſichtig ſeyn. Uebrigens iſt $p^2 = \frac{1}{729}$, alſo iſt gewöhnlich $p^2 \lambda^2 s$ ohngefehr $= \frac{1}{1000}$, weil auch λ^2 und s eigentliche Brüche ſind; demnach iſt gewöhnlich N ohngefehr $= \frac{1000}{999} \cdot m\lambda ns$, oder es kommt auch wohl die Zahl N der Zahl $m\lambda ns$ noch näher. Wie nun überall bey dieſen Rechnungen keine groſſe Schärfe ſtatt findet, ſo kann man zur Erleichterung der folgenden Unterſuchungen, auch wenn das Licht ſenkrecht durch die Glastafel fällt, annehmen, es gehe nach der Richtung Cc die Lichtmenge $m\lambda ns$ durch, wenn gleich das von den übrigen Zurückwerfungen herrührende Licht jene Lichtmenge etwa noch um ihren tauſendſten Theil vergröſſert.

363. §.

117. Fig. Es ſtelle nunmehro A ein dickes Stück Glas vor, durch welches das von der weiſſen Tafel C ausgehende Licht in der Richtung EF völlig, oder beynahe ſenkrecht durchgehet. Auf E falle die Lichtmenge = 1, ſo iſt die bey F durchgehende Lichtmenge = $m\lambda ns$. (362 §.) In B ſtelle man ſich vier nach einander folgende, übrigens aber durch einen kleinen Zwiſchenraum von einander abgeſonderte Stücken Glas vor, davon jedes nur um den vierten Theil ſo dick iſt, als A war. Durch dieſe gehe das Licht, was von der weiſſen Tafel D kommt, in der Richtung GH völlig oder beynahe ſenkrecht durch, und die bey G auffallende Lichtmenge ſey = 1. Wofern man nun mit Hn. Bouguer annehmen kann, das Licht vermindere ſich, indem es durch die vier von einander abgeſonderte Gläſer fällt, nach eben dem Geſetz, nach welchem es ſich beym Durchgang durch das einige ſolide Stück Glas EF verminderte; ſo geht durch das erſte Stück Glas die Lichtmenge $m\lambda^{\frac{1}{4}} ns$ (327 §.) Ferner ſind die Lichtmengen, welche durch das zweyte, dritte und vierte Stück Glas fallen, $m^2 \lambda^{\frac{1}{2}} n^2 s^2$, $m^3 \lambda^{\frac{3}{4}} n^3 s^3$, $m^4 \lambda n^4 s^4$. Man ordne die Gläſer mit den kleinen Tafeln C und D ſo, daß C durch das dicke Glas, D aber durch die vier dünnern Gläſer geſehen werden kann, wenn das Auge in O ſtehet. Beyde Tafeln werden gleich groß und gleich weiß angenommen, und in L ſtehet ein Licht, welches beyde erleuchtet.

Wenn nun dieſe Tafeln gleich ſtark erleuchtet ſind, ſo erſcheinen ſie ohne Gläſer dem Auge gleich helle;

helle; durch die Gläſer betrachtet, erſcheint D nicht ſo helle als C. Rückt man D dem Licht L näher, ſo wächſt die ſcheinbare durch die Gläſer geſehene Helligkeit von D, und man kann es dahin bringen, daß beyde Tafeln gleich helle erſcheinen. Alsdenn ſey die Klarheit der Tafel C $= \sigma$, der Tafel D $= \Sigma$, der erſten Erleuchtung $= i$, der lezten Erleuchtung $=$ I; ſo iſt die ſcheinbare Klarheit von C $= m\lambda n s \sigma$, die ſcheinbare Klarheit von D $= m^4 \lambda n^4 s^4 \Sigma$, und beyde ſind vermöge des Verſuchs gleich groß. Das giebt $m^3 n^3 s^3 \Sigma = \sigma$, und $mns = \sqrt[3]{(\sigma : \Sigma)}$, alſo auch $mns = \sqrt[3]{(i : \mathrm{I})}$.

An ſich wäre es nicht nöthig, vier dünnere Gläſer zu gebrauchen: es würden zwey genügen, wovon jedes halb ſo dick als das dickere wäre. Man ſieht leicht, daß alsdenn die ſcheinbare Klarheit von D $= m^2 \lambda n^2 s^2 \Sigma$ wäre, und das gäbe die Gleichung $mns\Sigma = \sigma$, alſo $m \,.\, n \,.\, s = \sigma : \Sigma$, oder $m \,.\, n \,.\, s = i : \mathrm{I}$. Man fände alſo mns durch eine kürzere Rechnung, und hätte nicht nöthig eine Wurzel auszuziehen. Allein Hr. Bouguer braucht deswegen mehr Gläſer, damit die Verminderung des Lichts deſto ſtärker ausfalle, und mns ſelbſt deſto ſchärfer und richtiger gefunden werde.

Die Zahl $m \,.\, n \,.\, s$ alſo läßt ſich vermittelſt des Verſuchs finden, und ich will ſie $=$ A ſetzen. Das giebt $mn\,(1 - r) = \mathrm{A}$, alſo $mn - mnr = \mathrm{A}$, und man findet $r = \frac{mn - \mathrm{A}}{mn}$, oder $r = \frac{(1-q)(1-p) - \mathrm{A}}{(1-q)(1-p)}$.

364. §.

Herr Bouguer fand bey einem Verſuch dieſer Art $A = \sqrt[3]{\frac{243049}{360000}} = \sqrt[3]{0{,}675136111} = 0{,}877$, und die Gläſer waren ein wenig ſchief gegen die kleinen Tafeln geſtellt, ſo daß das Licht unter einem Winkel von 75° auffiel. Vermöge ſeiner übrigen Verſuche (M. ſ. den 349. §.) iſt $q = \frac{1}{36} = 0{,}02777$, $p = \frac{1}{27} = 0{,}03704$, alſo $1 - q = 0{,}97223 \ldots$ $1 - p = 0{,}96296 \ldots$, und $(1 - p)(1 - q) = 0{,}936$. Das giebt $r = \frac{0{,}936 - 0{,}877}{0{,}936} = \frac{0{,}059}{0{,}936}$ ohngefehr $= \frac{1}{16}$. Daß Hr. Bouguer dieſen Lichtverluſt vornemlich der innern Fläche des Glaſes zuſchreibe, ſagt er auf der 159 Seite: übrigens läßt er unentſchieden, wieweit die äuſſere Fläche des Glaſes auch Antheil daran habe, daß weniger Licht durchgehet, als die Zahl $(1 - q)(1 - p)\lambda$ ausdrücken würde. Eine ſchärfere Unterſuchung, die darauf abzielte, μ und ν (M. ſ. den 361 §.) für ſich zu finden, würde verwickelter werden, und iſt auch ſo ſehr nothwendig nicht. In den meiſten Fällen kommt es nur darauf an, daß man die ſenkrecht, oder beynahe ſenkrecht durchfallende Lichmenge mit der auffallenden vergleichen kann, und ſo genügt es, wenn man ſich mit Hn. Bouguer die Sache wie folget vorſtellt.

Wegen der Zurückwerfung von der Vorderfläche allein, würde der Theil q von der auffallenden Lichtmenge abgehen, der Theil $1 - q$ durchgehen. Hievon nimmt die Zurückwerfung an der hintern

hintern Fläche abermahl den Theil p weg, mithin würde der Theil $(1-q)(1-p)$ durchgehen. Wegen der Zerſtreuung an beyden Flächen gehet hievon noch ein Theil ab, der ſich zum ganzen, wie $r : 1$ verhält, und der Theil $(1-q)(1-p)(1-r)$ würde durchgehen. Dieſer vermindert ſich endlich noch, wegen der übrigen Undurchſichtigkeit des Glaſes in ſeinem innern Raum, in dem Verhältniß $1 : \lambda$; mithin geht der Theil $(1-q)(1-p)(1-r)\lambda = m\,.\,n\,.\,s\,.\,\lambda$ durch, und es hat weiter keine Schwierigkeit, λ durch Verſuche zu finden, wenn die Zahlen m, n, s, ſchon bekannt ſind.

365. §.

Es ſollen B und C abermahl ein paar kleine 118.
gleich große und gleich weiſſe Tafeln vorſtellen, die Fig.
das Auge in O beyde neben einander ſehen kann. Zwiſchen dem Auge O und der einen Tafel B befinde ſich ein gläſernes Parallelepipedum A, oder ſonſt eine durchſichtige von zwoen parallelen Seitenflächen eingeſchloſſene Maſſe, durch welche das Licht von B nach O, wenigſtens beynahe ſenkrecht durchgehet. Ueber A ſtehe ein Licht L, daß beyde Tafeln B und C erleuchtet. In dem Fall wenn beyde gleich ſtark erleuchtet ſind, wird C heller als B zu ſeyn ſcheinen, weil das von B kommende Licht wegen der Undurchſichtigkeit der Maſſe A geſchwächt wird. Man entferne die Tafel C vom Licht L ſoweit, bis B und C gleich helle zu ſeyn ſcheinen. Alsdenn ſey die Klarheit von $B = \Sigma$ von $C = \sigma$, die Erleuchtung in $B = I$, in $C = i$; ſo iſt die ſcheinbare Klarheit von B dem Ausdruck $n\lambda ms\,.\,\Sigma$ proportional, und die ſcheinbare Klar-

heit von C verhält ſich wie σ. Vermöge des Verſuchs iſt $n\lambda m s \cdot \Sigma = \sigma$, alſo $\lambda = \frac{1}{nms} \cdot \frac{\sigma}{\Sigma}$ mithin auch $\lambda = \frac{1}{n \cdot m \cdot s} \cdot \frac{i}{I} = \frac{1}{n \cdot m \cdot s} \cdot \frac{LB^2}{LC^2}$. Wenn alſo $n, m, s,$ nach den bisher beſchriebenen Methoden gefunden ſind, ſo hat man λ für die bekannte dicke der Maſſe A, und kann daraus λ für jede andre dicke eben derſelben Maſſe finden (330. §.) Setzt man die Dicke der Maſſe A = C, und nimmt für λ den mittelſt des Verſuchs gefundenen der Dicke c zugehörigen Werth; ſo hat man für die Lichtzerſtreuungslinie der Maſſe A die Subtangente $f = \frac{c}{l\,(1 : \lambda)}$. Wegen der Zahl nms iſt ein für allemahl zu merken, daß nach Hn. Bouguer $n = 1 - q = \frac{35}{36}$, $m = 1 - p = \frac{26}{27}$, $s = 1 - r = \frac{15}{16}$ für diejenige Glasart angenommen werden könne, die zu Spiegeln und Glaslinſen in Fernröhren gebraucht wird: mithin wäre für dieſe Glasart $nms = \frac{2275}{2592}$ ohngefhr $= \frac{9}{10}$.

366. §.

119. Fig. Man kann eben das auch ſo finden. In L ſtehe das Licht, und erleuchte beyde Tafeln B, C: das von L nach B gehende Licht aber laſſe man durch die durchſichtige Maſſe A durchſcheinen, und nehme nun in O eine ſolche Stelle des Auges an,

woraus

woraus man beyde Tafeln B und C neben einander ſehen kann. Die vom Licht grade zu erleuchtete Tafel C entferne man davon ſoweit, bis beyde B und C gleich helle erſcheinen, mithin würklich gleich ſtark erleuchtet ſind. Alsdenn weis man, daß die Strahlen durch A und B ſo fallen, als kämen ſie von einem Punct Λ her, der um den Abſtand $L\Lambda = \frac{1}{3}C$ näher bey A liegt, als L, wenn die durchſichtige Maſſe A Glas, und ihre Dicke $= c$ iſt. (194 §.) Aus der allgemeinen Formul für x im 164 §. überſiehet man leicht, daß überhaupt in dem Fall, wenn r und ϱ unendlich groß genommen werden $a\Lambda$, welches hier x iſt, $= -\delta - \frac{n}{m}c$ werde, da dann $AL = \delta$ iſt. Das zeichen $(-)$ zeigt nur die Lage von $a\Lambda$ an, alſo iſt $a\Lambda = AL + \frac{n}{m}c$, mithin $A\Lambda = AL + \left(\frac{n}{m} - 1\right) c = AL - \frac{m-n}{m}c = AL - L\Lambda$, mithin überhaupt $L\Lambda = \frac{m-n}{m}c$, welches um deswillen zu bemerken iſt, wenn man das Licht auch durch ſonſt eine andre durchſichtige Maſſe ſcheinen laſſen, und deren Durchſichtigkeit prüfen wollte. Bräche nun die Maſſe A nur die Strahlen, ohne auf irgend eine Art das Licht zu ſchwächen, ſo wäre die Erleuchtung in $B = \frac{S}{\Lambda B^2}$, den Glanz des Lichts $= S$ geſetzt: nun aber iſt ſie wegen der Undurchſichtig-

keit $= \frac{n\lambda ms \,.\, S}{AB^2}$, ſo wie die Erleuchtung in C $=$ $\frac{S}{LC^2}$. Weil nun beyde Vermöge des Verſuchs gleich groß ſind, ſo findet man $\lambda = \frac{1}{nms} \cdot \frac{AB^2}{LC^2}$, und dieſer Werth λ gehört mit der Dicke c der Maſſe A zuſammen. M. ſ. übrigens H. Bouguer a. a. O. Liv. I. Art. III. IV. pag. 21. 23.

367. §.

Man ſiehet wohl, daß ſich leicht noch mehr Arten erdenken laſſen, das geſuchte durch Verſuche zu finden. Läßt man in ein finſteres Zimmer das Licht des freyen Himmels durch zwo Oefnungen auf die Art fallen, wie es im 345 §. umſtändlicher iſt beſchrieben worden; ſo kann man das durch die eine Oefnung einfallende Licht durch einen durchſichtigen Körper durchſcheinen laſſen, alsdenn aber dies durchſcheinende Licht ſowohl, als auch das durch die andre Oefnung einfallende mit einem paar gleich großer, gleich weiſſer und von den Oefnungen gleich weit entfernter weiſſer Flächen auffangen. Die letzte Oefnung vermindert man hiernächſt ſo lange, bis beyde Flächen gleich helle ſcheinen, ſo giebt ſich das geſuchte aus dem Verhältniß der Oefnungen gegen einander. Der gröſſern Fläche Oefnung, deren Licht zugleich durch den durchſichtigen Körper ſcheint, ſey $= h^2$, der kleinern Oefnung Fläche $= k^2$; ſo würden ſich die Erleuchtungen, welche die gleich groſſen weiſſen Flächen auffangen, wie dieſe Oefnungen verhalten. Allein, weil das

Licht

Licht von der gröſſern Oefnung durch den durchſichtigen Körper durchſcheint, ſo giebt das eine Erleuchtung $= n\lambda ms \,.\, h^2$, und vermöge des Verſuchs iſt dieſe $= k^2$ mithin $\lambda = \frac{1}{n\,.\,m\,.\,s} \,.\, \frac{k^2}{h^2}$.

Wenn das Licht einer Fackel oder Kerze L ein paar weiſſe Tafeln B, C, erleuchtet; ſo kann man das Licht, was dieſe Kerze nach C wirft, durch ein Sammlungsglas D fallen laſſen, und die Entfernung DC ſo groß nehmen, daß die Erleuchtung in C ſo groß, als in B wird. Eben dieſe Erleuchtung iſt alsdenn $= \frac{M}{\pi \varrho^2}$, wenn M die auf D fallende Lichtmenge, und ϱ den Halbmeſſer des Zerſtreuungskreiſes in C bezeichnet. Läßt man hiernächſt das von L nach B ſcheinende Licht durch den durchſichtigen Körper A fallen, ſo wird die Erleuchtung in $B = n\lambda ms \,.\, \frac{M}{\pi \varrho^2}$. Man entferne alsdenn das Sammlungsglas D von C ſoweit, bis die Erleuchtung in C wieder eben ſo groß wird, als ſie nun in B iſt: der Zerſtreuungshalbmeſſer ſey nun $= R$, die auf D fallende Lichtmenge $= M'$, ſo iſt die Erleuchtung in $C = \frac{M'}{\pi R^2}$, und vermöge des Verſuchs $n\lambda ms \,.\, \frac{M}{\pi \varrho^2} = \frac{M'}{\pi R^2}$, woraus man $\lambda = \frac{1}{nms} \,.\, \frac{M'}{M} \,.\, \frac{\varrho^2}{R^2}$ erhält. Iſt die Entfernung CL ziemlich groß in Vergleichung mit den Entfernungen DC, ſo wird M′ ziemlich nahe 120. Fig.

= M bleiben, und wenn man DE als den Abſtand des deutlichen Bildes vom Glaſe = g ſetzt, ſo ändert ſich auch g nicht ſehr bey Aenderung der Entfernung DC. Die gröſſere Entfernung DC ſey = A, die kleinere = a, ſo iſt $\varrho = \frac{a-g}{g} b$, $R = \frac{A-g}{g} b$, die halbe Breite des Glaſes D = b geſetzt: alſo hat man $\frac{\varrho^2}{R^2} = \frac{(a-g)^2}{(A-g)^2}$, und $\lambda = \frac{1}{nms} \cdot \frac{(a-g)^2}{(A-g)^2}$.

368. §.

Von dieſen beſchriebenen Hülfsmitteln die Zahl λ zu finden, hat Hr. Bouguer bald das eine, bald das andre gebraucht, wenn er über die Durchſichtigkeit des Glaſes und des Waſſers Verſuche anſtellte. Ob er dabey allemahl auf diejenige Verminderung des Lichts Rückſicht genommen habe, welche von der Zurückwerfung des Lichts an der äuſſern und innern Fläche der durchſichtigen Maſſe, und der daſelbſt ſich äuſſernden Zerſtreuung des Lichts herrührt, ſagt er nicht immer ausdrücklich: indeſſen verlangt er a. a. O. Liv. III. Sect. I. Art. VI. daß man darauf Rückſicht nehmen müſſe. Ich werde die Reſultate einiger ſeiner Verſuche, ſo wie er ſie angiebt, anzeigen. Sechs auf einander gelegte Stücken Spiegelglas, zuſammen $11\frac{1}{2}$ Linien dick haben das Licht in dem Verhältniß 10 : 3 vermindert. So hat es H. Bouguer nicht allein ver-

vermittelſt des im 365 §. beſchriebenen Verfahrens befunden, ſondern auch im finſtern Zimmer, woſelbſt das Verhältniß der Oefnungen für das einfallende Licht 331 : 100 geweſen. Dies zuletzt erwehnte Verhältniß iſt ſehr nahe 10 : 3, alſo ſcheint es, daß man wegen der Zurückwerfung an beyden Flächen des Glaſes und der daſelbſt vorfallenden Zerſtreuung die Zahl $\frac{3}{10}$ noch mit $\frac{1}{nms} = \frac{10}{9}$ multipliciren müſſe, welches $\lambda = \frac{1}{3}$ gäbe. Ein andermahl hat Herr Bouguer das Verhältniß 100 : 27 gefunden, und er hält dieſe Beſtimmung für richtiger als jene. Dabey aber bliebe noch der Zweifel: ob ein einziges ſolides Stück Glas, das eben die Dicke hätte, als jene zuſammen genommen, aber nicht aus mehrern auf einander gelegten Scheiben beſtünde, das Licht in eben dem Verhältniß vermindern würde, wenn es übrigens mit jenen dünnern Glasſcheiben einerley Durchſichtigkeit hätte? Nach einer andern Erfahrung die Hr. Bouguer a. a. O. Liv. I. Sect. II. Art. V. p. 60 anführt, hat derſelbe ein 3 Zoll dickes Stück Glas geſehen, welches das Licht kaum bis zur Hälfte verminderte.

369. §.

Um die Durchſichtigkeit des Seewaſſers zu prüfen, dediente ſich Hr. Bouguer eines 9 Fuß 7 Zoll oder 115 Zoll langen Canals, deſſen äuſſerſte Enden mit einer Glasſcheibe verſchloſſen waren. Dadurch ließ er das Licht einer ziemlich weit entfernten Fackel zur Nachtszeit fallen, und fieng es mit einer

ner weiſſen Fläche auf. Eine andere weiſſe Fläche war eben ſo ſtark erleuchtet, wenn er eine Wachskerze 9 Fuß weit davon enfernte. Nun füllte er den Canal mit Waſſer, wodurch die Erleuchtung der erſten Fläche geſchwächt ward, und die Kerze muſte 16 Fuß weit von der andern Fläche entfernt werden, um ihre Erleuchtung eben ſo zu ſchwächen. Das giebt für das Verhältniß der Verminderung des Lichts $16^2 : 9^2$ beynahe 3 : 1. Ein Mittel aus mehrern Verſuchen gab 14 : 5 = 2,8 : 1, und dies Verhältniß kommt dem Verhältniß $e : 1 = 2{,}71828 \ldots : 1$ ziemlich nahe, daß alſo die Subtangente der Lichtverminderungslinie für das Meerwaſſer ohngefehr 115 Pariſer Zoll betragen würde. Indeſſen hält Hr. Bouguer dieſe Verſuche nicht für zuverläßig genug, und ſchreibt dem Seewaſſer aus andern Gründen eine gröſſere Durchſichtigkeit zu, vermöge der es in der Tiefe von 10 Fuß das Licht nur in dem Verhältniß 5 : 3, vielleicht nur $5 : 3\frac{1}{2}$ vermindere. Noch an einer andern Stelle giebt er es wie 3 : 2 an, und berechnet daraus die Subtangente für die Lichtzerſtreuungslinie des Meerwaſſers. (a. a. O. Liv. III. Sect. II. Probl. IV. pag. 260.) Die Formul dafür war $f = \frac{0{,}4342944 \cdot c}{\text{log. tab.}\,(a : b)}$ (333 §.), und man findet für Meerwaſſer $a : b = 3 : 2$ angenommen $f = \frac{4342944 \cdot 10}{1760913} = 24\frac{2}{3}$ Fuß. Das heiſt, wenn das Licht um dieſe Tiefe ins Meerwaſſer dringt, ſo hat es in dem Verhältniß $2{,}71828 \ldots : 1$ beynahe 8 : 3 abgenommen.

Wenn

Wenn demnach ein 3 Zoll dickes Stück Glas das Licht bis zur Hälfte vermindert, ſo findet man für dieſe Glasart $f = \frac{4342944 \cdot 3}{3010300} = 4{,}318$ Zoll, ohngefehr $4\frac{1}{3}$ Zoll. Hieraus folgt, daß das Meerwaſſer 68 mahl durchſichtiger, als die damit verglichene Glasart ſey.

Das Licht des Vollmonds iſt ohngefehr 300000 mahl ſchwächer, als das Sonnenlicht. Man kann alſo vermittelſt der Gleichung $x = \frac{c\ l\ (a : y)}{l\ (a : b)}$ (330 §.) finden, in welcher Tiefe des Meeres der Glanz der Sonne der Klarheit des Vollmonds gleich ſcheinen wird. Die Rechnung giebt $x = \frac{10 \cdot 5{,}4771213}{0{,}1760913} = 311$ Fuß.

370. §.

Alle durchſichtige Maſſen kommen darin mit denjenigen, die wir undurchſichtig nennen überein, daß ſie bey einer gewiſſen Dicke, ſollte dieſe auch ſehr groß ſeyn, für unſere Empfindung undurchſichtig werden. Nach dem angenommenen Geſetz des 327 §., vermöge deſſen das Licht in geometriſcher Progreßion abnimmt, wenn die Tiefe, um welche es eindringt, in arithmetiſcher Progreßion wächſt, kann das Licht eigentlich nie ganz verſchwinden, und es muß bey jeder Dicke des durchſichtigen Körpers noch etwas durchfallen, es ſey ſo wenig es wolle. Dieſe noch durchfallende Lichtmenge kann ſo geringe ſeyn, daß ſie für unſere Empfindung nicht mehr merklich iſt, und alsdenn

denn iſt der Körper wenigſtens für unſere Empfin- dung undurchſichtig. Das Sonnenlicht iſt das ſtärkſte was wir kennen. Wüſte man alſo, wie dick eine Maſſe von bekannter Durchſichtigkeit ſeyn muß, wenn das noch durchfallende Sonnenlicht nicht mehr empfunden werden kann; ſo lieſſe ſich daraus finden, in welchem Verhältniß das Son- nenlicht abnehmen muß, wenn es unſer Auge nicht mehr empfindlich rühren ſoll, und dies Verhältniß würde alsdenn dienen zu finden, bey welcher Dicke jede andere Maſſe, deren Durchſichtigkeit bekannt iſt, durchſichtig zu ſeyn aufhört. Denn iſt ein Körper für das Sonnenlicht undurchſichtig, ſo iſt er es auch für jedes ſchwächere Licht.

Herr Bouguer legte 16 Scheiben aus gemei- nem Glaſe auf einander, und fand, daß ſie das auffallende Licht 247 mahl ſchwächer machten. Durch 76 bis 77 Scheiben von eben der Glasart konnte er nicht die geringſte Spur vom Sonnen- licht mehr ſehen, zu einer Zeit, da die Sonne 50 Grad hoch ſtand. Er nimmt alſo an, daß ſicher durch 80 ſolche Scheiben kein Sonnenlicht fällt, daß noch empfunden werden könnte, und ſucht nun vermittelſt der Gleichung $l\,\frac{a}{y} = \frac{x}{c}\ l\,\frac{a}{b}$ in welchem Verhältniß das Sonnenlicht durch 80 ſol- che Scheiben vermindert werde. Wenn nemlich $x = 80,\ c = 16,\ \frac{a}{b} = 247$ geſetzt wird, ſo giebt jene Gleichung $l\,\frac{a}{y} = 5\ l\,247 =$

$11{,}9634850,$

11,9634850, alſo $\frac{a}{y} = 919358600000$. Das ſoviel mahl verminderte Sonnenlicht würde alſo nicht mehr empfunden werden, und eine Maſſe, die das Licht ſo viel mahl ſchwächte, würde für unſere Empfindung undurchſichtig ſeyn, wenn es mit allen Vorausſetzungen bey dieſer Rechnung ſeine Richtigkeit hätte.

Wenn nun das 10 Fuß tief ins Meerwaſſer eindringende Licht in dem Verhältniß 3 : 2 geſchwächt wird, ſo giebt die Gleichung $l\frac{a}{y} = \frac{x}{10}\, l\frac{3}{2}$ die Tiefe x, worin das Meerwaſſer ſeine Durchſichtigkeit verliert, oder wohin kein für uns empfindliches Sonnenlicht mehr dringen kann, wenn man ſtatt $\frac{a}{y}$ die eben gefundene Zahl, oder $l\frac{a}{y} = 11{,}9634850$ ſetzt: ſolchergeſtalt wird $x = \frac{11{,}9634850 \cdot 10}{0{,}1760913} = 679$ Fuß gefunden.

371. §.

Was bey dieſen aus Hn. Bouguers Traité d'optique mitgetheilten Rechnungen zum Grunde geſetzt wird, daß ſich das Licht, wenn es durch mehrere auf einander gelegte Glasſcheiben dringt, nach eben dem Geſetz vermindere, als wenn es ein einziges eben ſo dickes Stück Glas von eben der Art wäre; iſt nicht genau richtig. Wären die auf einander liegenden Glasſcheiben für ſich vollkommen

men durchſichtig, ſo nemlich, wie hier das Wort verſtanden wird (196 §.), ſo weis man aus dem 355. §. wenn die auffallende Lichtmenge = 1 geſetzt wird, daß die durch x Glastafeln durchſcheinende Lichtmenge $S = \frac{N}{x-(x-1)N}$ ſey, vorausgeſetzt, daß eine allein die Lichtmenge M zurück ſchicke, und die Lichtmenge N durchlaſſe. Demnach iſt auch $S = \frac{N}{N+(1-N)x} = \frac{\nu}{\nu+x}$, wenn $\frac{N}{1-N} = \nu$ geſetzt wird. Betrachtet man nun ν als eine beſtändige Linie, x als die Abſciſſe, und S als die zugehörige Ordinate einer krummen Linie, ſo iſt $S = \frac{\nu}{\nu+x}$ die Gleichung für eine Hyperbel zwiſchen ihren Aſymtoten. (310 §. Perſp.) Der Anfangspunct der Abſciſſen iſt in der Entfernung ν vom Mittelpunct genommen, die Ordinate durch dieſen Anfangspunct iſt = 1, und die Potenz der Hyperbel = 1 . ν. Je durchſichtiger alſo die Glasſcheiben ſind, deſto mehr nähert ſich das Geſetz der Abnahme des hindurch ſcheinenden Lichts demjenigen, nach welchem die Ordinaten der Hyperbel zwiſchen ihren Aſymtoten abnehmen, wenn die Abſciſſe um gleiche Differenzen wächſt. Daraus läßt ſich abnehmen, daß das Licht beym Durchgang durch unvollkommen durchſichtige auf einander gelegte Glasſcheiben, wenn man die mannigfaltigen Zurückwerfungen an den Gränzen jeder einzelnen Glasſcheibe mit in Rechnung bringt, nicht mehr

nach eben dem Geſetz, wie die Ordinaten einer logarithmiſchen Linie abnehmen werde.

372. §.

Die Formuln $R = \varrho + \frac{Mr^2}{1 - M\varrho}$, und $S = \frac{Nr}{1 - M\varrho}$ (355 §.) ſind allgemein, ſie finden bey unvollkommen durchſichtigen Glastafeln ebenfalls ihre Anwendung. Wäre in der 112 Fig. auſſer ζ die Glastafel α allein vorhanden, ſo hätte man $M = \varrho$, $N = r$, alſo 112. Fig.

für 2 Glastafeln

$$R = M + \frac{M \,.\, N^2}{1 - M^2}, \text{ und } S = \frac{N^2}{1 - M^2}.$$

Kommt auſſer α und ζ die dritte Glastafel hinzu, ſo iſt für die beyden Tafeln, α und β zuſammen, vermöge des gefundenen

$$\varrho = M + \frac{M \,.\, N^2}{1 - M^2}, \text{ und } r = \frac{N^2}{1 - M^2}.$$

Die erſte Zahl ſetze man $= M'$, die zweyte $= N'$, und brauche allemahl eine ähnliche Bezeichnung, wenn die Zahl der Glastafeln um 1 größer iſt, alſo für 3 Glastafeln $R = M''$ $S = N''$, für 4 Glastafeln $R = M'''$, $S = N'''$ u. ſ. f., ſo iſt

für 3 Glastafeln

$$R = M' + \frac{M \,.\, N'^2}{1 - M \,.\, M'}, \; S = \frac{N \,.\, N'}{1 - M . M'},$$

für 4 Glastafeln

$$M''' = M'' + \frac{M \;.\; N''^2}{1 - M.M''}, \quad N''' = \frac{N \;.\; N''}{1 - M.M''};$$

für 5 Glastafeln

$$M'''' = M''' + \frac{M \;.\; N'''^2}{1 - M.M'''}, \quad N'''' = \frac{N \;.\; N'''}{1 - M.M'''};$$

u. ſ. ferner.

Aus dieſen Formuln läßt ſich nicht wohl ein allgemeiner Ausdruck herleiten, der das zurückſtrahlende und durſcheinende Licht unbeſtimmt durch die Zahl der Gläſer ausdrückte: deswegen bedient ſich Hr. Lambert (Photom. 450 - 455 §.) noch anderer analytiſcher Kunſtgriffe, die auf folgenden Gründen beruhen.

373. §.

Wenn in der 112 Fig. ſtatt der einen Glastafel ζ ebenfalls mehrere in unbeſtimmter Anzahl hinter einander befindlich ſind; und man nimmt an, von dieſen hintern Tafeln ſtrahle der Theil m zurück, der Theil n ſcheine durch, die auffallende Lichtmenge $= 1$ geſetzt; ſo darf man nur im 355 §. m und n ſtatt M und N ſchreiben, und man erhält die von der erſten Tafel α zurückſtrahlende Lichtmenge $R = \varrho + \frac{m r^2}{1 - m\varrho}$, die durch alle zuſammen durchſcheinende Lichmenge $S = \frac{n r}{1 - m\varrho}$. Wenn alsdenn oben eben ſoviel Glastafeln als unten in unbeſtimmter Anzahl $= x$ befindlich ſind, ſo iſt $m = \varrho$, $n = r$, alſo iſt

für

für $2x$ Glastafeln

$R = \varrho + \frac{n^2 \varrho}{1-\varrho^2}$ und $S = \frac{n^2}{1-\varrho^2}$; alſo auch

$R = (1+S)\,\varrho$, oder $\varrho = \frac{R}{1+S}$, und $n^2 = (1-\varrho^2)\,S$.

Nun ſoll man ϱ und n durch x ausdrücken: demnach ſetze man

$$\varrho = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots.$$
$$n = a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots.$$

ſo muß $\varrho = R$ und $n = S$ werden, wenn $2x$ ſtatt x geſetzt wird, und das giebt

$$R = A + 2Bx + 4Cx^2 + 8D\,.\,x^3 \ldots.$$
$$S = a + 2bx + 4cx^2 + 8d\,.\,x^3 \ldots.$$

Dieſe Reihen muß man in den Formuln

$\varrho = \frac{R}{1+S}$, und $n = (1-\varrho^2)^{\frac{1}{2}}\, S^{\frac{1}{2}}$ ſubſtituiren, ſo erhält man zwey andere Reihen für ϱ und n, die man den vorigen gleich ſetzen, und ſolchergeſtalt die Coefficienten, $A, B, C, \ldots a, b, c, \ldots$ beſtimmen kann.

Wenn gar keine Glastafeln vorhanden ſind, ſo kann kein Licht zurückſtrahlen, und alles auffallende Licht muß durchſcheinen. Demnach muß $\varrho = 0$ $n = 1$ ſeyn, wenn $x = 0$ iſt. Das giebt $A = 0$, und $a = 1$. Die übrigen Coefficienten zu finden, hat keine andere Schwierigkeit, als daß eine etwas weitläuftige Rechnung nöthig iſt, wobey hier noch erfordert wird, daß man die Reihe $\varrho = x\,(B + Cx + \ldots)$ aufs Quadrat, die Reihe $1 + S = 2\,(1 + bx + 2cx^2 \ldots.)$ auf eine Potenz vom Exponenten -1, und das Product $(1-\varrho^2)\,S$ auf

eine Potenz erheben muß, wozu der Exponent $\frac{1}{2}$ gehört. Wie man dergleichen Rechnungen führen muß, davon giebt die mathematiſche Analyſis Unterricht, und Hr. Lambert a. a. O. hat die Reſultate davon mitgetheilt. Wofern übrigens die Zahlen *q*, *p*, *m*, *n*, (335 §.) von der Undurchſichtigkeit der Glastafeln nicht abhängen, vielmehr ohne merkliche Aenderung dieſelben bleiben, wenn gleich mehr oder weniger durchſichtige Glastafeln gebraucht werden; ſo kann auch auf folgende Art das Maaß der Durchſichtigkeit für Glastafeln gefunden werden.

374. §.

Ueber einer weiſſen Ebene AC ſtehe eine Glas-
121. Fig. tafel AB lothrecht, und eine andere CD von eben der Glasart und eben der Dicke ihr ſo gegen über, daß beyder Grundlinien parallel ſind. Das Licht falle in der Richtung LD ‡ MC auf dieſe Tafeln, und werde von der hintern CD nach DE zurückgeworfen; ſo wird der Raum CE beydes von dem durch AB durchſcheinenden und dem von CD zurückgeworfenen Licht erleuchtet. Stehet nun CD lothrecht, ſo ſtrahlt das Licht unter eben dem Winkel zurück, unter welchem es auf beyde Tafeln fällt, CE empfängt von dem durch AB durchſcheinenden Licht den Theil N, von dem, welches auf CD fällt, den zurückſtrahlenden Theil M; alſo zuſammen die Lichtmenge M + N. Weil ferner beyde Theile auf CE unter eben dem Winkel fallen, unter welchem das grade zu ſeitwärts der Tafeln die Ebene CE beſcheinende Licht auffällt; ſo müſte der Raum CE eben ſo ſtark erleuchtet ſeyn, als der ſeitwärts der Tafeln befindliche Raum, wohin das Licht ohne

Brechung

Brechung oder Zurückwerfung ſcheint, wenn $M+N = 1$ wäre: das heiſt, wenn die Tafeln vollkommen durchſichtig wären. Nun aber, da wegen der Undurchſichtigkeit der Tafeln $M + N < 1$ iſt, wird CE nicht ſo ſtark als der grade zu beſchienene Theil dieſer Ebene erleuchtet ſeyn.

Um alſo CE ſtärker zu erleuchten, neige man die Tafel CD gegen AB, ſo nimmt der Einfalls- winkel DCB ab, alſo wächſt die zurückſtrahlende Lichtmenge M, auch wächſt der Einfallswinkel CED, mithin nimmt die auf CE fallende Erleuch- tung zu, und man kann es dahin bringen, daß die auf CE fallende Erleuchtung eben ſo groß wird, als diejenige, welche dieſelbe weiſſe Ebene ſeit- wärts der Tafeln von dem grade zu dahin ſcheinen- den Licht empfängt. Nun meſſe man die Einfalls- winkel ABC, DCB des Lichts auf die Glastafeln, ſo kann man q, p, u, m, finden (359 §.), da dann in den Formuln $M = q + \frac{mp\lambda^2 n}{1-p^2\lambda^2}$ $N = \frac{m\lambda n}{1-p^2\lambda^2}$ (335 §.) nur noch λ unbekannt iſt. Ferner meſſe man die Einfallswinkel AEF, CED, ſo kann man die auf CE fallende Erleuchtung fin- den. Wird nemlich die Dichtigkeit des auffallen- den Lichts, wenn es ſenkrecht aufgefangen würde, $= 1$ geſetzt, ſo iſt die auf CE mittelſt des durch- ſcheinenden und zurück ſtrahlende Lichts fallende Er- leuchtung $= M \sin CED + N \sin AEF$, und die grade zu auf eben die weiſſe Fläche ſeitwärts fallen- de Erleuchtung $= \sin AEF$. Wäre nun der Ein- fallswinkel für beyde Glastafeln einerley, ſo wäre

in den Formuln für M und N auch λ einerley, weil vorausgeſetzt wird, daß beyde Tafeln von gleicher Dicke und gleich durchſichtiger Glasart ſind: weil aber die Einfallswinkel verſchieden ſind, ſo ſind die Wege nicht gleich groß, die das Licht in jeder der beyden Glastafeln durchdringt, mithin iſt λ nicht für beyde einerley, ſo wie auch die übrigen Zahlen q, n, p, m nicht in beyden Formuln einerley ſind.

Es ſey alſo x der Weg, den das Licht einer dieſer Glastafeln durchdringt, und f die Subtangente der ihr zugehörigen Lichtzerſtreuungslinie; ſo iſt $l\frac{1}{\lambda} \quad \frac{x}{f}$, alſo $\lambda = e^{-x:f}$. Wenn ferner in der 73 Fig. der Einfallswinkel PBA $= \eta$, und die Dicke des Glaſes $= c$ geſetzt wird, ſo iſt $\sin MBC = \frac{2}{3}\cos\eta$, $\cos MBC = \sqrt{(1 - \frac{4}{9}\cos\eta^2)}$, alſo $BC = c \sec MBC = \frac{c}{\cos MBC} =$

$\frac{c}{\sqrt{(1 - \frac{4}{9}\cos\eta^2)}}$. Dieſemnach hat man in der Formul $M = q + \frac{mp\lambda^2 n}{1 - p^2\lambda^2}$ die Zahl $\lambda = e^{-x:f}$, wenn man $x = \frac{c}{\sqrt{(1 - \frac{4}{9}\cos DCB^2)}}$ ſetzt: in der Formul $N = \frac{m\lambda n}{1 - p\lambda^2}$ aber muß man $x =$

$\frac{c}{\sqrt{(1 - \frac{4}{9}\cos ABC^2)}}$ ſetzen, um $\lambda = e^{-x:f}$ gehörig auszudrücken. Solchergeſtalt erhält man endlich

ſich eine Gleichung, die auſſer $\frac{c}{f}$ lauter bekannte Zahlen enthält, und daraus muß $\frac{c}{f}$ gefunden werden. Nimmt man $\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{4}{9}\cos DCB^2)}} = \mu$, $\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{4}{9}\cos ABC^2)}} = \nu$ an, und ſchreibt man p', m', n', ſtatt p, m, n, in der Formul für N, ſo iſt die geſuchte Gleichung folgende:

$$q \sin CED + \frac{mpne^{-2\mu c:f}\sin CED}{1-p^2e^{-2\mu c:f}}$$

$$+ \frac{m'n'e^{-\nu c:f}\sin AEF}{1-p'^2e^{-2\nu c:f}} = \sin AEF,$$ die man auch ſo ausdrücken kann: $q \sin CED +$

$$\frac{mpn \sin CED}{e^{2\mu c:f}-p^2} + \frac{m'n'e^{\nu c:f}\sin AEF}{e^{2\nu c:f}-p'^2} =$$

$\sin AEF$.

Kann man aus dieſer Gleichung $\frac{c}{f}$ finden, ſo iſt zugleich die Subtangente f als das Maaß der Durchſichtigkeit der gebrauchten Glasart gefunden, weil die Dicke c der Glastafeln bekannt iſt.

375. §.

Es werden wiederum beſondere analytiſche Kunſtgriffe erfordert, wenn aus der letzten Glei-

chung die Zahl $c:f$ gefunden werden ſoll, und ich muß mich hier nach meiner oben (353 §.) angezeigten Abſicht damit begnügen, das Reſultat eines vom Hn. Lambert angeſtellten Verſuchs, und der von ihm darauf grgründeten Rechnung herzuſetzen.

Er fand ACB $= 49° =$ AEF
  alſo ABC $= 41°$
     DCE $= 74\frac{1}{2}°$
  alſo DCB $= 25\frac{1}{2}° =$ DCE − ACB = CDE
  und CED $= 80° = 180°$ − DCE − CDE

Aus dieſen Winkeln erhält man

$\mu = 1{,}252$	$\nu = 1{,}157$
$q = 0{,}1027$	$q' = 0{,}0456$
$p = 0{,}2164$	$p' = 0{,}0997$
$n = 0{,}8973$	$n' = 0{,}9544$
$m = 0{,}7836$	$m' = 0{,}9003$
ſin CED $= 0{,}9848$	ſin AEF $= 0{,}7547$

und nach Hn. Lamberts Rechnung wird $c:f = \frac{2}{13}$ gefunden. Die Dicke der Glastafeln c war $\frac{5}{6}$ einer Pariſer Linie, alſo $f = \frac{5}{6} \cdot \frac{13}{2} = 5\frac{5}{12}$ Par. Linien.

Wenn nun das Licht auf eine Glastafel unter einem rechten Winkel fällt, ſo hat man in den Formuln

$$M = q + \frac{mnpe^{-2x:f}}{1 - p^2 e^{-2x:f}}$$

$$= q + \frac{m \cdot n \cdot p}{e^{2x:f} - p^2}$$

N =

$$N = \frac{mne^{-x:f}}{1 - p^2 e^{-2x:f}} = \frac{mne^{x:f}}{e^{2x:f} - p^2}$$

folgende Beſtimmungen:

$x = c$	alſo $M = 0{,}0516$
$q = 0{,}0199$	$N = 0{,}8111$
$p = 0{,}0448$	$M + N = 0{,}8627$
$n = 0{,}9801$	$1 - M - N = 0{,}1373$
$m = 0{,}9552$;	

Braucht man dieſe ſo gefundenen Werthe in den Formuln des 372 §. für M′, M″, M‴ u. ſ. f., ſo findet man für den Einfallswinkel von 90° folgende Zahlen:

Zahl der Glastaf.	zurückſtr. Licht	durchſcheinend Licht.	verlohrnes Licht.
1	0,0516	0,8111	0,1373
2	0,0856	0,6596	0,2548
3	0,1081	0,5368	0,3551
4	0,1228	0,4377	0,4495
8	0,1467	0,1945	0,6588
16	0,1524	0,0387	0,8089
32	0,1526	0,0016	0,8458

Aus eben den Formuln läßt ſich die Rechnung für jeden andern gegebenen Einfallswinkel führen.

Der XXVI. Abſchnitt.

Von der Abnahme des Lichts in ungleichförmig durchſichtigen Maſſen, mit Anwendungen auf die Atmoſphäre.

376. §.

122. Fig. Das Licht fällt in der Richtung AB durch eine durchſichtige Maſſe, deren Dichtigkeit in jeder folgenden Stelle P von ihrer Dichtigkeit in der vorigen Stelle verſchieden iſt, man ſucht das Geſetz, nach welchem das Licht abnimmt.

Aufl. Es ſtelle CEM eine krumme Linie vor, deren Ordinaten AC, DE, PM, nach eben dem Geſetz abnehmen, nach welchem das Licht abnimmt, indem es einen Weg ſo groß, als die zur Ordinate DE, PM, gehörige Abſciſſe AD, AP, zurück legt. Man gehe bis auf den 327 §. zurück, vergleiche die 105 Fig. und erwäge dabey folgendes. Es ward angenommen, das Verhältniß der Lichtverminderung von B bis D ſey nochmahl ſo groß, (ratio duplicata) als von B bis C, wenn BD nochmahl ſo groß als BC iſt. Der Grund war, weil die durchſichtige Maſſe überall von gleicher Dichtigkeit angenommen ward, mithin das Licht von B bis D durch nochmahl ſoviel Maſſe dringen muſte, als wenn es den Weg BC zurück legte. Ueberhaupt

haupt alſo ward vorausgeſetzt, das Verhältniß der Lichtverminderung ſey n mahl gröſſer, wenn das Licht durch n mahl mehr Maſſe dringe. Hievon macht man auf dem gegenwärtigen Fall leicht folgende Anwendung.

Von A nach D, P, B, iſt die Maſſe, durch welche das Licht dringt, nicht gleichförmig vertheilt. In einer unbeſtimmten Stelle P ſey die Dichtigkeit dieſer Maſſe $= \delta$, ſo verhält ſich die Maſſe, welche das Licht durchdringt, indem es den Weg $Pp = dx$ durchläuft, wie δdx, und die Menge der Maſſe, welche das Licht von A bis P durchdringt, verhält ſich wie das Integral $\int \delta dx$. Man ſetze $AC = a$, $DE = b$, $AP = x$, $PM = y$, und das Integral $\int \delta dx$ ſey $= m$; wenn $x = AD$ $= c$ iſt, ſo hat man $l\,\frac{a}{b} : l\,\frac{a}{y} = m : \int \delta dx$, mithin $l\,\frac{a}{y} = \frac{\int \delta\, dx}{m}\; l\,\frac{a}{b}$. Dies wäre alſo eine Gleichung für die Lichtverminderungslinie in einer ungleichförmig dichten durchſichtigen Maſſe.

Man differentiire dieſe Gleichung, ſo hat man

$$-\frac{dy}{y} = \frac{\delta\, d\, x}{m}\; l\,\frac{a}{b},$$

alſo $$\frac{ydx}{dy} = -\frac{m}{\delta\; l\;(a : b)}.$$

Wie nun der allgemeine Ausdruck $\frac{ydx}{dy}$ für jede krumme Linie die Subtangente giebt (329 §.); ſo erhellet, daß die Subtangente dieſer Lichtvermin-

derungslinie nicht mehr unveränderlich, ſondern der Dichtigkeit der durchſichtigen Maſſe an jeder gegebenen Stelle umgekehrt proportional ſey.

377. §.

123. Fig. Es ſey BC ein Stück der Erdfläche, und AL ein Theil der äuſſerſten Gränze der Atmoſphäre, BA eine Verticallinie durch der Erde Mittelpunct K: ſo iſt bekannt, daß die Dichtigkeit der Luft von B nach A zu abnehme. Aus dem 76 und 77 §. der Aeroſtatik kennt man dasjenige Geſetz, welches man für dieſe Aenderung in der Dichtigkeit der Luft gewöhnlich annimmt. In jeder Stelle P verhält ſich die Dichtigkeit der Luft, wie das Gewicht der darauf drückenden Luftſäule. Es ſey alſo dieſe Dichtigkeit in der unterſten Stelle $B = \Delta$, in jeder andern Stelle $P = \delta$. Die Höhe $BP = x$, $AB = h$, ſo verhält ſich das Gewicht des Elements Pp wie δdx, und das Gewicht der Säule BP wie das Integral $\int \delta dx$. Dies Integral ſey $= P$, wenn man x der Höhe der ganzen Atmoſphäre $BA = h$ gleich ſetzt, ſo verhält ſich das Gewicht der auf P drückenden Luftſäule, wie $P - \int \delta dx$, und man hat $\Delta : \delta = P : P - \int \delta dx$, mithin $\delta = \frac{\Delta (P - \int \delta dx)}{P} = \Delta - \frac{\Delta \int \delta dx}{P}$.

Man differentiire dieſe Gleichung, ſo erhält man $d\delta = -\frac{\Delta}{P} \delta\, dx$ und $\frac{d\delta}{\delta} = \frac{\Delta}{P} dx$. Die Integration giebt $l\, \delta = C - \frac{\Delta}{P} x$. Weil nun $\delta = \Delta$ ſeyn muß, wenn $x = 0$ iſt, ſo findet man

man $C = l\Delta$; und $l\delta = l\Delta = \frac{\Delta}{P}x$, alſo $l\Delta - l\delta = \frac{\Delta}{P}x$, oder $l\frac{\Delta}{\delta} = \frac{\Delta}{P}x$. Man nehme $P = \Delta \cdot k$ an, ſo iſt k eine Linie ſo groß als die Höhe der Atmoſphäre ſeyn würde, wenn man ſie ſo weit zuſammendrucken könnte, daß ihre Dichtigkeit überall $= \Delta$ wäre, und man hat $l\frac{\Delta}{\delta} = \frac{x}{k}$.

Weil $BP = x$ die Höhe iſt, in der die Dichtigkeit der Luft in dem Verhältniß $\Delta : \delta$ abgenommen hat, ſo will dieſe Gleichung ſagen, der Logarithme des Verhältniſſes der Dichtigkeit der Luft in der unterſten Station zu ihrer Dichtigkeit in jeder andern Station iſt der Höhe dieſer lezten Station proportional: und weil die Dichtigkeit in jeder Station P ſich wie die Barometerhöhen daſelbſt verhalten, ſo iſt dies die im 77 §. Aeroſtat. ſchon ohne Gebrauch der Differentialrechnung bewieſene Regel, vermittelſt beobachteter Barometerhöhen, die Höhen der Berge zu meſſen.

Verzeichnet man eine krumme Linie ſo, daß für die Abſciſſen BP die dazu gehörigen Ordinaten die Dichtigkeiten δ an den Stellen P vorſtellen, ſo iſt das die Logarithmiſche Linie; und wenn man auch in der Differentialgleichung $P = \Delta \cdot k$ ſetzt, ſo hat man $\frac{d\delta}{\delta} = -\frac{d \cdot x}{k}$, alſo iſt $k = \frac{\delta dx}{d\delta}$ ihre Subtangenten (329 §.)

378. §.

378. §.

Es bezeichne nun Δ die Dichtigkeit der Luft in einer gegebenen Station C, deren Höhe BC über der Erdfläche bekannt iſt, wenn anders C nicht ſelbſt mit der unterſten Station in B einerley iſt: ferner ſey D die Dichtigkeit der Luft in einer höhern Station D, und die Höhe CD dieſer Station über der erſten ſey $= c$, ſo hat man vermöge des 328 §. auch $l\,\frac{\Delta}{D} = \frac{c}{k}$, und man findet die Subtangenten der Logarithmiſchen Linie, welche die Abnahme der Dichtigkeit der Luft vorſtellet, vermittelſt der Formul $\frac{c}{\text{log. nat. } (\Delta : D)}$. (330 §.)
Herr de la Hire fand in der Höhe von 257 Toiſen über der Meeresfläche die Barometerhöhe von 26 Zoll $4\frac{1}{2}$ Linien, und an der Meeresfläche 28 Zoll 2 Linien, mithin $\frac{\Delta}{D} = \frac{338}{316\frac{1}{2}} = \frac{676}{633}$, und $c =$ 257 Toiſen. Die Rechnung giebt

$$\begin{array}{lll} \text{Brigg. Log. } 616 & = & 2{,}8299467 \\ \text{Log. } 633 & = & 2{,}8014037 \\ \hline \text{Brigg. Log. } (\Delta : D) & = & 0{,}0285430 \\ & \times & 2{,}302585 \\ \hline & & 0{,}0570860 \\ & & 85629 \\ & & 571 \\ & & 142 \\ & & 22 \\ & & 1 \\ \hline \text{Nat. Log. } (\Delta : D) & = & 0{,}0657225 \end{array}$$

alſo

alſo die Subtangente $= \frac{257000000}{657225} = 3910{,}4$ Toiſen, oder nach Hn. Bouguer 3911 Toiſen. Aus ſpätern Beobachtungen und Unterſuchungen, die Hr. Bouguer ſelbſt im Jahr 1736 und den folgenden bey ſeinem Aufenthalt in Peru angeſtellet hat, findet er 4197 Toiſen für die Größe dieſer Subtangente.

Eben die Gleichung log. nat. $\frac{\Delta}{D} = \frac{c}{k}$, oder $c = k$ log. nat. $\frac{\Delta}{D}$ giebt die Höhe zwiſchen zweyen Stationen, worin Δ und δ die Dichtigkeiten der Luft ſind: alſo hat man auch $c = k \cdot \frac{1}{m} \cdot$ log. tab. $\frac{\Delta}{D}$, wenn m den Modulum der briggiſchen Logarithmen bezeichnet. Nach Hn. de Luc (78. 79 §. Aeroſt.) nimmt man $k \cdot \frac{1}{m} = 10000$, alſo iſt nach ihm $k = m \cdot 10000$, oder $k = 0{,}4342944 \times 10000$ (163 §. A. R.) $= 4343$ Toiſen, wenn man vorausſetzt, daß die Luft bis auf $16\frac{3}{4}$ Reaumürſche Grade erwärmt ſey. Nimmt man dagegen mit Hn. Bouguer $k = 4197$ Toiſen, ſo iſt $k \cdot \frac{1}{m} = 4197 \times 2{,}302585 = 9664 = 10000 - 336$, und weil 336 beynahe $= \frac{1}{30}\, 1000$, ſo giebt das $k \frac{1}{m} = (1 - \frac{1}{30})\, 1000$; mithin $c = (1 - \frac{1}{30})\, 10000$ log. tab. $\frac{\Delta}{D}$, und das iſt der Grund ſeiner Regel

die

die Höhe der Berge zu meſſen, welche ſchon a. a. O. der Aeroſtatik kurz berührt iſt. Man ſehe auch davon ſein Traité d'optique Liv. III. Sect. IV. pag. 321.

379. §.

Man ſtelle ſich vor, das Licht vom Mittel-
123. Fig. punct der Sonne oder eines andern Himmelskörpers falle in der Richtung SL oder *sl* auf die äuſſere Gränze der Atmoſphäre ALΛ, die hier als eine mit der Erde concentriſche Kugelfläche betrachtet werden kann, und wovon ALΛ einen gröſten Kreisbogen in der Ebene AKL vorſtellet, worin auch die mit einander parallelen Lichtſtrahlen LS, *ls* angenommen werden. Nach dem allgemeinen Geſetz der Strahlenbrechung, muß eine Brechung des Lichts erfolgen, wenn es in die Atmoſphäre eindringt, man mag ſich den übrigen Raum auſſer derſelben entweder ganz leer, oder mit einem zarten Aether angefüllt vorſtellen, deſſen Dichtigkeit geringer, als die Dichtigkeit der Luft an ihrer äuſſerſten Gränze iſt. Der Halbmeſſer K*l* ſey nach F verlängert, ſo iſt F*ls* = K*lt* der Neigungswinkel: weil nun der gebrochene Winkel kleiner als der Neigungswinkel ſeyn muß, ſo lenkt ſich der Strahl gegen *lk*. Stellt man ſich aber die ganze Atmoſphäre durch concentriſche Kugelflächen in Schichten eingetheilt vor, deren Dicke wie P*p* unendlich klein iſt, ſo erhellet, daß die Dichtigkeit jeder folgenden Schichte gegen die Erde zu gröſſer, als die Dichtigkeit der vorhergehenden ſey, und daß mithin das Licht in jeder folgenden Schichte eine neue Brechung gegen das Einfallsloth zu leide.

Weil

Weil aber die Dichtigkeit jeder folgenden Schichte die Dichtigkeit der vorhergehenden nur um eine unendlich kleine Differenz übertrift; ſo ſind auch jedesmahl der Neigungs- und gebrochene Winkel nur um eine unendlich kleine Differenz unterſchieden, und der Weg des Lichts lenkt ſich nach dem Geſetz der Stetigkeit allmählig mehr von der urſprünglichen Richtung *slt* ab gegen *l*K zu. Wenn man annimmt, daß der in der Atmoſphäre ſo gebogene Lichtſtrahl endlich in B die Erdfläche erreicht, und ſeine lezte Lage daſelbſt mit der Lage der graden Linie BT überein kommt; ſo iſt dieſer Weg des Lichts in der Atmoſphäre eine krumme Linie, welche ihre erhabene Seite der Scheitellinie BA, ihre hohle Seite dem Horizont BH zukehrt, und wovon *tls*, BT ein paar Tangenten ſind. Dieſe Strahlenbrechung hat alſo den Erfolg, daß die Höhe des Puncts am Himmel, woher der Strahl *sl*B kommt, größer zu ſeyn ſcheint, als ſie würklich iſt. Sie ſcheint = HBT zu ſeyn, da doch HBS dieſes Puncts Höhe über dem Horizont iſt. Bey dem allen läßt ſich hier ſchon vorläufig überſehen, daß die Linie *l*NB ſich ſehr wenig krümme, und daß dieſe Krümmung deſto weniger auf ſich haben müſſe, je weniger die Höhe des leuchtenden Puncts, woher das Licht kommt, von 90° verſchieden iſt. Fiele *sl* mit der Scheitellinie BA zuſammen, ſo würde der Strahl gar keine Brechung leiden, weil er nun auf alle Schichten ſenkrecht fiele; alſo wäre der Weg des Lichts eine grade Linie. Bey jeder andern Lage des einfallenden Strahls *sl* iſt K*l*B der Neigungswinkel, und es iſt $\sin K l B = \frac{BK \sin BKl}{Bl}$.

Weil nun BK und B*l* unverändert bleiben, wenn AB*l* wächſt, AB*l* und BK*l* aber zugleich wachſen, ſo wird der Neigungswinkel K*l*B deſto größer, je kleiner die Höhe des leuchtenden Puncts, woher das Licht kommt, über dem Horizont iſt. Daß es hiemit eben die Bewandniß habe, wenn der Strahl jede andre Schichte, wie PM erreicht, iſt leicht zu überſehen: mithin iſt der Effect der Strahlenbrechung, alſo auch die Krümmung des Weges, den das Licht in der Atmoſphäre nimmt, deſto ſtärker, je näher der leuchtende Himmelskörper dem Horizont iſt, am ſtärkſten, wenn letzterer im Horizont ſelbſt befindlich iſt. Indeſſen werden die Geographiſch-Aſtronomiſchen Wiſſenſchaften weiter lehren, daß der gröſte Effect der Strahlenbrechung, als der Unterſchied der beyden Winkel HBS und HBT nie über 32 bis höchſtens 36 Minuten betragen, auch wenn das Licht horizontal in die Atmoſphäre fällt: mithin krümmt ſich die Linie *l*NB nie ſtark, ſie iſt vielmehr von der graden Linie BL allemahl nur wenig verſchieden.

Zu dieſer Krümmung des Weges, den das Licht in der Atmoſphäre nimmt, kommt nun noch die Verminderung des Lichts wegen der Undurchſichtigkeit der Atmoſphäre, die deſto mehr auf ſich hat, je tiefer das Licht eindringt, weil die Dichtigkeit der Luft gegen die Erdfläche zu wächſt. Wollte man bey Aufſuchung des Geſetzes, nach welchem dieſe Verminderung des Lichts erfolget, die Krümmung des Strahls, welche von der Strahlenbrechung herrührt, mit in Betrachtung ziehen, ſo würde man auf gar zu ſehr verwickelte Formuln kommen; wie denn die Folge zeigen wird, daß jede

Unter-

Unterſuchung für ſich ſchon auf ziemlich verwickelte Formuln leitet: deswegen ſetzt man bey der Unterſuchung über das Geſetz, nach welchem das Licht in der Atmoſpähre abnimmt, die Strahlenbrechung beyſeite, und betrachtet die Sache ſo, als wenn die grade Linie SLB der Weg des Lichts wäre. Daß dieſe Vorausſetzung auf keine merklich fehlerhafte Reſultate leiten könne, iſt aus der kurzen Betrachtung über den Effect der Strahlenbrechung leicht abzunehmen.

380. §.

Das Licht der Sonne oder eines ändern leuchtenden Körpers am Himmel falle alſo in der Richtung LB durch die Atmoſphäre, und in B auf die Erdfläche: man ſucht das Geſetz, nach welchem es geſchwächt wird, indem es den Weg LM zurück legt. 123. Fig.

Auflöſung. Durch M ſtelle man ſich eine mit der Erde concentriſche Kugelfläche vor, und ziehe den Halbmeſſer KM, welcher die Erdfläche in G trift; ſo iſt GM = BP die lothrechte Höhe dieſer Stelle über der Erdfläche. An dieſer Stelle ſey die Dichtigkeit der Luft $= \delta$, LM $= w$, LB $= g$, ſo iſt die Maſſe, durch welche das Licht von L bis M dringt, dem Integral $\int \delta dw$ proportional. Ferner ſey die Dichtigkeit des bey L einfallenden Lichts $= 1$, in M aber $= v$. Für eine gegebene Tiefe LQ ſey dieſe Dichtigkeit des Lichts = V, das Integral $\int \delta dw$ aber, wenn man $w =$ LQ ſetzt, $= m$, ſo hat man für das Geſetz der Lichtverminderung $l\,\frac{1}{v} = \frac{\int \delta dw}{m}\; l\,\frac{1}{V}$. (376 §.)

Weil das Integral $\int\delta dw$ allemahl der Menge derjenigen Maſſe proportional iſt, die das Licht durchdringt, wenn es den Weg LM $= w$ zurück legt, ſo nehme man $\int\delta dw = \Delta . s$ an, und Δ ſey die Dichtigkeit der Luft in B unmittelbar an der Erdfläche. Ferner ſey $m = \Delta . h$, ſo hat man $l\,\frac{1}{v} = \frac{s}{h}\ l\,\frac{1}{V}$, und $s = \frac{\int\delta dw}{\Delta} = \int \frac{\delta}{\Delta} dw$ iſt die Tiefe um welche das Licht in eine Luft von der Dichtigkeit Δ eindringen muſte, wenn es in dem Verhältniß $1 : v$ abnehmen ſollte: auch iſt eben ſo h die Tiefe, um welche das Licht in eine Luft von gleichförmiger Dichtigkeit Δ eindringen muſte, wenn es in dem Verhältniß $1 : V$ abnehmen ſoll. Demnach kommt es nur darauf an, das Integral $s = \int \frac{\delta}{\Delta} dw$ zu finden.

Man nehme den Winkel ABL $= \gamma$ an, und BM $= x$, ſo iſt $w = g - x$, $dw = - dx$, alſo $s = \text{Conſt.} - \int \frac{\delta}{\Delta} dx$. Ferner ſey GM $=$ BP $= y$, und der Halbmeſſer der Erdkugel KB $= r$; ſo hat man im Dreyeck KBM aus dem Winkel an B $= 180° - \gamma$, der Seite KB $= r$, und BM $= x$, die Seite KM $= r + y = \sqrt{(r^2 + 2rx \cos\gamma + xx)}$, alſo $2ry + yy = 2rx \cos\gamma + xx$. Man addire auf beyden Seiten $r^2 \cos\gamma^2$, und nehme alsdenn die Quadratwurzel, ſo erhält man $r \cos\gamma + x =$

$\sqrt{(r^2 \cos\gamma^2 + 2ry + yy)}$, mithin $dx = \frac{(r+y)\,dy}{\sqrt{(r^2 \cos\gamma^2 + 2ry + yy)}}$: und dieſer Werth ſtatt dx gebraucht giebt $s = \text{Conſt} - \int \frac{(\delta : \Delta)\,(r+y)\,dy}{\sqrt{(r^2 \cos\gamma^2 + 2ry + yy)}}$. Noch ſey $\Delta = 1$, und $\frac{y}{r} = \lambda$, ſo iſt $dy = r d\lambda$, und man erhält $s = \text{Conſt} - \int \frac{r\delta (1+\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{(\cos\gamma^2 + 2\lambda + \lambda\lambda)}}$.

Dies Integral kann nicht gefunden werden, bevor man weis, wie δ und λ von einander abhängen. Nach dem Mariottiſchen Geſetz der Dichtigkeiten der Luft in verſchiedenen Höhen über der Erdfläche iſt $l\,\frac{\Delta}{\delta} = \frac{y}{k}$ (377 §.), oder $y = -kl\delta$, wenn man, wie hier angenommen iſt, $\Delta = 1$ ſetzt. Nimmt man ferner $\frac{k}{r} = n$ an, ſo iſt $\frac{y}{r} = \lambda = -nl\delta$, und man hat $\delta d\lambda = -nd\delta$, alſo $r\delta d\lambda = -kd\delta$. Das in den Werth von s geſetzt giebt $s = \text{Conſt} + \int \frac{k(1+\lambda)\,d\delta}{\sqrt{(\cos\gamma^2 + 2\lambda + \lambda\lambda)}}$, alſo $ds = \frac{k(1+\lambda)\,d\delta}{\sqrt{(\cos\gamma^2 + 2\lambda + \lambda\lambda)}}$. Setzt man in dieſer Gleichung ſtatt λ den Werth $-nl\delta$, oder ſtatt δ den Werth $e^{-\lambda : n}$, ſo iſt zwar das Differential ds allein durch δ oder λ ausgedrückt: es hat

aber ſeine Schwierigkeiten, das Integral hievon, und mit demſelben die Aufloͤſung der vorgelegten Aufgabe in der Allgemeinheit zu finden, welche hier eigentlich geſucht wird; ſo nemlich, daß hiernaͤchſt fuͤr jeden Winkel γ die Linie s leicht angegeben werden koͤnne. Die folgenden Anmerkungen uͤber das Mariottiſche Geſetz der Dichtigkeiten, welches hiebey als allgemein richtig zum Grunde gelegt iſt, werden zur Vorbereitung dienen, um eine bequeme Methode zu waͤhlen, wobey man verſichert iſt, daß das geſuchte Integral wenigſtens ſo nahe richtig gefunden werde, als bey Unterſuchungen dieſer Art genuͤgen kann.

381. §.

Obgleich das eben erwehnte Mariottiſche Geſetz ſonſt hinlaͤnglich beſtaͤttiget iſt, ſo weis man doch auch, daß es nicht allein bey ſehr ſtark zuſammen gepreßter Luft, ſondern auch bey ſehr ſtark verduͤnnter Luft ſeine Einſchraͤnkung leide. Die Hoͤhe der Atmoſphaͤre muͤſte unendlich groß ſeyn, wenn die Gleichung $y = - kl\delta$ allgemein richtig waͤre, weil vermoͤge derſelben y unendlich groß wird, wenn man $\delta = 0$ ſetzt: an der aͤuſſern Graͤnze der Atmoſphaͤre aber muͤſte $\delta = 0$ ſeyn, weil ſonſt die Luft an dieſer Graͤnze, ſie ſey ſo ſehr verduͤnnt, wie man wolle, der Vorausſetzung gemaͤß ſich noch weiter ausbreiten, mithin die Atmoſphaͤre noch weiter erhoͤhen wuͤrde. Eigentlich waͤchſt die Federkraft der Luft in einem etwas groͤßern Verhaͤltniß, als ihre Dichtigkeit: die Federkraft einer 800 mahl dichtern Luft als die untere nahe an der Erdflaͤche iſt, waͤre nach dem Mariottiſchen

riottiſchen Geſetz 800 mahl gröſſer, als die Federkraft der natürlichen Luft; ſie iſt aber würklich mehr als 800 mahl gröſſer. (M. ſ. den 12 §. der Pneumatik.) Vermuthlich iſt auch dies der gröſte Grad der Dichtigkeit, deſſen die Luft fähig iſt. Eben ſo müſte nach dem Mariottiſchen Geſetz eine tauſendmahl dünnere Luft eine tauſendmahl geringere Federkraft beſitzen: allein zur Vermeidung der hiebey eintretenden Schwierigkeiten iſt man berechtiget anzunehmen, daß die Federkraft einer ſo ſehr verdünnten Luft kleiner ſey, als ſie nach jenem Geſetz ſeyn ſollte. Ohne Zweifel giebt es auch hier eine Gränze, eine gewiſſe ſehr kleine Dichtigkeit der Luft, womit ihre Federkraft in ſo weit aufhört, eine merkliche Würkung zu äuſſern, daß es nicht weiter nöthig iſt, ein darauf drückendes Gewicht anzunehmen, um zu verhindern, daß ſich dieſe ſo ſehr verdünnte Luft nicht noch weiter, und wohl gar in einen unendlich großen Raum ausbreite. (Man vergleiche den 82 §. der Aeroſtatik.) Auf ſolche Art wird es begreiflich, daß es nicht nöthig ſey, die Höhe der Atmoſphäre unendlich groß anzunehmen, wenn gleich übrigens die Dichtigkeiten der Luft ſehr nahe nach dem Mariottiſchen Geſetz abnehmen. Es ſey p die Barometerhöhe unten an der Erdfläche, ſo iſt in einer tauſendmahl dünnern Luft die Barometerhöhe $< \frac{1}{1000} p$. Iſt dies vielleicht die Dichtigkeit der Luft an der äuſſern Gränze der Atmoſphäre, ſo wird daſelbſt die Barometerhöhe $= 0$ ſeyn: die Lufttheilchen werden bey dieſer Dichtigkeit weiter kein Beſtreben äuſſern, ſich auszubreiten, mithin auf das Queckſilber im Barometer nicht weiter drücken, auch wird von oben

kein äuſſerer Druck nöthig ſeyn, dieſe Luft in der Dichtigkeit, welche ſie hat, zu erhalten.

382. §.

Die Gleichung $y = -kl\delta$ giebt $y = 2{,}302585$ $3k$, oder ohngefehr $y = 7k = 27377$ Toiſen, wenn $\delta = \frac{1}{1000}$ geſetzt, und nach Hn. Bouguers ältern Beſtimmung $k = 3911$ Toiſen angenommen wird. Nach ſeiner neuern Beſtimmung wäre k etwas gröſſer (307 §.), wie auch nach Hn. de Luc. Wie aber jede ſolcher Beſtimmungen überall einerley Grad der Wärme in der ganzen Atmoſphäre voraus ſetzt, welches in der Natur nie zutrift, ſo iſt hier eine ſcharfe Rechnung überflüßig. Wenn man $k = 4000$ Toiſen annimmt, ſo giebt ſich $y = 28000$ Toiſen für $\delta = \frac{1}{1000}$: und daß die Höhe der Atmoſphäre dieſe eben angezeigte ſchwerlich übertreffe, davon ſind die Gründe ſchon im 82 §. der Aeroſtatik angeführt. Oben im 380 §. bezeichnete r den Halbmeſſer der Erde, und dieſer beträgt in runden Zahlen 3272000 Toiſen, wovon übrigens die mathematiſche Geographie mehr Nachricht giebt: alſo bleibt die Zahl $\lambda = \frac{y}{r}$ zwiſchen den Gränzen o und $\frac{28}{3271} = \frac{7}{818}$ oder $\frac{1}{117}$, wenn gleich y von o bis zur Höhe der Atmoſphäre wächſt, oder von der Höhe der Atmoſphäre bis auf o abnimmt. Hätte man eine Gleichung zwiſchen y und δ, welche völlig richtig ausdrückte, wie y und δ von einander abhängen, ſo müſte ſie für y die Höhe der Atmoſphäre

geben,

geben, wenn man ſtatt δ die Dichtigkeit der Luft ſetzte, die ſie in der höchſten Gegend hat: und umgekehrt, wenn ſonſt woher die Höhe der Atmoſphäre bekannt wäre, ſo müſte eine ſolche Gleichung für δ die Dichtigkeit der Luft in der oberſten Gegend geben, wenn man ſtatt y die Höhe der Atmoſphäre ſetzte. Ob nun gleich beydes, die kleinſte Dichtigkeit der Luft, und die Höhe der Atmoſphäre unbekannt ſind, ſo beſtättigen doch die angeführten Gründe ſo viel, daß die Höhe der Atmoſphäre nicht gröſſer ſey, als $\frac{1}{100}r$: mithin bleibt in der Gleichung $ds = \frac{k(1+\lambda)\,d\delta}{\sqrt{(\cos y^2 + 2\lambda + \lambda\lambda)}}$. (380. §.) Die Zahl λ allemahl zwiſchen den Gränzen 0 und $\frac{1}{100}$, wenn für y keine andere Werthe gebraucht werden, als ſolche, die zwiſchen 0 und der Höhe der Atmoſphäre fallen. Uebrigens iſt die beſtändige Zahl $n = \frac{k}{r} = \frac{4}{3272} = \frac{1}{818}$ ohngefehr, oder $n = 0{,}0012$, ſo wie der gröſte Werth $\lambda = 7 \cdot n$ wird, wenn y der Höhe der Atmoſphäre gleich iſt.

383. §.

Soviel läßt ſich wohl mit ziemlicher Gewißheit vorausſetzen, daß das Mariottiſche Geſetz in der Natur ohne ſehr merkliche Abweichung beobachtet werde, bis die Luft aufängt, mehr denn 100 mahl dünner zu werden, als die untere iſt. Die Aenderungen alſo, welche mit δ vorgehen, wenn ſich y

oder λ ändert, ſind in der Gleichung $ds = \frac{k(1+\lambda)d\delta}{\surd(\cos y^2 + 2\lambda + \lambda\lambda)}$ richtig enthalten, ſo lange y nicht ſo groß angenommen wird, daß $\delta > \frac{1}{100}$ werden muß. Für gröſſere Höhen aber iſt ſelbſt dieſe Gleichung nicht mehr völlig richtig, weil alsdenn die Gleichung $y = -kl\delta$, mithin auch $r\delta d\lambda = -kd\delta$ nicht mehr völlig der Natur gemäß iſt; und dieſe Vorausſetzung weicht deſto mehr von der Natur ab, je näher y der ganzen Höhe der Atmoſphäre kommt. Wenn aber die Differentialgleichung, welche es ausdrücken ſoll, wie s von y abhängt, nicht vollkommen richtig iſt, ſo würde auch das Integral, wenn es gleich in ſeiner völligen Allgemeinheit gefunden werden könnte, die geſuchte Linie s nicht ganz richtig geben, wenn man das Integral auf die ganze Höhe der Atmoſphäre ausdehnen wollte, die da erſtlich erreicht würde, wo nach dem Geſetz $y = -kl\delta$ die Dichtigkeit $\delta = 0$ wäre. Um ſo mehr wird es erlaubt ſeyn, daß bey Integrirung der Gleichung $ds = \frac{k(1+\lambda)d\delta}{\surd(\cos y^2 + 2\lambda + \lambda\lambda)}$ vorausgeſetzt werde, es bleibe λ aller Aenderung, die damit vorgehet, ungeachtet, doch beſtändig eine ſehr kleine Zahl, kleiner als $\frac{1}{100}$. Um aller etwa noch übrigen Bedenklichkeit abzuhelfen, ſtelle man ſich vor, es ſey
123. ALΛ diejenige Luftgegend, wo $\delta = \frac{1}{1000}$ iſt, und
Fig. man ſuche diejenige Verminderung, die das Licht leidet, wenn es aus dieſer Luftgegend in der Richtung LB auf die Erdfläche fällt. Hat es nun vorher, ehe es noch in L die Luftgegend ALΛ erreichte

vielleicht

vielleicht ſchon eine noch dünnere Luft durchdringen müſſen; ſo wird doch die Verminderung, welche es in derſelben erlitten hat, in Vergleichung mit der übrigen, welche es auf dem Wege LB leidet, ganz unbeträchtlich ſeyn.

384. §.

Man ſetze nun $1 - \sin\gamma^2$ in der Gleichung $ds = \frac{k(1+\lambda)\,d\delta}{\sqrt{(\cos\gamma^2 + 2\lambda + \lambda\lambda}}$ ſtatt $\cos\gamma^2$, ſo erhält man

$$ds = \frac{k(1+\lambda)\,d\delta}{\sqrt{((1+\lambda)^2 - \sin\gamma^2)}},$$ alſo auch

$$ds = kd\delta : \sqrt{\left(1 - \frac{\sin\gamma^2}{(1+\lambda)^2}\right)}.$$

Vermöge der vorhin angeführten Gründe aber iſt es verſtattet, $(1+\lambda)^2 = 1 + 2\lambda$ anzunehmen, und λ^2 in Vergleichung mit 2λ wegzulaſſen: dieſemnach hat man auch $\frac{1}{(1+\lambda)^2} = \frac{1}{1+2\lambda}$ ſehr nahe $= 1 - 2\lambda$, und man erhält $ds =$

$$\frac{kd\delta}{\sqrt{(1 - \sin\gamma^2(1-2\lambda))}} = \frac{kd\delta}{\sqrt{(\cos\gamma^2 + 2\lambda\sin\gamma^2)}},$$

oder auch $ds = \frac{kd\delta \,.\, \mathrm{cosec}\gamma}{\sqrt{(\cot\gamma^2 + 2\lambda)}}$.

Weil δ allemahl ein eigentlicher Bruch iſt, der zwiſchen 1 und ohngefehr $\frac{1}{1000}$ fällt; ſo iſt $l\delta$ negativ. Demnach ſey $l\delta = -(\zeta - z)$, ſo iſt $\delta = e^{z-\zeta} = e^{-\zeta} . e^{z}$, und $d\delta = e^{-\zeta}\, e^{z}\, dz$. Es iſt aber oben $\lambda = -nl\delta$ angenommen worden, alſo iſt nun $\lambda = n\zeta - nz$,

und

und dieſe Werthe gebraucht, geben $ds =$

$\frac{e^{-\zeta}\, k e^{z}\, dz\, \text{coſec}\gamma}{\sqrt{(\cot\gamma^2 + 2n\zeta - 2nz)}}$. Noch ſetze man die Linie

$\frac{k\, \text{coſec}\gamma}{\sqrt{(\cot\gamma^2 + 2n\zeta)}} = K$, und die Zahl

$\frac{2n}{\cot\gamma^2 + 2n\zeta} = m$; ſo iſt $ds = \frac{e^{-\zeta}.K.e^{z} dz}{\sqrt{(1 - mz)}}$,

und nach dem Binomialtheorem hat man

$$\frac{1}{\sqrt{(1-mz)}} = (1-mz)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2} mz + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} m^2 z^2 + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6} m^3 z^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} m^4 z^4 + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10} m^5 z^5 \dots$$

Um abzukürzen will ich dieſe Reihe $= 1 + Z$ ſetzen, ſo iſt $ds = e^{-\zeta}.\, K(e^{z} dz + Ze^{z} dz)$. Ferner ſey die kleinſte Dichtigkeit der Luft in der höchſten Gegend der Atmoſphäre $= D$, und $lD = 2\zeta$, alſo $D = e^{-2\zeta}$. Weil nun überhaupt $\delta = e^{z-\zeta}$ angenommen iſt, ſo erhält man $z - \zeta = -2\zeta$, oder $z = -\zeta$, wenn $\delta = D$ geſetzt wird; und in dem Fall $\delta = 1$ muß $z - \zeta = 0$ ſeyn, alſo $z = \zeta$.

Wird nun die zuletzt gefundene Differentialgleichung integrirt, ſo findet man

$$s = C + e^{-\zeta} K(e^{z} + \int Ze^{z} dz),$$

und wenn $\delta = D$, alſo $z = -\zeta$ iſt, muß s verſchwin-

ſchwinden. Alsdenn ſey das Integral $\int Ze^z dz = \alpha$, ſo findet man $C = -e^{-\zeta} K(e^{-\zeta} + \alpha)$. Um hiernächſt die geſammte Verminderung zu finden, welche das Licht leidet, indem es durch die Atmoſphäre den ganzen Weg LB zurück legt, muß man $\delta = 1$, alſo $z = \zeta$ ſetzen, ſo erhält man $s = K (1 + e^{-\zeta} \int Z e^z dz - e^{-2\zeta} - e^{-\zeta} . \alpha)$. Es ſey das Integral $\int Ze^z dz = \beta$ wenn $z = \zeta$ geſetzt wird, ſo iſt nach Herſtellung des angenommenen Werths von K, die geſuchte Linie $s = \frac{k \operatorname{colec} \gamma}{\sqrt{(\cot\gamma^2 + 2n\zeta)}} (1 - e^{-2\zeta} + (\beta - \alpha) . e^{-\zeta})$.

385. §.

Zur völligen Aufloſung der Aufgabe des 380 §. wird alſo noch erfordert, daß man das Integral $\int Ze^z dz$ ſuche, welches auf folgende Art gefunden wird. Man ſetze $\int Zdz = P$; ſo iſt $Ze^z dz = e^z dP$, und $\int Ze^z dz = e^z . P - \int P . d . e^z = e^z . P - \int Pe^z dz$. Weiter ſey $\int Pdz = Q$, ſo iſt aus eben dem Grunde $\int Pe^z dz = e^z . Q - \int Qe^z dz$, mithin $\int Ze^z dz = e^z . P - e^z . Q + \int Qe^z dz$. Man nehme ferner folgende Werthe an: $\int Qdz = R$, $\int Rdz = S$, $\int Sdz = T$, $\int Tdz = V$, u. ſ. f. fort, ſo iſt leicht zu überſehen, daß folgende Reihe gefunden werde:

$$\int Ze^z dz = e^z (P - Q + R - T + T - V \ldots).$$

Hier

Hier iſt nun $z = A . z + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 . . . .$ und die Coefficienten ſind nach dem Binomialtheorem bekannt; wenn alſo nach der vorgetragenen Regel die Integrale $\int e^z z dz, \int e^z z^2 dz, \int e^z z^3 dz,$ u. ſ. f. nach der Ordnung geſucht werden, ſo giebt ſich folgende Reihe $\int Z e^z dz =$

$$A . e^z \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^5}{2.3.4.5} + \frac{z^6}{2.3.4.5.6} - \frac{z^7}{2.3...7} . . . . \right)$$

$$+ Be^z \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{3.4} + \frac{z^5}{3.4.5} - \frac{z^6}{3.4.5.6} + \frac{z^7}{3.4...7} - \frac{z^8}{3.4...8} . . . \right)$$

$$+ Ce^z \left(\frac{z^4}{4} - \frac{z^5}{4.5} + \frac{z^6}{4.5.6} - \frac{z^7}{4.5.6.7} + \frac{z^8}{4.5.6.7.8} - \frac{z^9}{4.5...9} . . . \right)$$

$$+ De^z \left(\frac{z^5}{5} - \frac{z^6}{5.6} + \frac{z^7}{5.6.7} - \frac{z^8}{5.6.7.8} + \frac{z^9}{5.6...9} - \frac{z^{10}}{5.6...10} . . . \right)$$

$$+ . . . . . .$$

Das Geſetz des Fortgangs iſt leicht zu überſehen, und ob man gleich alles auch nach den Potenzen von z ordnen kann, ſo iſt es doch für die Rechnung am bequemſten, der Reihe dieſe Form zu laſſen. Man erwäge nemlich, daß $m = \frac{2n}{\cot\gamma^2 + 2n\zeta}$ alle-

mahl

mahl kleiner, als $\frac{1}{\zeta}$ ſey, nur den einzigen Fall $\gamma = 90°$ ausgenommen, der $\cot\gamma = 0$, alſo $m = \frac{1}{\zeta}$ giebt. Demnach ſetze man $m = \frac{n}{\zeta}$, ſo iſt $\mu = \frac{2n\zeta}{\cot\gamma^2 + 2n\zeta}$ allemahl < 1 bis auf den Fall $\gamma = 90°$, der $\mu = 1$ giebt, und man erhält $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu}{\zeta}$, $B = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\mu^2}{\zeta^2}$, $C = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\mu^3}{\zeta^3}$, $D = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{\mu^4}{\zeta^4}$, u. ſ. f. Ferner ſetze man $z = \zeta$ in dem gefundenen Integral, ſo findet man

$$\beta . e^{-\zeta} = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\zeta}{2} - \frac{\zeta^2}{2 \cdot 3} + \frac{\zeta^3}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{\zeta^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots \right)$$

$$+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\mu^2 \left(\frac{\zeta}{3} - \frac{\zeta^2}{3 \cdot 4} + \frac{\zeta^3}{3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{\zeta^4}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots \right)$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\mu^3 \left(\frac{\zeta}{4} - \frac{\zeta^2}{4 \cdot 5} + \frac{\zeta^3}{4 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{\zeta^4}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots \right)$$

+

$$+ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\mu^4 \left(\frac{\zeta}{5} - \frac{\zeta^2}{5.6} + \frac{\zeta^3}{5.6.7} - \frac{\zeta^4}{5.6.7.8} + \ldots\right)$$

$$+ \ldots\ldots$$

$$\alpha . e^{-\zeta} = \frac{e^{-2\zeta}.\mu}{2} . \left(\frac{\zeta}{2} + \frac{\zeta^2}{2.3} + \frac{\zeta^3}{2.3.4} + \frac{\zeta^4}{2.3.4.5} + \ldots\right)$$

$$- \frac{1.3.e^{-2\zeta}.\mu^2}{2.4}\left(\frac{\zeta}{3} + \frac{\zeta^2}{3.4} + \frac{\zeta^3}{3.4.5} + \frac{\zeta^4}{3.4.5.6} + \ldots\right)$$

$$+ \frac{1.3.5.e^{-2\zeta}.\mu^3}{2.4.6}\left(\frac{\zeta}{4} + \frac{\zeta^2}{4.5} + \frac{\zeta^3}{4.5.6} + \frac{\zeta^4}{4.5.6.7} + \ldots\right)$$

$$- \frac{1.3.5.7.e^{-2\zeta}.}{2.4.6.8}\mu^4\left(\frac{\zeta}{5} + \frac{\zeta^2}{5.6} + \frac{\zeta^3}{5.6.7} + \frac{\zeta^4}{5.6.7.8} + \ldots\right)$$

$$+ \ldots\ldots$$

Weil nun die Buchſtaben A, B, C, D, u. ſ. f. in voriger Bedeutung nicht mehr gebraucht werden; ſo ſey $\beta . e^{-\zeta} = A . \mu + B . \mu^2 + C . \mu^3 + D . \mu^4 + E . \mu^5 \ldots$

$$\alpha . e^{-\zeta} = e^{-2\zeta} (a . \mu - b . \mu^2 + c . \mu^3 - d . \mu^4 + \ldots),$$

und man erhält $s =$

$$K(1 + A\mu + B\mu^2 + C . \mu^3 \ldots - e^{-2\zeta} (1 + a \mu - b\mu^2 + \ldots)),$$

wenn $K = \frac{k \operatorname{coſec}\gamma}{\sqrt{(\cot\gamma^2 + 2n\zeta)}} = \frac{k \operatorname{ſec}\gamma}{\sqrt{(1 + 2n\zeta \operatorname{tg}\gamma^2)}}$ genommen wird.

386. §.

In dem Fall, wenn das Licht vertical in der Atmoſphäre herab fällt, hat man $\gamma = 0$, und das giebt $s = k(1 - e^{-2\zeta})$ da dann $e^{-2\zeta}$ ohngefehr $\frac{1}{1000}$ ſeyn würde. Weil indeſſen k die Höhe der bis auf die Dichtigkeit der untern Luft zuſammen gedruckten Atmoſphäre bezeichnet; ſo ſollte bey der Vorausſetzung $\gamma = 0$ eigentlich $s = k$ gefunden werden: auch giebt die Differentialgleichung $ds = \frac{k(1 + \lambda)\, d\delta}{\sqrt{(\operatorname{coſ}\gamma^2 + 2\lambda + \lambda\lambda)}}$ (380 §.) dies Reſultat würklich, wenn $\operatorname{coſ}\gamma = 1$ geſetzt, und hiernächſt die Gleichung $ds = k d\delta$ ſo integrit wird, daß s verſchwinden muß, wenn $\delta = 0$ iſt. Man ſieht demnach daraus, daß die im 383 §. zur Erleichterung der Integration angenommene Vorausſetzung in dem Fall $\gamma = 0$ ohngefehr um $\frac{1}{1000}$ der Höhe k fehle, und dieſe Abweichung der Formul von der Wahrheit kann hier um deswillen als unbeträchtlich angeſehen werden, weil $\frac{1}{1000} k$ ohngefehr 4 Toiſen ausmacht, und man bey Beſtimmung der Höhe k ſelbſt dafür nicht ſicher ſeyn kann, ob nicht um mehr, als um 4 Toiſen gefehlt werde.

So lange γ nicht über 45° beträgt, ſo lange iſt die Zahl $\mu < \frac{2n\zeta}{1+2n\zeta}$, und 2ζ ohngefehr $=7$, $n=0{,}0012$, mithin $\frac{2n\zeta}{1+2n\zeta} = \frac{0{,}0084}{1{,}0084} = 0{,}0083$ noch nicht völlig $\frac{1}{100}$. Dem⸗nach iſt ſo lange allemahl ziemlich nahe $s = K = \frac{k \sec\gamma}{\sqrt{(1+2n\zeta tg\gamma^2)}}$. Weil ferner nicht allein $2n\zeta$ noch kein $\frac{1}{100}$ theilchen beträgt, ſondern auch tangγ^2 für Winkel die nur wenige Grade betra⸗gen ſehr klein iſt, ſo iſt anfangs ſehr nahe $s = k \sec\gamma$.

Nähme man r in Vergleichung mit k unendlich groß an, ſo hieſſe das vorausſetzen, die Erdfläche ſey eine ebene Fläche: das würde alsdenn $n = \frac{k}{r} = 0$, mithin auch $\mu = 0$ geben, und ſo wäre alle⸗mahl $s = k \sec\gamma$. Weil nun anfangs, ſo lange γ klein iſt, die äuſſere Gränze der Atmoſphäre ſich wenig krümmt, und der Natur einer ebenen Flä⸗che nahe kommt, ſo läßt ſich daraus abnehmen, daß anfangs die Linie s, ſo lange γ klein iſt, ſich mit γ beynahe eben ſo ändern müſſe, wie geſchehen würde, wenn die Erdfläche eben wäre. Wächſt γ über 45°, ſo nähert ſich die Zahl μ wiewohl zuerſt nur noch langſam der Einheit. Die Vor⸗ausſetzung $\mu = \frac{2n\zeta}{\cot\gamma^2 + 2n\zeta} = \frac{1}{10}$ giebt $\cot\gamma^2 = 9 \cdot 2n\zeta = 0{,}0756$, und $\cot\gamma = 0{,}27495$, mithin

mithin $\gamma = 74° \; 38'$. So lange demnach der Winkel γ nicht völlig 75° beträgt, ſind wenige von den erſten Gliedern der gefundenen Reihe hinlänglich, die Linie s ſcharf genug zu finden. In dem Fall $\cot\gamma^2 = 2n\zeta = 0{,}0084$ hat man $\mu = \frac{1}{2}$, und dieſe Vorausſetzung giebt $\cot\gamma = 0{,}0916515$, mithin $\gamma = 84° \; 46'$. Nimmt man $\gamma = 85°$, ſo iſt $\cot\gamma = 0{,}0874887$, alſo $\cot\gamma^2 =$

$0{,}00765422$, und das giebt $\mu = \frac{840000}{1605422} =$

$0{,}52330166$. Weil dieſer Bruch nur wenig gröſſer, als $\frac{1}{2}$ iſt, ſo nehmen ſeine höhern Potenzen noch ziemlich ſchnell ab, deswegen bleibt die gefundene Reihe noch bis zum Winkel von 85° brauchbar, nnd es kommt nur darauf an, die Coefficienten durch eine nicht ſo gar weitläuftige Rechnung zu finden. Hiezu wird das folgende als eine Vorbereitung dienen.

387. §.

Die Exponentialgröſſe e^z läßt ſich durch eine Reihe von der Form ausdrücken:

$$e^z = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 \ldots$$

Es muß nemlich $e^z = 1$ ſeyn, wenn $z = 0$ iſt, und aus der angenommenen Gleichung folgt

$$z = l(1 + Az + Bz^2 + Cz^3 \ldots)$$

mithin $dz = \dfrac{(A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 \ldots) dz}{1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 \ldots}$

alſo ferner $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 \ldots$

$= A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 + 5Ez^4 \ldots$

Damit beyde Reihen gleich groß werden, müſſen die Coefficienten gleichnahmiger Potenzen von z einander gleich ſeyn, und das giebt folgende Gleichungen

$$A = 1 \qquad E = \tfrac{1}{5} D = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$B = \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} \qquad F = \tfrac{1}{6} E = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$C = \tfrac{1}{3} B = \frac{1}{2 \cdot 3} \qquad G = \tfrac{1}{7} F = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7},$$

$$D = \tfrac{1}{4} C = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \qquad \text{u. ſ. f.}$$

Der Coefficient von z^r iſt $= \dfrac{1}{1.2.3.4\ldots(r-1).r}$,

und man hat

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \frac{z^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{z^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots$$

alſo

$$e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \frac{z^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{z^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots$$

Die letzte Gleichung giebt

$$\frac{(e^{-z} + z - 1)}{z} = \frac{z}{2} - \frac{z^2}{2 \cdot 3} + \frac{z^3}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{z^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots$$

und

und wenn dieſer Werth $= P$ geſetzt wird, ſo iſt ferner

$$\frac{z}{3} - \frac{z^2}{3 \cdot 4} + \frac{z^3}{3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{z^4}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots$$

$$= 1 - \frac{2}{z} P = Q,$$

mithin weiter

$$\frac{z}{4} - \frac{z^2}{4 \cdot 5} + \frac{z^3}{4 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{z^4}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots$$

$$= 1 - \frac{3}{z} Q = R.$$

Auf eben die Art erhält man

$$\frac{z}{5} - \frac{z^2}{5 \cdot 6} + \frac{z^3}{5 \cdot 6 \cdot 7} - \frac{z^4}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \ldots$$

$$= 1 - \frac{4}{z} R = S$$

$$\frac{z}{6} - \frac{z^2}{6 \cdot 7} + \frac{z^3}{6 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{z^4}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} + \ldots$$

$$= 1 - \frac{5}{z} R = T,$$

u. ſ. f. Die Gleichung

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \frac{z^5}{2.3.4.5} + \ldots$$

giebt eben ſo

$$\frac{e^z - z - 1}{z} = \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2 \cdot 3} + \frac{z^3}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$+ \frac{z^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots = P',$$

$$\frac{z}{3} + \frac{z^2}{3\cdot4} + \frac{z^3}{3\cdot4\cdot5} + \frac{z^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6} + \ldots$$
$$= \frac{2}{z} P' - 1 = Q',$$

$$\frac{z}{4} + \frac{z^2}{4\cdot5} + \frac{z^3}{4\cdot5\cdot6} + \frac{z^4}{4\cdot5\cdot6\cdot7} + \ldots$$
$$= \frac{3}{z} Q' - 1 = R',$$

$$\frac{z}{5} + \frac{z^2}{5\cdot6} + \frac{z^3}{5\cdot6\cdot7} + \frac{z^4}{5\cdot6\cdot7\cdot8} + \ldots$$
$$= \frac{4}{z} R' - 1 = S',$$

$$\frac{z}{6} + \frac{z^2}{6\cdot7} + \frac{z^3}{6\cdot7\cdot8} + \frac{z^4}{6\cdot7\cdot8\cdot9} + \ldots$$
$$= \frac{5}{z} S' - 1 = T'$$

u. ſ. f. Daß dieſe Werthe nach und nach abnehmen, wenn z nicht gröſſer als 1 iſt, oder doch die 1 nicht ſehr übertrift, iſt aus dem Geſetz klar, nach welchem die Reihen fortgehen; nur nehmen ſie ſehr langſam ab, wenn z der 1 nahe, oder wohl gar gröſſer als 1 iſt.

Man ſetze nun $z = \zeta$, ſo geben dieſe Formuln die Coefficienten A, B, C, D, u. ſ. f., imgleichen a, b, c, d, u. ſ. f. im 385 §. Es wird nemlich
$$A = \tfrac{1}{2} P,\ B = \frac{1\cdot3}{2\cdot4} Q,\ C = \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6} R,$$
$$D = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8} . S,$$ u. ſ. f.

$a =$

$a = \frac{1}{2}P'e^{-2\zeta}$, $b = \frac{1\cdot3}{2\cdot4}Q'\cdot e^{-2\zeta}$,

$c = \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}R'\cdot e^{-2\zeta}$, u. ſ. f., und es wird

die Linie $s = 1 - e^{-2\zeta} + \frac{1}{2}(P - P'e^{-2\zeta})\cdot\mu$
$+ \frac{1\cdot3}{2\cdot4}(Q+Q'\cdot e^{-2\zeta})\cdot\mu^2 + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}(R-R'e^{-2\zeta})\cdot\mu^3$
$+ \frac{1\ldots5}{2\ldots6}(R+S'\cdot e^{-2\zeta})\mu^4 + \frac{1\ldots7}{2\ldots8}(T-T'\cdot e^{-2\zeta})\cdot\mu^5$
$+ \frac{1\ldots9}{2\ldots10}(V+V'\cdot e^{-2\zeta})\mu^6 + \frac{1\ldots11}{2\ldots12}(W-W'\cdot e^{-2\zeta})\cdot\mu^7$
$+ \frac{1\ldots13}{2\ldots14}(X-X'\cdot e^{-2\zeta})\mu^8 + \ldots\ldots$

388. §.

Wofern man in dieſer Formul $e^{-2\zeta} = 0{,}001$ annimmt, ſo iſt $2\zeta = 6{,}907755$ nicht völlig $= 7$ (311 §.), und wenn $2\zeta = 7$ geſetzt wird, ſo heiſt das $e^{-2\zeta}$ noch etwas kleiner als $\frac{1}{1000}$ annehmen. Man findet nemlich (163 §. Allg. Rech.)

Brigg. Log. $e = 0{,}434294482$
$\times -7$

Brigg. Log. $e^{-7} - 3{,}040061374$
Log. 10000000 $= 7$,

Log. $10000000\cdot e^{-7} = 4{,}959938626$

alſo $e^{-7} = 0{,}000911881 8$. Weil nun die

Vorausſetzung $e^{-2\zeta} = \frac{1}{1000}$ willkührlich iſt, und die Dichtigkeit der Luft in der höchſten Gegend wohl etwas kleiner als $\frac{1}{1000}$ ſeyn könnte, überdem auch die Reſultate der Rechnung keine beträchtliche Aenderung leiden, wenn $2\zeta = 7$ geſetzt wird, ſo werde ich $2\zeta = 7$, alſo $\zeta = 3\frac{1}{2}$ annehmen, alſo $\frac{1}{\zeta} = \frac{2}{7}$. Weiter findet man $e^{-\zeta}$

$= \sqrt{0{,}000911881 8} = 0{,}03019738$, $1 - e^{-\zeta}$

$= 0{,}96980262$, und das mit $\frac{1}{\zeta} = \frac{2}{7}$ multiplicirt giebt $\frac{1 - e^{-\zeta}}{\zeta} = 0{,}27708646$ und $P = 1 -$

$\frac{1 - e^{-\zeta}}{\zeta} = 0{,}72291354$. Daraus findet man ferner $\frac{2}{\zeta} P = 0{,}41309345$, und $Q = 1 - \frac{2}{\zeta}$ $P = 0{,}58690655$. Eeben dieſe Rechnung weiter fortgeſetzt giebt folgende Werthe

$$R = 1 - \frac{3}{\zeta} Q \qquad W = 1 - \frac{7}{\zeta} V$$

$$S = 1 - \frac{4}{\zeta} R \qquad X = 1 - \frac{8}{\zeta} W$$

$$T = 1 - \frac{5}{\zeta} S \qquad Y = 1 - \frac{9}{\zeta} X$$

$$V = 1 - \frac{6}{\zeta} T \qquad Z = 1 - \frac{10}{\zeta} Y.$$

Bezeichnet man die nun weiter folgenden Coefficienten

enten mit den Buchſtaben p, q, r, s, u. ſ. f., ſo findet man weiter p

$$p = 1 - \frac{11}{\zeta} Z \qquad r = 1 - \frac{13}{\zeta} q$$

$$q = 1 - \frac{12}{\zeta} p \qquad s = 1 - \frac{14}{\zeta} r, \text{ u. ſ. f.}$$

Bey den Rechnungen aus dieſen Formuln iſt aber noch folgendes zu bemerken. Jn mehr Coefficienten man zu ſuchen nöthig findet, deſto ſchärfer müſſen die vorhergehenden ſchon gefunden ſeyn, um die folgenden daraus herzuleiten. Der folgende Coefficient q, der zur Potenz $\mu^{\nu+1}$ gehört, iſt überhaupt $= p - \frac{\nu+1}{\zeta} p$, wenn $p = 1 - \frac{\nu}{\zeta} Z$ zur Potenz μ^{ν} gehörte. Die Brüche $\frac{\nu}{\zeta}, \frac{\nu+1}{\zeta}$ wachſen, weil ζ einerley bleibt, hingegen müſſen z, p, q abnehmen: wofern alſo Z nur um etwas weniges zu groß oder zu klein angenommen, und die Zahl ν ſchon etwas groß iſt; ſo kann das Product $\frac{\nu}{\zeta} Z$ ſchon um etwas erhebliches zu klein oder zu groß ausfallen, da dann der Coefficient p im erſten Fall zu groß, im lezten Fall zu klein ausfällt, und zwar ſo, daß der Fehler ſchon erheblicher iſt, als er vorher bey dem Coefficienten Z war. Dieſemnach kann er bey dem Coefficient q noch erheblicher ausfallen, und die Fehler können ſich ſo häufen, daß zulezt das Product $\frac{\nu}{\zeta}$ oder $\frac{\nu+1}{\zeta}$ bey dieſer fehler-

haften Rechnung gröſſer als 1 wird, welches doch nie ſeyn muß, weil kein Coefficient negativ werden kann. Dieſen Fehlern weicht man gänzlich aus, wenn man die Rechnung rückwärts ſo anſtellet.

Der Coefficient $s = 1 - \frac{14}{\zeta} r$ gehört zu μ^{14}, und es iſt

$$s = \frac{\zeta}{15} - \frac{\zeta^2}{15.16} + \frac{\zeta^3}{15.16.17} - \frac{\zeta^4}{15\ldots18} + \frac{\zeta^5}{15\ldots19} - \frac{\zeta^6}{15\ldots20} \ldots\ldots$$

Weil dieſe Reihe ſich ſchon ziemlich ſchnell nähert, ſo ſuche man s vermittelſt dieſer Reihe $\zeta = 3\frac{1}{2}$ geſetzt, ſo hat man hiernächſt

$$r = \frac{\zeta}{14}(1 - s) \qquad V = \frac{\zeta}{7}(1 - W)$$

$$q = \frac{\zeta}{13}(1 - r) \qquad T = \frac{\zeta}{6}(1 - V)$$

$$p = \frac{\zeta}{12}(1 - q) \qquad S = \frac{\zeta}{5}(1 - T)$$

$$z = \frac{\zeta}{11}(1 - p) \qquad R = \frac{\zeta}{4}(1 - S)$$

$$Y = \frac{\zeta}{10}(1 - Z) \qquad Q = \frac{\zeta}{3}(1 - R)$$

$$X = \frac{\zeta}{9}(1 - Y) \qquad P = \frac{\zeta}{2}(1 - Q)$$

$$W = \frac{\zeta}{8}(1 - X) \qquad e^{-\zeta} = 1 - \zeta(1 - P).$$

Auf ſo viele Decimalſtellen nun s richtig gefunden iſt,

iſt, auf eben ſo viele Decimalſtellen, werden alle übrige angezeigte Werthe ebenfalls richtig gefunden. Die Rechnung ſelbſt giebt folgende Zahlen

$+\frac{\zeta}{15} = 0{,}2333333333$	$-\frac{\zeta}{15.16} = 0{,}0510416666$
$\frac{\zeta}{15.16} = 0{,}0105085666$	$-\frac{\zeta}{15\ldots18} = 0{,}0020433324$
$\frac{\zeta}{15\ldots19} = 0{,}0003764033$	$-\frac{\zeta}{15\ldots20} = 0{,}00006537057$
$\frac{\zeta}{15\ldots21} = 0{,}00001089509$	$-\frac{\zeta}{15\ldots22} = 0{,}0000017333$
$\frac{\zeta}{15\ldots23} = 0{,}0000006376$	$-\frac{\zeta}{15\ldots24} = 0{,}0000003846$
$\frac{\zeta}{15\ldots25} = 0{,}0000000538$	$-\frac{\zeta}{15\ldots26} = 0{,}0000000072$
$\frac{\zeta}{15\ldots27} = 0{,}0000000009$	$-\frac{\zeta}{15\ldots28} = 0{,}0000000001$
$s = +\,0{,}2442294675$	$-\;0{,}0531521421$

oder $s = 0{,}1910773254$, und daraus findet man weiter nicht allein $t = 1 - \frac{15}{\zeta} \cdot s = 0{,}18109717$, ſondern auch rückwärts

$$\begin{aligned}
r &= 0{,}20223066865 \\
q &= 0{,}21478405075 \\
p &= 0{,}22902131645 \\
z &= 0{,}24531139931 \\
Y &= 0{,}26414101024 \\
X &= 0{,}28616738490 \\
W &= 0{,}31230176910 \\
V &= 0{,}34384911544 \\
T &= 0{,}38275468298
\end{aligned}$$

$$S = 0{,}432071721909$$
$$R = 0{,}496937243337$$
$$Q = 0{,}586906549443$$
$$P = 0{,}722913538474$$
$$e^{-\zeta} = 0{,}030197384659$$

Die lezten drey Zahlen kommen mit den vorhin für $e^{-\zeta}$, P, und Q ſchon gefundenen überein, welches zugleich zur Probe von der Richtigkeit der Rechnung dient.

389. §.

Man kann eben ſo die im 387 §. mit P′, Q′, R′, u. ſ. f. bezeichneten Zahlen ſuchen. Es iſt nemlich

$$P' = \frac{e^{\zeta} - (1 + \zeta)}{\zeta} \qquad X' = \frac{8}{\zeta} W' - 1$$

$$Q' = \frac{2}{\zeta} P' - 1 \qquad Y' = \frac{9}{\zeta} X' - 1$$

$$R' = \frac{3}{\zeta} Q' - 1 \qquad Z' = \frac{10}{\zeta} Y' - 1$$

$$S' = \frac{4}{\zeta} R' - 1 \qquad p' = \frac{11}{\zeta} Z' - 1$$

$$T' = \frac{5}{\zeta} S' - 1 \qquad q' = \frac{12}{\zeta} p' - 1$$

$$V' = \frac{6}{\zeta} T' - 1 \qquad r' = \frac{13}{\zeta} q' - 1$$

$$W' = \frac{7}{\zeta} V' - 1 \qquad s' = \frac{14}{\zeta} r' - 1,$$

alſo

alſo umgekehrt

$$s' = \frac{\zeta}{15} + \frac{\zeta^2}{15.16} + \frac{\zeta^3}{15\ldots17} + \frac{\zeta^4}{15\ldots18} + \frac{\zeta^5}{15\ldots19} + \frac{\zeta^6}{15\ldots20} + \ldots$$

$$r' = \frac{\zeta}{14}(1 + s')$$

$$q' = \frac{\zeta}{13}(1+r') \qquad V' = \frac{\zeta}{7}(1 + W')$$

$$p' = \frac{\zeta}{12}(1+q') \qquad T' = \frac{\zeta}{6}(1 + V')$$

$$z' = \frac{\zeta}{11}(1+p') \qquad S' = \frac{\zeta}{5}(1 + T')$$

$$Y' = \frac{\zeta}{10}(1+z') \qquad R' = \frac{\zeta}{4}(1 + S')$$

$$X' = \frac{\zeta}{9}(1+Y') \qquad Q' = \frac{\zeta}{3}(1 + R')$$

$$W' = \frac{\zeta}{8}(1+X') \qquad P' = \frac{\zeta}{2}(1 + Q')$$

und $e^z = \zeta . P' + 1 + \zeta$. Die Rechnung ſelbſt giebt

$t' = 0,27449261$
$s' = 0,29738161$
$r' = 0,32434540$
$q' = 0,35655453$
$p' = 0,39566174$
$z' = 0,44407419$
$Y' = 0,50425966$
$X' = 0,58544343$
$W' = 0,69363150$

V′ =

$$V' = 0{,}84681575$$
$$T' = 0{,}07730919$$
$$S' = 1{,}45411643$$
$$R' = 2{,}14735188$$
$$Q' = 3{,}67191052$$
$$P' = 8{,}17584342$$
$$e^{\zeta} = 33{,}11545196$$

Die letzte Zahl giebt auch folgende Rechnung. Es iſt

$$\text{Brigg. Log. } e = 0{,}4342945$$
$$\times 3\tfrac{1}{2}$$
$$1{,}3028835$$
$$2171472$$
$$\text{Brigg. Log. } e^{\zeta} = 1{,}5200307$$

alſo $e^{\zeta} = 33{,}11545$, wie vorhin.

Noch multiplicire man die hier gefundenen Zahlen mit $e^{-2\zeta} = 0{,}000912$, ſo findet man

$$P' \cdot e^{-2\zeta} = 0{,}00745635$$
$$Q' \cdot e^{-2\zeta} = 0{,}00334878$$
$$R' \cdot e^{-2\zeta} = 0{,}00195837$$
$$S' \cdot e^{-2\zeta} = 0{,}00132614$$
$$T' \cdot e^{-2\zeta} = 0{,}00098242$$
$$V' \cdot e^{-2\zeta} = 0{,}00077192$$
$$W' \cdot e^{-2\zeta} = 0{,}00063257$$
$$X' \cdot e^{-2\zeta} = 0{,}00053391$$
$$Y' \cdot e^{-2\zeta} = 0{,}00045986$$

$$Z' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}00040499$$
$$p' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}00036083$$
$$q' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}00032516$$
$$r' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}00029579$$
$$s' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}00027120$$
$$t' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}00025033$$

Demnach laſſen ſich nun die erſten 15 Coefficienten der am Ende des 387 §. gefundenen Reihe aus den ſchon berechneten Zahlen leicht finden. Es wird nemlich

$$1 - e^{-2\zeta} = 0{,}99908812$$
$$P - P' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}71545719$$
$$Q + Q' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}59025533$$
$$R - R' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}49497887$$
$$S + S' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}43339786$$
$$T - T' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}38177226$$
$$V + V' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}34462103$$
$$W - W' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}31166920$$
$$X + X' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}28670129$$
$$Y + Y' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}26368115$$
$$Z + Z' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}24571639$$
$$p - p' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}22866049$$
$$q + q' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}21510921$$

$r - r'$

$$r - r' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}20193488$$

$$s + s' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}19134852$$

$$t - t' \,.\, e^{-2\zeta} = 0{,}18084684$$

Endlich hat man noch

$$\tfrac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} = 0{,}375$$

$$\frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} = 0{,}3125$$

$$\frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8} = 0{,}2734375$$

$$\frac{1 \,.\, 3 \ldots 9}{1 \,.\, 4 \ldots 10} = 0{,}24609375$$

$$\frac{1 \,.\, 3 \ldots 11}{2 \,.\, 4 \ldots 12} = 0{,}22558594$$

$$\frac{1 \,.\, 3 \ldots 13}{2 \,.\, 4 \ldots 14} = 0{,}20947265$$

$$\frac{1 \,.\, 3 \ldots 15}{2 \,.\, 4 \ldots 16} = 0{,}19638061$$

$$\frac{1 \,.\, 3 \ldots 17}{2 \,.\, 4 \ldots 18} = 0{,}18547058$$

$$\frac{1 \,.\, 3 \ldots 19}{2 \,.\, 4 \ldots 20} = 0{,}17619705$$

$$\frac{1 \,.\, 3 \ldots 21}{2 \,.\, 4 \ldots 22} = 0{,}16818809$$

$$\frac{1 \,.\, 3 \ldots 23}{2 \,.\, 4 \ldots 24} = 0{,}16118026$$

1.3

$$\frac{1.3\ldots25}{2.4\ldots26} = 0{,}15498101$$

$$\frac{1.3\ldots27}{2.4\ldots28} = 0{,}14944598$$

$$\frac{1.3\ldots29}{2.4\ldots30} = 0{,}14446445$$

alſo findet man die geſuchte Zahl

$$\frac{s}{K} = 0{,}99908812 + 0{,}35772859.\mu$$
$$+0{,}22134575.\mu^2 \quad +0{,}15468089.\mu^3$$
$$+0{,}11850722.\mu^4 \quad +0{,}09395176.\mu^5$$
$$+0{,}07774165.\mu^6 \quad +0{,}06528607.\mu^7$$
$$+0{,}05630257.\mu^8 \quad +0{,}04890509.\mu^9$$
$$+0{,}04329450.\mu^{10} \quad +0{,}03845796.\mu^{11}$$
$$+0{,}03467135.\mu^{12} \quad +0{,}03129607.\mu^{13}$$
$$+0{,}02859626.\mu^{14} \quad +0{,}02612593.\mu^{15} + \ldots$$

Um daraus s zu finden, nimmt man $\mu =$
$\frac{2n\zeta}{\cot\gamma^2 + 2n\zeta}$ (385 §.) $= \frac{2n\zeta\,\mathrm{tg}\gamma^2}{1 + 2n\zeta\,\mathrm{tg}\gamma^2}$ und
$K = \frac{k\,\mathrm{coſec}\gamma}{\sqrt{(\cot\gamma^2 + 2n\zeta)}} = \frac{k\,\mathrm{ſec}\gamma}{\sqrt{(1 + 2n\zeta\,\mathrm{tg}\,\gamma^2)}}$.
(384 §.)

390. §.

Wenn $\gamma = 85°$ iſt, ſo hat man (387 §.)

$\mu = 0{,}52330166$	$\mu^7 = 0{,}01074643$
$\mu^2 = 0{,}27384462$	$\mu^8 = 0{,}00562362$
$\mu^3 = 0{,}14330334$	$\mu^9 = 0{,}00294284$
$\mu^4 = 0{,}07499087$	$\mu^{10} = 0{,}00153999$
$\mu^5 = 0{,}03924284$	$\mu^{11} = 0{,}00080587$
$\mu^6 = 0{,}02053584$	$\mu^{12} = 0{,}00042171$

 $\mu^{13} =$

$\mu^{13} = 0{,}00022068$ $\mu^{15} = 0{,}00006041$
$\mu^{14} = 0{,}00011548$

Weiter iſt $K = \frac{k \,.\, \mathrm{coſec}\,\gamma}{\sqrt{(\cot\gamma^2 + 2n\zeta)}} = \frac{k \,.\, 1{,}0038198}{0{,}1267052}$
$= 7{,}922483 \,.\, k$; weil nun k ohngefehr 4000 Toiſen groß iſt, ſo beträgt K noch nicht 40000 Toiſen, und es kann genügen, wenn die Zahl $\frac{s}{K}$ nur bis auf $\frac{1}{1000000}$ richtig gefunden wird. Nach angeſtellter Rechnung findet man

$$
\begin{aligned}
\frac{s}{K} = \; & 0{,}99908812 \\
+ & 0{,}18719996 \\
+ & 0{,}06061434 \\
+ & 0{,}02216628 \\
+ & 0{,}00888695 \\
+ & 0{,}00368693 \\
+ & 0{,}00159648 \\
+ & 0{,}00070159 \\
+ & 0{,}00031662 \\
+ & 0{,}00014391 \\
+ & 0{,}00006667 \\
+ & 0{,}00003099 \\
+ & 0{,}00001462 \\
+ & 0{,}00000690 \\
+ & 0{,}00000330 \\
+ & 0{,}00000157
\end{aligned}
$$

alſo $\frac{s}{K} = 1{,}28452523$

und $s = 7{,}922483 \,.\, 1{,}284525 \,.\, k$, oder
$s = 10{,}204624 \,.\, k$.

391. §.

391. §.

Das Differential $ds = \frac{k d\delta\ \text{coſec}\gamma}{\sqrt{(\cot\gamma^2 + 2\lambda)}} = \frac{k d\delta\ \text{coſec}\gamma}{\sqrt{(\cot\gamma^2 - 2nl\delta)}}$ (384 §.) läßt ſich auch ſo integriren. Man ſetze $l\delta = -z$, und es ſey nun $z = \zeta$, wenn δ am kleinſten iſt, ſo daß $D = e^{-\zeta}$ die Dichtigkeit der Luft in der höchſten Gegend der Atmoſphäre, mithin hier $\zeta = 7$ iſt; ſo hat man $\delta = e^{-z}$, $d\delta = -e^{-z}\, dz$, und $ds = -\frac{k \,.\, e^{-z}\, dz\ \text{coſec}\gamma}{\sqrt{(\cot\gamma^2 + 2nz)}}$. Ferner ſey $\frac{k\ \text{coſec}\gamma}{\sqrt{2n}} = K$ und $\frac{\cot\gamma^2}{2n} = m$, ſo iſt auch $ds = -K \,.\, \frac{e^{-z}\, dz}{\sqrt{(m+z)}}$. Um hievon das Integral zu finden, ſetze man noch $m + z = y$, alſo $z = y - m$, ſo iſt $ds = -K \,.\, \frac{e^{m} \,.\, e^{-y}\, dy}{\sqrt{y}}$; und wenn man nach der Regel des 385 §. integrirt, ſo findet man $s =$

$$C - K \,.\, e^{m} \left(2\, e^{-y} \,.\, y^{\frac{1}{2}} + \frac{2 \,.\, 2}{3} e^{-y} \,.\, y^{\frac{3}{2}} + \frac{2 \,.\, 2 \,.\, 2}{3 \,.\, 5} e^{-y} \,.\, y^{\frac{5}{2}} + \frac{2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2}{3 \,.\, 5 \,.\, 7} e^{-y} \,.\, y^{\frac{7}{2}} + \frac{2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2}{3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 9} e^{-y} \,.\, y^{\frac{2}{9}} \ldots\right)$$

Wenn $\delta = D = e^{-\zeta}$, alſo $z = \zeta$ iſt, ſo muß

dies Integral verſchwinden: alsdenn iſt $y = m + \zeta$ und man erhält

$$C = 2K \cdot e^{-\zeta}\left((m+\zeta)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}(m+\zeta)^{\frac{3}{2}} + \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 5}(m+\zeta)^{\frac{5}{2}} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 5 \cdot 7}(m+\zeta)^{\frac{7}{2}} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}(m+\zeta)^{\frac{9}{2}} \ldots\right)$$

Nach der Integration muß $\delta = 1$, alſo $z = 0$, und $y = m$ geſetzt werden: mithin findet man

$$\frac{s}{2K} = (m+\zeta)^{\frac{1}{2}} e^{-\zeta}\left(1 + \frac{2}{3}(m+\zeta) + \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 5}(m+\zeta)^2 + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 5 \cdot 7}(m+\zeta)^3 + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}(m+\zeta)^4 + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}(m+\zeta)^8 + \ldots\right)$$

$$- m^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{2}{3}m + \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3}m^2 + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 5 \cdot 7}m^3 + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}m^4 \ldots\right)$$

und dieſe Reihe kann man auch ſo ausdrücken

$$\frac{s}{2K} = (m+\zeta)^{\frac{1}{2}} e^{-\zeta}\left(1 + \frac{2m+2\zeta}{3} + \frac{(2m+2\zeta)^2}{3 \cdot 5} + \frac{(2m+2\zeta)^3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{(2m+2\zeta)^4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{(2m+2\zeta)^5}{2.5.7.9.11} + \ldots\right)$$

$$- m^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{2m}{3} + \frac{(2m)^2}{3 \cdot 5} + \frac{(2m)^3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{(2m)^4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \ldots\right).$$

Weil

Weil $2m + 2\zeta = 2\zeta\left(1 + \frac{m}{\zeta}\right)$ iſt, ſo nehme man $1 + \frac{m}{\zeta} = \xi$ an, ſo iſt

$$\frac{s}{2K} = (m+\zeta)^{\frac{1}{2}} e^{-\zeta}\left(1 + \frac{2\zeta}{3}.\xi + \frac{(2\zeta)^2}{3.5}.\xi^2 + \frac{(2\zeta)^3}{3.5.7}.\xi^3 + \frac{(2\zeta)^4}{3.5.7.9}.\xi^4 + \frac{(2\zeta)^5}{3.5.7.9.11}.\xi^5 + \ldots\right)$$

$$- m^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{2m}{3} + \frac{(2m)^2}{3.5} + \frac{(2m)^3}{3.5.7} + \frac{(2m)^4}{3.5.7.9} + \ldots\right)$$

Für $\gamma = 90°$ iſt $m = 0$, alſo $\xi = 1$, und alsdann nähert ſich die Reihe zwar nur langſam, doch läßt ſich vermittelſt derſelben die Zahl $\frac{s}{2K}$ finden, ohne daß die Rechnung eben ſo gar ſehr weitläuftig wird.

392. §.

Man ſetze alſo $\zeta = 7$, und $2\zeta = 14 = \varepsilon$, ſo findet man

$$e^{-\zeta} = 0{,}00091188$$

$$\frac{\varepsilon}{3}.e^{-\zeta} = 0{,}00425544 = A$$

$$\frac{\varepsilon^2}{3.5}.e^{-\zeta} = 0{,}01191523 = B$$

$$\frac{\varepsilon^3}{3\cdot5\cdot7}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}02383046 = C$$

$$\frac{\varepsilon^4}{3\cdot5\cdot7\cdot9}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}03706960 = D$$

$$\frac{\varepsilon^5}{3\cdot5\ldots11}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}04717949 = E$$

$$\frac{\varepsilon^6}{3\cdot5\ldots13}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}05080868 = F$$

$$\frac{\varepsilon^7}{3\cdot5\ldots15}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}04742143 = G$$

$$\frac{\varepsilon^8}{3\cdot5\ldots17}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}03905294 = H$$

$$\frac{\varepsilon^9}{3\cdot5\ldots19}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}02877585 = I$$

$$\frac{\varepsilon^{10}}{3\cdot5\ldots21}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}01918390 = K$$

$$\frac{\varepsilon^{11}}{3\cdot5\ldots23}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}01167716 = L$$

$$\frac{\varepsilon^{12}}{3\cdot5\ldots25}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}00653921 = M$$

$$\frac{\varepsilon^{13}}{3\cdot5\ldots27}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}00339070 = N$$

$$\frac{\varepsilon^{14}}{3\cdot5\ldots29}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}00163689 = O$$

$$\frac{\varepsilon^{15}}{3\cdot5\ldots31}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}00073924 = P$$

$$\frac{\varepsilon^{16}}{3\cdot5\ldots33}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}00031366 = Q$$

ε^{17}

$$\frac{\varepsilon^{17}}{3\cdot5\cdots35}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}00012546 = R$$

$$\frac{\varepsilon^{18}}{3\cdot5\cdots37}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}00004747 = S$$

$$\frac{\varepsilon^{19}}{3\cdot5\cdots39}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}00001704 = T$$

$$\frac{\varepsilon^{20}}{3\cdot5\cdots41}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}00000582 = U$$

$$\frac{\varepsilon^{21}}{3\cdot5\cdots43}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}00000189 = V,$$

$$\frac{\varepsilon^{22}}{3\cdot5\cdots45}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}000000588 = W$$

$$\frac{\varepsilon^{23}}{3\cdot5\cdots47}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}000000175 = X$$

$$\frac{\varepsilon^{24}}{3\cdot5\cdots49}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}000000050 = Y,$$

$$\frac{\varepsilon^{25}}{3\cdot5\cdots51}\cdot e^{-\zeta} = 0{,}000000014 = Z$$

Die Summe aller dieſer Zahlen iſt $= 0{,}33490026$; und wenn man mit $\zeta^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7} = 2{,}64575131$ multiplicirt, ſo findet man für den Fall $\gamma = 90°$ die Zahl $\frac{s}{2K} = 0{,}88606280$. Ferner iſt in eben dieſem Fall $K = \frac{k}{\sqrt{2n}}$, alſo $2K = \frac{k}{\sqrt{\frac{1}{2}n}}$, und $\sqrt{\frac{1}{2}n} = \sqrt{0{,}0006} = 0{,}0244949$, alſo $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}n}} = 40{,}82482476$; demnach findet man für dieſen

 Fall

Fall die Linie $s = 36{,}1733584 \,.\, k$. Vermöge dieſer Rechnung alſo muß das Licht, wenn es von der Sonne, dem Mond, oder einem andern Himmelskörper im Horinzont kommt, 36 mahl mehr Luft durchdringen, als in dem Fall, wenn derſelbe Himmelskörper im Zenith ſtehet: denn für $\gamma = 0$ war $s = k$. (386 §.)

Die Rechnung iſt ſchärfer für dieſen beſondern Fall $\gamma = 90°$ geführt, als an ſich nöthig wäre, weil weder die Vorausſetzung $\zeta = 7$, noch auch $n = 0{,}0012$ ſicher genug iſt: indeſſen kann man die nun gefundenen Zahlen auch als Coefficienten brauchen, wenn man für einen andern Winkel zwiſchen 90° und 85° die Rechnung anſtellen will. Man darf alsdenn nur die Potenzen von $\xi = 1 + \frac{m}{\zeta}$ ſuchen, und ſelbige nach der Ordnung in dieſe Coefficienten multipliciren.

393. §.

In dem Fall $\gamma = 89°$ iſt $\cot\gamma = 0{,}0174524$, $\cot\gamma^2 = 0{,}00030456$, alſo $\frac{\cot\gamma^2}{2n} = 0{,}1269 = m$, und $\xi = 1 + \frac{m}{\zeta} = 1{,}0181286$. Hievon ſind die Potenzen

ξ	$= 1{,}0181286$	ξ^7	$= 1{,}1340138$
ξ^2	$= 1{,}0365858$	ξ^8	$= 1{,}1545718$
ξ^3	$= 1{,}0553776$	ξ^9	$= 1{,}1755025$
ξ^4	$= 1{,}0745101$	ξ^{10}	$= 1{,}1968128$
ξ^5	$= 1{,}0939894$	ξ^{11}	$= 1{,}2185093$
ξ^6	$= 1{,}1138218$	ξ^{12}	$= 1{,}2405972$

$\xi^{13} = 1{,}2630874 \quad \xi^{16} = 1{,}3330360$
$\xi^{14} = 1{,}2859874 \quad \xi^{17} = 1{,}3572022$
$\xi^{15} = 1{,}3092985 \quad \xi^{18} = 1{,}3818063$

Weil der Coefficient S im 392 §. ſchon kleiner als $\frac{1}{10000}$ iſt, ſo könnten dieſe 18 Potenzen genügen; um indeſſen für dieſen Winkel die Rechnung noch ſchärfer anzuſtellen, genügt es für die folgenden Potenzen nur die erſten vier Decimalſtellen zu ſuchen, und man findet

$\xi^{19} = 1{,}4068 \quad \xi^{22} = 1{,}4846$
$\xi^{20} = 1{,}4323 \quad \xi^{23} = 1{,}5113$
$\xi^{21} = 1{,}4582$ u. ſ. f.

Hiernächſt geben ſich folgende Producte

$\epsilon - \xi = 0{,}0009119$
$A\xi = 0{,}0043325$
$B\xi^2 = 0{,}0123511$
$C\xi^3 = 0{,}0251500$
$D\xi^4 = 0{,}0398316$
$E\xi^5 = 0{,}0516138$
$F\xi^6 = 0{,}0565918$
$G\xi^7 = 0{,}0537765$
$H\xi^8 = 0{,}0450993$
$I\xi^9 = 0{,}0338260$
$K\xi^{10} = 0{,}0229605$
$L\xi^{11} = 0{,}0142286$
$M\xi^{12} = 0{,}0081125$
$N\xi^{13} = 0{,}0042827$
$O\xi^{14} = 0{,}0021050$
$P\xi^{15} = 0{,}0009678$
$Q\xi^{16} = 0{,}0004160$
$R\xi^{17} = 0{,}0001702$
$S\xi^{18} = 0{,}0000656$

$$T\zeta^{19} = 0{,}0000239$$
$$U\zeta^{20} = 0{,}0000086$$
$$V\zeta^{21} = 0{,}0000029$$
$$W\zeta^{22} = 0{,}0000009$$
$$X\zeta^{23} = 0{,}0000003$$

Die Summe 0,3768300 ſey $= S$, und man multiplicire ſie mit $\surd(m + \zeta) = \surd\ 7{,}1269 = 2{,}6696254$, ſo findet man $S\ \surd(m + \zeta) = 1{,}005995$. Ferner ſuche man folgende Zahlen

$$1 = 1{,}0000000$$
$$\frac{2m}{3} = 0{,}0846000$$
$$\frac{(2m)^2}{3 \cdot 5} = 0{,}0042943$$
$$\frac{(2m)^3}{3 \cdot 5 \cdot 7} = 0{,}0001557$$
$$\frac{(2m)^4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} = 0{,}0000044$$
$$\frac{(2m)^5}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} = 0{,}0000001$$

Die Summe 1,0890545 ſey $= \Sigma$, und man multiplicire ſie mit $\surd m = 0{,}3562302$, ſo findet man $\Sigma . \surd m = 0{,}3879541$, und ferner $S . \surd(m + \zeta) - \Sigma . \surd m = 0{,}618041$. Weiter für $\gamma = 89°$ iſt $2 . \operatorname{coſec}\gamma = 2{,}0003046$, alſo $2K =$

$$\frac{2\ \operatorname{coſec}\gamma}{\surd 2n} . k = \frac{2{,}0003046}{489898} = 40{,}831042 . k,$$

und das giebt $s = 0{,}618041 . 2K = 25{,}235257 . k$.

Um

Um noch eine Anwendung von der gefundenen Reihe auf einen beſondern Fall zu machen, ſetze ich auch die Rechnung für den Fall $\gamma = 86^\circ$ hieher. Bey dieſer Vorausſetzung iſt $\cot\gamma = 0{,}0699268$,

$\cot\gamma^2 = 0{,}0048897$, und $m = \frac{\cot\gamma^2}{2n} = 2{,}037375$,

alſo $\frac{m}{\zeta} = 0{,}29105357$, und $\xi = 1 + \frac{m}{\zeta} = 1{,}29105357$. Die Potenzen dieſer Zahl ſucht man am bequemſten vermittelſt der Logarithmen, und findet auf ſolche Art folgende Zahlen:

$\xi = 1{,}291053$		$\xi^{13} = 27{,}686926$	
$\xi^2 = 1{,}666819$		$\xi^{14} = 35{,}745291$	
$\xi^3 = 2{,}151952$		$\xi^{15} = 46{,}149074$	
$\xi^4 = 2{,}778285$		$\xi^{16} = 59{,}580914$	
$\xi^5 = 3{,}586914$		$\xi^{17} = 76{,}922135$	
$\xi^6 = 4{,}630897$		$\xi^{18} = 99{,}310600$	
$\xi^7 = 5{,}978735$		$\xi^{19} = 128{,}215327$	
$\xi^8 = 7{,}718867$		$\xi^{20} = 165{,}532800$	
$\xi^9 = 9{,}965470$		$\xi^{21} = 213{,}711688$	
$\xi^{10} = 12{,}865956$		$\xi^{22} = 275{,}913189$	
$\xi^{11} = 16{,}610634$		$\xi^{23} = 356{,}218574$	
$\xi^{12} = 21{,}445434$		$\xi^{24} = 459{,}897219$	
		$\xi^{25} = 593{,}751955$	

Dieſe Potenzen geben ferner folgende Producte:

$$e^{-\zeta} = 0{,}000912$$
$$A \cdot \xi = 0{,}005492$$
$$B \cdot \xi^2 = 0{,}019857$$
$$C \cdot \xi^3 = 0{,}051278$$
$$D \cdot \xi^4 = 0{,}012985$$

E . ξ^5

E	. ζ^5	=	0,169223
F	. ζ^6	=	0,235284
G	. ζ^7	=	0,283515
H	. ζ^8	=	0,301442
I	. ζ^9	=	0,286763
K	. ζ^{10}	=	0,246817
L	. ζ^{11}	=	0,193960
M	. ζ^{12}	=	0,140229
N	. ζ^{13}	=	0,093857
O	. ζ^{14}	=	0,058513
P	. ζ^{15}	=	0,034102
Q	. ζ^{16}	=	0,018647
R	. ζ^{17}	=	0,009230
S	. ζ^{18}	=	0,004667
T	. ζ^{19}	=	0,002179
U	. ζ^{20}	=	0,000993
V	. ζ^{21}	=	0,000426
W	. ζ^{22}	=	0,000165
X	. ζ^{23}	=	0,000061
Y	. ζ^{24}	=	0,000020
Z	. ζ^{25}	=	0,000007

und die Summe = 2260624 = S mit $\sqrt{(m+\zeta)}$ = 3,006223 multiplicirt, giebt S . $\sqrt{(m+\zeta)}$ = 6,795938. Ferner findet man

$$1 = 1,000000$$

$$\frac{2m}{3} = 1,358250$$

$$\frac{(2m)^2}{3 \cdot 5} = 1,106905$$

$$\frac{(2m)^3}{3 \cdot 5 \cdot 7} = 0,644337$$

$(2m)^4$

$$\frac{(2m)^4}{3\ldots9} = 0{,}291723$$

$$\frac{(2m)^5}{3\ldots11} = 0{,}108063$$

$$\frac{(2m)^6}{3\ldots13} = 0{,}033841$$

$$\frac{(2m)^7}{3\ldots15} = 0{,}009192$$

$$\frac{(2m)^8}{3\ldots17} = 0{,}002203$$

$$\frac{(2m)^9}{3\ldots19} = 0{,}000472$$

$$\frac{(2m)^{10}}{3\ldots21} = 0{,}000091$$

$$\frac{(2m)^{11}}{3\ldots23} = 0{,}000016$$

$$\frac{(2m)^{12}}{3\ldots25} = 0{,}000002$$

Die Summe $= 4{,}555095 = \Sigma$
mit $\sqrt{m} = 1{,}427366$
multiplicirt giebt $\Sigma . \sqrt{m} = 6{,}501785$, und man findet $S . \sqrt{(m+\zeta)} - \Sigma . \sqrt{m} = \frac{s}{2K}$ (391 §.) $= 0{,}294153$. Weiter iſt $2K = \frac{2k \operatorname{coſec} \gamma}{\sqrt{2n}}$, und $\gamma = 86°$, alſo $2 \operatorname{coſec}\gamma = 2{,}0048838$; ferner $2n = 0{,}0024$, und $\sqrt{2n} = 0{,}048989$, alſo

alſo $\frac{2\,\text{coſec}.\,\gamma}{\sqrt{2n}} = \frac{2,0048838}{489898} = 40,924531$, mithin $s = 0,294153 \cdot 40,924531 \cdot k$, oder $s = 12,038073 \cdot k$.

394. §.

Herr Bouguer giebt Traité d'optique Liv. III. Sect. V. pag. 325. ſqq. eine Auflöſung der Aufgabe des 380. §., die mit der hier vorgetragenen zwar einerley Reſultate giebt, ſeine Reihen haben aber nicht die bequeme Form, welche ich hier den Reihen am Ende des 389 §. und im 391 §. zu geben geſucht habe. Die Auflöſung des Hn. Bouguer giebt den Reihen eine ſolche Form, wobey das Geſetz des Fortgangs nicht ſo deutlich in die Augen fällt, daß man mit Sicherheit wüſte, wie viele Glieder man berechnen muß, um das geſuchte richtig genug zu finden. Weil übrigens vermittelſt der bisher berechneten Formuln für jeden gegebenen Winkel γ die Linie s gefunden werden kann, ſo iſt nunmehro die Aufgabe des 380 §. in ihrem ganzen Umfange aufgelößt, und man hat die geſuchte Lichtverminderung für jeden Winkel γ vermittelſt der Gleichung $l\frac{1}{v} = \frac{s}{h}\, l\frac{1}{V}$, ſobald nur für einen beſondern Fall bekannt iſt, in welchem Verhältniß 1 : V das Licht abnehme, wenn es in Luft von gleichförmiger und einerley Dichtigkeit mit der untern Luft an der Erdfläche um die bekannte Tiefe h hinein dringt.

Im Jahr 1725 am 23 November beobachtete H. Bouguer Abends den Vollmond in der Höhe

von

von 19° 16′ über dem Horizont, und am folgenden Morgen aufs neue in der Höhe von 66° 11′. Bey der erſten Beobachtung fand er die vom Mondenlicht herrührende Erleuchtung einer weiſſen Fläche ſo groß, als die Erleuchtung einer eben ſo weiſſen Fläche von vier Wachskerzen in der Entfernung von 50 Fuß. Bey der zweyten Beobachtung erleuchteten dieſelben Kerzen in der Entfernung von 41 Fuß ſo ſtark als der Vollmond; alſo verhielten ſich die Erleuchtungen, wie $41^2 : 50^2 = 1681 : 2500$ beynahe wie 2 : 3, und zu dieſen Erleuchtungen gehörten die Winkel $= \gamma = 70°$ 44′, und $\gamma = 23°$ 49′. (Traité d'optique Liv. I. Sect. II. Art IX. pag. 79 ſqq.

Aus dieſen Erfahrungen ſchließt Hr. Bouguer folgendes. Er nimmt $k = 3911$ Toiſen an, und findet für den Winkel $\gamma = 23°$ 49′ die Linie $s = 1{,}093071 \,.\, k\, 4275$ Toiſen für den Winkel $\gamma = 70°$ 44′ aber $s = 3{,}002813 \,.\, k = 11744$ Toiſen. Wenn nun für den Winkel $\gamma = 23°$ 49′ das Verhältniß der Lichtverminderung $= 1 : v$ iſt, ſo muß $s = 4275$, alſo $l\,\frac{1}{v} = \frac{4275}{h}\; l\,\frac{1}{V}$ ſeyn. Wenn ferner für den Winkel $\gamma = 70°$ 44′ das Verhältniß der Lichtverminderung $= 1 : v'$ iſt, ſo erhält man eben ſo $l\,\frac{1}{v'} = \frac{11744}{h}\; l\,\frac{1}{V}$, und jene Gleichung von dieſer ſubtrahirt giebt $l\,\frac{v}{v'} = \frac{7469}{h}\; l\,\frac{1}{V}$. Vermöge des Verſuchs iſt $v : v' = 2500 : 1681$, und wenn $h = 7469$ Toiſen angenommen wird, ſo giebt dieſe Gleichung

chung $1 : V = 2500 : 1681$. Hätte es alſo mit den Verſuchen des Hn. Bouguer, ſo wie mit der Verausſetzung $k = 3911$ Toiſen ſeine völlige Richtigkeit; ſo würde das Licht in dem Verhältniß $2500 : 1681$ beynahe $= 3 : 2$ vermindert, wenn es in einer gleichförmig dichten Luft, ſo dichte, wie ſie unten an der Erdfläche iſt, einen Weg von 7469 Toiſen zurück legte.

395. §.

Um die Rechnung nicht auf die unſichere Vorausſetzung $k = 3911$ Toiſen einzuſchränken, behalte man $s = 1,093071 . k$ für das Verhältniß $1 : v$, und $s = 3,002813 . k$ für das Verhältniß $1 : v'$, ſo giebt ſich $l \frac{v}{v'} = \frac{1,909742 . k}{h} l \frac{1}{V}$, und wenn $h = 1,909742 . k$ geſetzt wird, ſo $1 : V = v : v' = 2500 : 1681$; wird dagegen $h = k$ geſetzt, ſo findet man $l \frac{1}{V} = \frac{l\,(v : v')}{1,909742}$. Es iſt aber

$$l\,2500 = 3,3979400$$
$$l\,1681 = 3,2255677$$
$$\text{alſo } l(v : v') = 0,1723723$$

und dieſe Zahl mit 1,909742 dividirt giebt $l \frac{1}{V} = 0,0902526$, alſo $\frac{1}{V} = 1,230984$, und $V = 0,8123$. Wenn demnach das Licht in einer gleichförmig dichten Luft von einer ſolchen Dichtigkeit, wie die natürliche Luft unten an der Erdfläche hat, einen Weg zurück legt, der ſo

groß

groß iſt, als die Höhe k der bis auf die Dichtigkeit der untern Luft zuſammen gedrückten Atmoſphäre, ſo wird es in dem Verhältniß $1 : 0,8123 = 10000 : 8123$, alſo ohngefehr um $\frac{1}{5}$ vermindert, wofern es mit des Hn. Bouguer Verſuchen ſeine völlige Richtigkeit hat: hiemit wäre alſo zugleich die Durchſichtigkeit der untern gleichförmig dichten Luft in ſo ferne bekannt, daß man wüſte, das Licht leide eine Verminderung in dem Verhältniß $1000 : 8123$, wenn es in derſelben einen Weg von ohngefehr 4000 Toiſen zurück legt.

Der XXVII. Abſchnitt.

Fortſetzung dieſer Unterſuchung nach Herrn Lambert.

396. §.

Herr Lambert (Photom. Part. V. Cap. I. §. 877 ſqq. pag. 392 ſqq.) verfährt bey Auflöſung der Aufgabe des 380 §. auf folgende Art. Es war daſelbſt $ds = -\frac{r\delta(1+\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{(\cos\gamma^2 + 2\lambda + \lambda\lambda)}}$, und $l\frac{1}{v} = \frac{s}{h}\, l\frac{1}{V}$. Statt des beſtändigen Factors $\frac{l(1:V)}{h}$ ſchreibe man N, ſo

iſt $-lv = N.ds$, und $\frac{dv}{v} = N . \frac{r\delta(1+\lambda)d\lambda}{\sqrt{(\cos\gamma^2+2\lambda+\lambda\lambda)}}$,

$= N . \frac{r\delta(1+\lambda)\,d\lambda \sec\gamma}{\sqrt{(1+(2\lambda+\lambda\lambda)\sec\gamma^2)}}$, oder auch

$\frac{dv}{v} = N . \frac{r\delta(1+\lambda)\,d\lambda \sec\gamma}{\sqrt{((1+\lambda)^2+(2\lambda+\lambda\lambda)\,\mathrm{tg}\gamma^2)}}$.

Setzt man ferner um abzukürzen

$1+\lambda = \varrho$, $2\lambda+\lambda\lambda = z^2$, alſo $(1+\lambda)d\lambda = zdz$,

ſo iſt $\frac{dv}{v} = N . \frac{r\delta\, zdz \sec\gamma}{\sqrt{(\varrho^2+zz\,\mathrm{tg}\gamma^2)}}$, und

$$\frac{1}{\sqrt{(\varrho^2+zz\,\mathrm{tg}\gamma^2)}} = \frac{1}{\varrho} . \left(\left(1+\frac{z^2}{\varrho^2}\right)\mathrm{tg}\gamma^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\varrho}\left(1+\tfrac{1}{2} . \frac{z^2}{\varrho^2}\mathrm{tg}\gamma^2 + \frac{1.3}{2.4} . \frac{z^4}{\varrho^4}\mathrm{tg}\gamma^4 - \ldots\right);$$

alſo findet man durch die Integration $lv = \text{Conſt.} + Nr\sec\gamma$

$$\times \left(\tfrac{1}{2}\mathrm{tg}\gamma^2 . \int\frac{\delta zdz}{\varrho} - \frac{1.3}{2.4}\mathrm{tg}\gamma^4 . \int\frac{\delta z^3dz}{\varrho^3} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\mathrm{tg}\gamma^6 . \int\frac{\delta z^5dz}{\varrho^5} \ldots\right).$$

(Um Hn. Lamberts Formul deſto leichter zu vergleichen, iſt nur zu bemerken, das er den Halbmeſſer der Erde = 1 ſetzt, der hier r heiſt, und daß bey ihm r das ſey, was hier ϱ iſt.) Die Integrale, welche in der gefundenen Reihe die Coefficienten der Potenzen von tangγ abgeben, nehme man ſo, daß ſie verſchwinden, wenn $y = 0$ geſetzt wird. Hiernächſt erwäge man, daß $v = 1$ alſo $lv = 0$ ſeyn müſſe, wenn y der Höhe der Atmoſphäre gleich genommen wird. Iſt dieſe $= a$, ſo

werden

werden die Integrale $\int \frac{\delta z dz}{\varrho}$, $\int \frac{\delta z^3\, dz}{\varrho^3}$ u. ſ. f. beſtändige Gröſſen, wenn man $y = a$ ſetzt. Demnach ſey in dieſer Vorausſetzung $Nr. \int \frac{\delta z dz}{\varrho} = A$, $Nr. \int \frac{\delta z^3\, dz}{\varrho^3} = B$ u. ſ. f., ſo iſt zuerſt die Conſtans

$$= - \sec\gamma \left(A - \tfrac{1}{2} B \operatorname{tg}\gamma^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} C \operatorname{tg}\gamma^4 - \ldots\right);$$

und weil nach der Integration $y = 0$ geſetzt werden muß, um die Verminderung des Lichts für den ganzen Weg zu haben, den daſſelbe durch die Atmoſphäre nimmt, ſo giebt ſich $l \frac{1}{v} =$

$$\sec\gamma \left(A - \tfrac{1}{2} B \operatorname{tg}\gamma^2 + \frac{1.3}{2.4} C \operatorname{tg}\gamma^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6} D \operatorname{tg}\gamma^6 + \ldots\right)$$

Die Coefficienten A, B, C, D, u. ſ. f. ſucht Herr Lambert nicht weiter vermittelſt der Integralrechnung, und nimmt aus dem Grunde an, daß ſie ſehr ſchnell abnehmen, weil die Höhe der Atmoſphäre in Vergleichung mit dem Halbmeſſer der Erde, alſo λ in Vergleichung mit 1, und z in Vergleichung mit ϱ ſehr klein ſey. Hat dies ſeine Richtigkeit, ſo laſſen ſich die erſten Coefficienten dieſer Reihe nach einander auch durch Beobachtungen finden, wovon eine Probe in Beſtimmung des Coefficienten A gegeben wird. Der angeführte Grund ſchien mir nicht ganz überzeugend, eine ſo ſchnelle Näherung der Reihe zu beweiſen, daß auch alsdenn noch wenige von den erſten Gliedern das geſuchte beynahe richtig geben könnten, wenn $\gamma > 45°$

 iſt:

iſt: deswegen habe ich die ſchon oben vorgetragenen Rechnungen angeſtellet, um ſolche Reihen zu finden, welche ſich allemahl nähern, was auch γ für einen Winkel bezeichnen ſoll. Zwar vermeidet Hr. Lambert durch ſein Verfahren, daß er nicht genöthiget iſt, eine Gleichung zwiſchen δ und y oder λ anzunehmen, wie diejenige, welche ſich auf die Mariottiſche Hypotheſe gründet, nach welcher ich oben $y = - kl\delta$ angenommen habe: (380. §.) weil jedoch dieſe Gleichung vom Hn. Lambert ſelbſt ſonſt für ſehr nahe richtig angenommen wird, ſo habe ich kein Bedenken getragen, mit Hn. Bouguer ſie hier beyzubehalten.

397. §.

So viel beweiſt die vom Hn. Lambert angenommene Reihe, daß beynahe $l\,\frac{1}{v} = \text{A}\,\text{ſec}\gamma$ ſey, ſo lange γ ein kleiner Winkel bleibt, daß es aber nicht verſtattet ſeyn könne anzunehmen, es verhalte ſich noch $l\,\frac{1}{v}$ ſehr nahe wie ſecγ, wenn gleich γ bis zu 80° wachſe, iſt aus Gründen klar, die Hr. Lambert ſelbſt in anderer Abſicht anführt. Dies hieſſe nemlich annehmen, in der Gleichung $l\,\frac{1}{v} = \frac{s}{h}\;l\,\frac{1}{\text{V}}$ (380 §.) verhalte ſich die Linie s beynahe wie ſecγ, ſo lange γ nicht über 80° wächſt, und daß dies nicht ſeyn könne, folgt aus dem, was Hr. Lambert a. a. O. im 889 u. f. bis zum 899 §. vorträgt, und welches ſich nunmehro kurz auf folgende Art überſehen läßt. Es

ſey

ſey in der 124 Fig. KB der Halbmeſſer der Erde, BA $= a$ die Höhe der Atmoſphäre, BF $= k$ die Höhe der bis auf die Dichtigkeit $= 1$ zuſammen gedrückten Atmoſphäre. Der Kreis ALΛY ſtelle die Gränze der natürlichen, und FGHW die Gränze der zuſammen gedrückten Atmoſphäre vor. Wenn nun das Licht in der Verticallinie herab fällt, ſo wird es eben ſo geſchwächt, als wenn es in der zuſammen gedrückten Atmoſphäre den Weg FB zurück legte. Dies kann auf die Vermuthung leiten, es dürfte vielleicht das Licht, wenn es in der Richtung LB einfällt, eben den Abgang leiden, als wenn es in der zuſammen gedrückten Atmoſphäre den Weg GB zurück legte, da dann $s =$ GB wäre: allein bey fernerer Prüfung wird dieſe Vermuthung falſch befunden. 124. Fig.

Man laſſe KR auf die verlängerte BG ſenkrecht fallen, ſo iſt gleich zu überſehen, daß BG $=$ GR $-$ BR ſey. Ferner iſt GR $= \sqrt{(KG^2 - KR^2)} = \sqrt{((r+k)^2 - r^2 \sin\gamma^2)}$ und BR $= r \cos\gamma$, alſo BG $= \sqrt{((r+k)^2 - r^2 \sin\gamma^2)} - r \cos\gamma = r(\sqrt{((1+n)^2 - \sin\gamma^2)} - \cos\gamma)$, die Zahl $\frac{k}{r} = n$ geſetzt, alſo auch BG $= r(\sqrt{(\cos\gamma^2 + 2n + n^2)} - \cos\gamma)$. Weil n eine kleine Zahl iſt, ſo hat man beynahe $\sqrt{(\cos\gamma^2 + 2n + n^2)} = \cos\gamma$

$$\sqrt{\left(1 + \frac{2n}{\cos\gamma^2}\right)} = \cos\gamma + \frac{n}{\cos\gamma},$$ ſo

lange auch γ ein kleiner Winkel iſt: mithin beynahe

$$BG = \frac{n \cdot r}{\cos\gamma} = k \sec\gamma:$$ oder es iſt anfangs, ſo

lange γ klein iſt, BG beynahe der $\sec\gamma$ proportional.

Indeſſen macht es doch die Natur der Sache ſchon für ſich klar, und es erhellet von ſelbſt aus Betrachtung der Figur, daß die Linie BG langſamer wachſe als k ſecγ, beſorders alsdenn, wenn γ anfängt, den Winkel von 45° zu übertreffen. Wenn alſo gleich die Vermuthung, daß vielleicht $s =$ GB ſeyn könnte, ihre Richtigkeit hätte, ſo würde es doch nur höchſtens ſo lange verſtattet ſeyn $s = k$ ſecγ anzunehmen, bis γ den Winkel von 45° zu übertreffen anfängt.

Es iſt aber nur in dem einzigen Fall $\gamma = 0$ die Linie $s = k =$ GB, in allen übrigen Fällen iſt s noch kleiner als BG; um ſo weniger kann alſo s ſich ſo lange beynahe wie ſecγ verhalten, bis $\gamma = 80°$ wird. In der 125 Figur ſey wiederum ALY die Gränze der natürlichen, und FGW die Gränze der
125. Fig. zuſammen gedrückten Atmoſphäre. Zwiſchen PM und pm ſtelle man ſich eine unendlich kleine Schichte der natürlichen Atmoſphäre vor, die nach der Zuſammendrückung zwiſchen QN und qn befindlich iſt; und das Licht falle in der Richtung LB in die Atmoſphäre. Die Dichtigkeit der Luftſchichte PMmp ſey $= \delta$, der Schichte QqnN aber $= 1$, ſo iſt die Linie $s = \int . \delta . \mathrm{M}m$ (380. §.), ſo wie GB $= \int 1 . \mathrm{N}n$. Man ſetze KP = KM $= z$, KQ = KN $= \zeta$, ſo iſt BM $= \sqrt{(z^2 - r^2 \sin\gamma^2)} - r \cos\gamma$ und BN $= \sqrt{(\zeta^2 - r^2 \sin\gamma^2} - r \cos\gamma$, mithin giebt die Differentialrechnung Mm =

$$\frac{z dz}{\sqrt{(z^2 - r^2 \sin\gamma^2)}}, \text{ und } \mathrm{N}n = \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2 - r^2 \sin\gamma^2)}},$$

folglich $\delta . \mathrm{M}m = \dfrac{\delta z dz}{\sqrt{(z^2 - r^2 \sin\gamma^2)}}$. Aber wenn

das

das Licht vertical einfällt, ſo hat man $Qq = \delta . Pp$, oder $d\zeta = \delta dz$, alſo iſt auch $\delta . Mm =$

$$\frac{d\zeta}{\surd(1 - (r^2 : z^2)\sin\gamma^2)}$$ und $Nn =$

$$\frac{d\zeta}{\surd(1 - (r^2 : \zeta^2)\sin\gamma^2)}.$$ Ferner iſt $z > \zeta$, alſo $\surd(1 - (r^2 : z^2)\sin\gamma^2) > \surd(1 - (r^2 : \zeta^2)\sin\gamma^2)$ und $\delta . Mm < Nn$. Weil nun die Linie s aus eben ſo vielen Elementen, wovon jedes $= \delta . Mm$ iſt, beſtehet, ſo viele Elemente, wovon jedes $= Nn$ iſt, die Linie GB ausmachen, ſo muß $s <$ GB ſeyn. (M. ſ. Lamberts Photom. §. 889. 890.)

Hiemit ſtimmen auch die oben ſchon vorgetragenen Rechnungen ſehr wohl überein. Es war nemlich $BG = r(\surd((1+n)^2 - \sin\gamma^2) - \cos\gamma)$, alſo iſt auch BG =

$$r((1+n)\cos\gamma\surd(\sec\gamma^2 - \frac{tg\gamma^2}{(1+n)^2}) - (1+n)\cos\gamma + n\cos\gamma);$$

oder BG =

$$r((1+n)\cos\gamma(\surd(1 + \frac{2n+n^2}{(1+n)^2}\,tg\gamma^2) - 1(+n\cos\gamma).$$

Wenn man nun $\surd(1 + \frac{2n+n^2}{(1+n)^2}\,tg\gamma^2)$ nach dem binomiſchen Lehrſatz ausdrückt, ſo findet man

$$BG = r((1+n)\cos\gamma(\tfrac{1}{2} . \frac{n(2+n)}{(1+n)^2}\,tg\gamma^2$$

$$- \tfrac{1}{2} . \tfrac{1}{2} . \frac{n^2(2+n)^2}{(1+n)^4}\,tg\gamma^4 + \frac{1.1.3}{2.4.6} . \frac{n^3(2+n)^3}{(1+n)^6}$$

$tg\gamma^6 - \ldots) + n\cos\gamma)$, oder $BG = rn\cos\gamma$

$$(1 + \tfrac{1}{2} . \frac{2+n}{1+n}\,tg\gamma^2 - \tfrac{1}{2} . \tfrac{1}{2} . \frac{n(2+n)^2}{(1+n)^3}\,tg\gamma^4$$

$+ \frac{1.1.3}{2.4.6} \cdot \frac{n^2(2+n)^3}{(1+n)^5} \operatorname{tg}\gamma^6 - \ldots)$. Es iſt aber $nr = k$, und die Zahl n ſehr klein, alſo beynahe $\frac{2+n}{1+n} = 2$, und $\frac{n}{1+n} = n$, folglich beynahe $BG = k \cos\gamma (\sec\gamma^2 - n \operatorname{tg}\gamma^4 + \frac{1}{2} n^2 \operatorname{tg}\gamma^6 - \ldots)$, oder auch $BG = k \sec\gamma (1 - n \operatorname{tg}\gamma^2 \sin\gamma^2 + \frac{1}{2} n^2 \operatorname{tg}\gamma^4 \sin\gamma^2 - \ldots)$. So lange demnach γ ein kleiner Winkel iſt, hat man beynahe $BG = k \sec\gamma (1 - n \operatorname{tg}\gamma^2 \sin\gamma^2)$ und aus dem 389 §. findet man unter der angenommen Vorausſetzung, daß γ nur klein ſey, die Linie s ſehr nahe $= K$, alſo $s = \frac{k \operatorname{cosec}\gamma}{\sqrt{(\cot\gamma^2 + 2n\zeta)}} = \frac{k \sec\gamma}{\sqrt{(1 + 2n\zeta \operatorname{tg}\gamma^2)}}$ oder s beynahe $= k \sec\gamma (1 - n\zeta \operatorname{tg}\gamma^2)$. Weil nun vermöge der Vorausſetzungen, worauf ſich die Rechnung im 318 §. gründet, $\zeta = 3\frac{1}{2}$ iſt, ſo iſt $n\zeta \operatorname{tg}\gamma^2 > n \operatorname{tg}\gamma^2 \sin\gamma^2$, mithin giebt jene Rechnung auch ſchon für kleine Winkel γ die Linie $s < BG$. Für den Winkel $\gamma = 90°$ iſt $GB = r\sqrt{(2n + n^2)}$ beynahe $= r\sqrt{2n} = \frac{2nr}{\sqrt{2n}} = \frac{2k}{\sqrt{2n}}$, und aus dem 392 §. hat man $\frac{s}{2K} = 0{,}8860628$, und $K = \frac{k}{\sqrt{2n}}$, alſo $s = 0{,}886028 \cdot GB$, woraus die Uebereinſtimmung mit den bisherigen Schlüſſen gleichfalls erhellet.

398. §.

398. §.

Wenn man in der Gleichung $l\frac{1}{v} = \frac{s}{h}\ l\frac{1}{V}$ (380 §.) die Linie $h = k$ nimmt, ſo muß ſtatt 1 : V dasjenige Verhältniß geſetzt werden, in welchem das Licht vermindert wird, wenn es durch die Atmoſphäre bis auf die Erde vertical herab fällt. Hat es alſo mit den im 395 §. angeführten Verſuchen des Hn. Bouguer ſeine völlige Richtigkeit, ſo muß man V = 0,8123, alſo $l\frac{1}{V} = 0{,}0902526$ nehmen, wenn man $l\frac{1}{v} = \frac{s}{k}\ l\frac{1}{V}$ ſetzt. Hr. Bouguer hat eine Tafel berechnet, die er im Traité d'optique Liv. III. Sect. V. pag. 332. mittheilt. Dieſe enthält für die erſten 20 Grade der Höhe eines himmliſchen Körpers, und nachher für die fernern Höhen von 5 zu 5 Graden die Linie s, und das dazu gehörige Verhältniß 1 : v. Die Linie s iſt in der Vorausſetzung k = 3911 Toiſen berechnet, und die Zahl v in der Vorausſetzung, daß 1 : V = 1 : 0,8123 ſey, wie im 395 §. iſt gefunden worden. Dagegen glaubt Hr. Lambert gefunden zu haben, das Licht leide eine Verminderung in dem Verhältniß 10000 : 5889 faſt = 5 : 3, wenn es vertical durch die Atmoſphäre herab fällt. (Photom. Part. V. Cap. I. §. 886. pag. 387). Den Verſuch ſelbſt verſpricht er in der Pyrometrie zu beſchreiben, weil er die Gründe davon

in der Photometrie nicht vorgetragen habe. Weil nun

$$l.\,10000 = 4{,}0000000$$
$$l\ \ 5889 = 3{,}7700416$$
$$\text{ſo iſt } l\,\tfrac{10000}{5889} = 0{,}2299584$$

und man muß in der Gleichung $l\,\frac{1}{v} = \frac{s}{k}$

$l\,\frac{1}{V}$ die Zahl $V = 0{,}5889$ und $l\,\frac{1}{V} =$

$0{,}2299584$, oder faſt $l\,\frac{1}{V} = 0{,}23$ nehmen, falls Hn. Lamberts Verſuch zuverläßiger iſt, als des Hn. Bouguer Verſuch. Dies aber anzunehmen hat man um ſo mehr Grund, weil Hr. Lambert verſichert, daß er den Verſuch einen ganzen Tag fortgeſetzt habe. Weil mir indeſſen nicht bekannt iſt, daß die Sache völlig entſchieden ſey, ſo habe ich in folgender Tabelle nach beyden Vorausſetzungen die Zahl v berechnet. Weil übrigens die Rechnung nicht davon abhängt, daß man die abſolute Gröſſe der Linie k genau kenne, ſo habe ich nur

die Zahlen $\frac{s}{k}$ in die Tabelle gebracht.

Winkel γ	die Zahl $s:k$	v nach Hn. Bouguer	v nach H. Lambert.
0°	1	0, 8123	0,5889
10°	1, 01534	0, 8098	0,5841
20°	1, 06418	0, 8016	0,5692
23° 49′	1, 09307	0, 7968	0,5605
25°	1, 10329	0, 7951	0,5575
30°	1, 15469	0, 7866	0,5425
35°	1, 22117	0, 7759	0,5244
40°	1, 30503	0, 7624	0,5011
45°	1, 41395	0, 7454	0,4729
50°	1, 55612	0, 7237	0,4397
55°	1, 74201	0, 6963	0,3975
60°	1, 99031	0, 6613	0,3485
65°	2, 35004	0, 6136	0,2903
70°	2, 89977	0, 5474	0,2153
70° 44′	3, 00281	0, 5358	0,2038
75°	3, 80465	0, 4535	0,1428
80°	5, 55995	0, 3149	0,0526
85°	10, 20020	0, 1201	0,00414
86°	12, 14011	0, 0802	0,00161
87°	14, 87650	0, 0454	0,00028
88°	19, 03068	0, 0192	0,000042
89°	25, 55101	0, 0047	0,0000013
90°	35, 49555	0, 0006	$l.(1:v) = 8,164..$

399. §.

Ich habe in die zweyte und dritte Columme dieſer Tabelle die vom Hn. Bouguer berechneten Zahlen ſonſt unverändert gelaſſen, nur daß ich die Zahlen $\frac{s}{k}$ hieher geſetzt habe, wogegen er die Linien s

und

und k in Zahlen hat, die Höhe $k = 3911$ Toiſen angenommen. Die hieſigen Zahlen entſtehen alſo aus Hn. Bouguer Zahlen, die er für die Linie s angiebt, wenn man ſie alle mit 3911 dividirt. Dieſe Zahlen $\frac{s}{k}$ müſſen alſo für kleine Winkel mit der dazu gehörigen Secante ſehr nahe überein kommen, nach und nach aber müſſen dieſe Zahlen kleiner werden, als $\sec\gamma$, und zwar müſſen die Differenzen deſto mehr wachſen, je gröſſer γ wird. Dieſe Bemerkung dient, die Zahlen $\frac{s}{k}$ ſo wie ſie Hr. Bouguer berechnet hat, einigermaſſen zu prüfen, wenn man ſie mit der Secante des dazu gehörigen Winkels zuſammen hält, da es ſich denn ſo gleich zeigt, daß die für die Winkel γ von 35° und 50° einer Berichtigung bedürfen. Hr. Bouguer hat nemlich für $\gamma = 35°$ die Linie $s = 4776$ angegeben, und ich finde $\frac{4776}{3911} = 1{,}22117$; es iſt aber $\sec.\,35° = 1{,}2207746$, alſo muß $\frac{s}{k}$ kleiner ſeyn. Nach der Formul des 389 §. finde ich $\mu = \frac{2n\zeta\,\mathrm{tg}\gamma^2}{1 + 2n\zeta\,\mathrm{tg}\gamma^2} = 0{,}004101$, und $K = \frac{k\,\sec\gamma}{\sqrt{(1 + 2n\zeta\,\mathrm{tg}\gamma^2)}} = 1{,}21827\,.\,k$, alſo $s = 1{,}000555\,.\,K = 1{,}21895\,.\,k$. Die Zahl $\frac{s}{k} = 1{,}21895$ nach Hn. Bouguer mit 0,09025

multi-

multiplicirt giebt $l\frac{1}{v} = 0{,}1100090$, alſo $\frac{1}{v} = 1{,}288247$, und $v = 0{,}7762$ ſtatt 0,7759 für $\gamma = 35°$. Wenn man dagegen nach Hn. Lambert mit 0,23 multiplicirt, ſo findet man $l\frac{1}{v} = 0{,}2803585$, $\frac{1}{v} = 1{,}907034$, und $v = 0{,}5244$, wie es in der vierten Columme angegeben iſt.

Bey dem Winkel $\gamma = 50°$ tritt eben der Fall ein. Es hat nemlich Hr. Bouguer $\frac{s}{k} = \frac{6086}{3911} = 1{,}55612$, und es iſt ſec $50° = 1{,}5557238$, mithin jene Zahl zu groß. Ich finde nach der Formul des 389 §. die Zahl $\mu = 0{,}0118$, und $K = 1{,}5465283 \,.\, k$, alſo $s = 1{,}00329 \,.\, K = 1{,}5516162 \,.\, k$. Die Zahl $\frac{s}{k}$ nach Hn. Bouguer mit 0,09025 multiplicirt giebt $l\frac{1}{v} = 0{,}1400332$, alſo $\frac{1}{v} = 1{,}38049$, und $v = 0{,}7244$ ſtatt 7237. Multiplicirt man nach Hn. Lambert mit 0,23, ſo wird $l\frac{1}{v} = 0{,}3568717$ gefunden, alſo $\frac{1}{v} = 2{,}274426$, und $v = 0{,}4397$.

400. §.

Bey Prüfung der übrigen Zahlen, welche Hr. Bouguer mittheilt, wird man finden, daß ſie bald mehr bald weniger fehlerhaft ſind: weil jedoch die Fehler ſeine für v berechneten Zahlen ſich nicht ſehr erheblich ändern, ſo habe ich ſie gelaſſen wie ſie ſind, da dann ſeine Tabelle doch dazu dient, einigermaſſen zu überſehen, nach welchem Geſetz v abnimmt, wenn γ wächſt. Für die Winkel, welche dem rechten Winkel nahe kommen, fehlen ſeine Zahlen am meiſten. Ich habe oben für $\gamma = 90°$ die Zahl $\frac{s}{k} = 36,1733584$ gefunden, nnd nach Herrn Bouguer iſt ſie 35,49555. Die Richtigkeit meiner Rechnung habe ich mehr als einmahl geprüft, auch für dieſen Fall eine Formul nach eben der Integrations-Methode, wie Hr. Bouguer geſucht, da ich dann, ohne die Rechnung (die nach dieſer Methode ſehr weitläuftig wird), bis auf die gröſte Schärfe fortzuſetzen, $\frac{s}{k} = 35,9$ finde. Nimmt man dieſe Zahl $= 36$ an, ſo erhält man $l\,\frac{1}{v} = 3,24900$, alſo $\frac{1}{v} = 1774,2$, und $v = 0,00056$. Hat es alſo mit den Erfahrungen des Hn. Bouguer ſeine Richtigkeit, ſo wird das Licht nicht völlig 2000 mahl ſchwächer, wenn es in horizotaler Richtung durch die Atmoſphäre fällt. Wäre dagegen Hn. Lamberts Verſuch vollkommen zuverläßig, ſo würde derſelbe für das horizontal ein-

einfallende Licht $l\frac{1}{v} = 0{,}23 \cdot 36 = 8{,}28$, oder wenn man $\frac{s}{k}$ mit Hn. Bouguer $= 35{,}5$ nimmt, doch wenigſtens $l\frac{1}{v} = 8{,}165$ geben, mithin wäre $\frac{1}{v}$ eine Zahl, die 9 Ziffern hätte, und ſie wäre gröſſer als 146000000, mithin v kleiner als $\frac{1}{146000000}$. Schwerlich wird man ſich überzeugen, daß das Licht in dem angenommenen Fall eine ſo ungemein ſtarke Verminderung leide: auch nimmt Hr. Lambert ſelbſt (a. a. O. 898 §. 402 S.) nur an, das horizontal einfallende Licht werde 2000 mahl ſchwächer, und ich ſehe nicht, wie dies mit dem vorigen beſtehen kann. Herr Lambert ſagt nicht, woher er die Zahl 2000 genommen habe, hier finde ich nicht, daß er auf einen Verſuch Bezug macht, und es ſcheint, er habe ſie nur als eine runde Zahl aus dem Bouguer genommen. Hätte er dieſe, oder eine ihr nahe kommende Zahl mittelſt eines Verſuchs gefunden, ſo würde dies zugleich die Richtigkeit der oben im 364 §. angeführten Verſuche des Hn. Bouguer beweiſen: denn die Gleichung $l\frac{1}{v} = \frac{s}{h}\ l\frac{1}{V}$ würde, wenn $\frac{1}{v} = 2000$ $s = 36 . k$, und $h = k$

geſetzt

geſetzt wird, $l\frac{1}{V} = \frac{3,301030}{36} =$ 0,091328, alſo beynahe ſo geben, wie nach des Hn. Bouguer Verſuch, und man hätte für das vertical einfallende Licht $l\frac{1}{v} = 0,091328$,

alſo $\frac{1}{v} = 1,234036$, und $v = 0,8013$, mithin wäre die Verminderung nicht mehr als ohngefehr $\frac{1}{5}$. Könnte man alſo die Richtigkeit der Lambertſchen Verſuche nicht in Zweifel ziehen, ſo müſte entweder das Mariottiſche Geſetz der Dichtigkeiten der Luft fehlerhafter ſeyn, als man ſonſt dafür zu halten Grund hat, oder man wäre genöthiget, die ganze Theorie von der Durchſichtigkeit, (327. 376. §.) aufzugeben.

401. §.

Es ſey BN = s, und man ſtelle ſich vor, für jeden Winkel FBN = γ ſey BN = s ſo groß genommen, wie erfordert wird, wenn BN jedesmahl der Maſſe proportional ſeyn ſoll, die das Licht in der Atmoſphäre auf dem Wege LB durchdringt; ſo liegen alle Punkte N in einer krummen Linie FND, deren Natur die Differentialgleichung $ds = \frac{k(1+\lambda)\,d\delta}{\sqrt{(\cos\gamma^2 + 2\lambda + \lambda\lambda)}}$ (380 §.) ausdrückt, und man kennet nun ſchon die mancherley Schwierigkeiten, welche bey Integration dieſer Gleichung eintreten. So viel iſt gewiß, daß dieſe krumme Linie den Kreisbogen FGH in F berührt, übrigens

124. Fig.

aber

aber muß ſie ſich nach und nach immer etwas ſtärker gegen FK zu krümmen, als der Bogen FGH ſich krümmt. Wäre alſo vielleicht FND auch ein Kreisbogen, oder käme dieſe Linie einem Kreisbogen nahe; ſo lieſſe ſich der dazu gehörige Halbmeſſer finden, wenn nur für einen Winkel γ die Linie BN etwa vermittelſt eines Verſuchs gefunden werden könnte, die Höhe BF ebenfalls als bekannt vorausgeſetzt. Es würde nemlich dieſer Kreisbogen FND ſeinen Mittelpunct E in der Scheitellinie FK haben müſſen, der ſich durch Zeichnung ſo finden lieſſe. Man nehme an, FMD ſey ein Kreisbogen, welcher der Linie FND ſehr nahe kommt, vielleicht ſo nahe, daß er mit ihr für einerley angenommen werden kann, da dann auch BM mit BN einerley wäre. Nachdem nun die Sehne FM gezogen worden, halbire man ſie mit einer graden Linie ſenkrecht, ſo geht ſelbige durch E. Aus BF $= k$, BM $= s$, FBM $= \gamma$ hat man auch FM $= \sqrt{(k^2 - 2ks\,.\,\text{coſ}\gamma + s^2)}$ und tang MFB $=$

$$\frac{s\,\text{ſin}\gamma}{k - s\,\text{coſ}\gamma},\ \text{alſo ſec MFB} = \sqrt{\left(1 + \frac{s^2\,\text{ſin}\gamma^2}{(k - s\,\text{coſ}\gamma)^2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{(k^2 - 2ks\,\text{coſ}\gamma + s^2)}}{k - s\,\text{coſ}\gamma}$$ und man findet den

Halbmeſſer FE $= \frac{1}{2}$ FM . ſec MFB $=$

$$\frac{k^2 - 2ks\,\text{coſ}\gamma + s^2}{2(k - s\,\text{coſ}\gamma)}.$$ Setzt man $\frac{s}{k} = m$, ſo iſt

$$\text{FE} = \frac{1 - 2m\,\text{coſ}\gamma + m^2}{2(1 - m\,\text{coſ}\gamma)}\,.\,k.$$

In der Gleichung $l\frac{1}{v} = \frac{s}{k}\ l\frac{1}{V}$ iſt 1 : V das Verhältniß, in welchem das vertical durch die Atmoſphäre fallende Licht vermindert wird. Wenn alſo für einen gegebenen Winkel γ das Verhältniß 1 : v bekannt iſt, ſo hat man $\frac{s}{k} = m = \frac{l(1:v)}{l(1:V)}$. Es ſey nach Hn. Lambert 1 : V = 5 : 3, und für $\gamma = 90°$ ſey 1 : v = 2000 : 1; ſo findet man $m = \frac{3,3010300}{0,2218488} = 14,87964 = \frac{BD}{BF}$, alſo $m^2 = 221,403423$. Weil ferner in dieſem Fall $\cos\gamma = 0$ iſt, ſo wäre $FE = \frac{1}{2}(1 + m^2)\,k = 111,201711 . k$. (M. ſ. Lamberti Phot. §. 898. 899.) Wofern es mit der oben vorgetragenen Theorie von der Durchſichtigkeit, oder dem Geſetz, nach welchem das Licht in durchſichtigen Maſſen geſchwächt wird, ſeine Richtigkeit hat; und wofern überdem das Mariottiſche Geſetz der Dichtigkeiten der Luft in groſſen Höhen nicht ganz ungemein von der Natur abweicht; ſo kann dieſe Rechnung unmöglich beſtehen. Denn unter dieſer Vorausſetzung muß $\frac{BD}{BF} = 36$ ſeyn, oder doch $\frac{BD}{BF}$ dieſer Zahl 36 ziemlich nahe kommen. Mit Beybehaltung dieſer Zahl aber wird der Halbmeſſer $FE = 648, s . k$ gefunden.

402. §.

402. §.

Es ſey dieſer Halbmeſſer FE $= \varrho$, $=$ EM, und ES ſey auf die verlängerte BM ſenkrecht, ſo iſt BM $=$ MS $-$ BS, und MS $= \sqrt{(\varrho^2 - (\varrho - k)^2 \sin\gamma^2)}$, BS $= (\varrho - k) \cos\gamma$: alſo erhält man BM $= \sqrt{(\varrho^2 - (\varrho - k)^2 \sin\gamma^2)} - (\varrho - k) \cos\gamma$, oder BM $= \sqrt{(\varrho^2 \cos\gamma^2 + (2\varrho k - k^2) \sin\gamma^2)} - (\varrho - k) \cos\gamma$. Wird ferner die Zahl $\frac{\varrho}{k} = q$ geſetzt, ſo iſt auch BM $= k\,(\sqrt{(q^2 \cos\gamma^2 + (2q - 1) \sin\gamma^2)} - (q - 1) \cos\gamma)$. Sowohl die gefundene Formul als auch die Natur der gezeichneten Figur ergiebt, daß die auf ſolche Art gefundene Linie BM in dem Fall $\gamma = 0$ der Linie k gleich ſey; daß ferner BM zwar nicht mit γ wachſe, aber doch zugleich nicht allein gleich anfangs kleiner als $k \sec\gamma$, ſondern auch kleiner als BG ſey; daß endlich auch eben dieſe Linie BM deſto mehr von BG übertroffen werde, je gröſſer der Winkel γ wird. Man kann die gefundene Formul auch ſo ausdrücken: BM $= k\,(q \cos\gamma\,(\sqrt{(1 + \frac{2q-1}{q^2} \operatorname{tg}\gamma^2)} - 1) + \cos\gamma)$, alſo iſt nach dem binomiſchen Lehrſatz

$$\frac{BM}{k} = q \cos\gamma \,.\, \left(\tfrac{1}{2} \,.\, \frac{2q-1}{q^2} \operatorname{tg}\gamma^2 - \tfrac{1}{2} \,.\, \tfrac{1}{2} \,.\, \frac{(2q-1)^2}{q^4} \operatorname{tg}\gamma^4 + \frac{1 \,.\, 1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} \,.\, \frac{(2q-1)^3}{q^6} \operatorname{tg}\gamma^6 - \ldots\right) + \cos\gamma = \cos\gamma \left(1 + \tfrac{1}{2} \,.\, \frac{2q-1}{q} \operatorname{tg}\gamma^2 - \tfrac{1}{2} \,.\, \tfrac{1}{2} \,.\, \frac{(2q-1)^2}{q^3} \operatorname{tg}\gamma^4 + \frac{1 \,.\, 1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} \,.\, \frac{(2q-1)^3}{q^5} \operatorname{tg}\gamma^6 - \ldots\right).$$

Weil

 nun

nun $q = 648$, $s.k$ eine ziemlich groſſe Zahl iſt, ſo hat man beynahe $\frac{2q-1}{q} = 2 - \frac{1}{q} = 2$, und man findet beynahe $\frac{BM}{k} = \cos\gamma\ (\sec\gamma^2 - \frac{1}{q}\mathrm{tg}\gamma^4 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{q^2}\ \mathrm{tg}\gamma^6 \ldots)$, alſo $BM = k \sec\gamma\ (1 - \frac{1}{q}\ \mathrm{tg}\,\gamma^2\ \sin\gamma^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{q^2}\ \mathrm{tg}\gamma^4\ \sin\gamma^2 - \ldots)$; mithin iſt für kleine Winkel γ dieſe Linie $BM = k \sec\gamma\ (1 - \frac{1}{q}\ \mathrm{tg}\gamma^2 \sin\gamma^2)$, und es iſt $\frac{1}{q} = \frac{k}{\varrho}$, ſo wie oben $n = \frac{k}{r}$ war. Für kleine Winkel γ aber iſt $BG = k \sec\gamma\ (1 - n\ \mathrm{tg}\gamma^2 \sin\gamma^2)$, und $\frac{1}{q} > n$, alſo gleich anfangs $BM < BG$. Weil jedoch die eigentlich geſuchte Linie $BN = s$ für kleine Winkel $= k \sec\gamma\ (1 - n\zeta\ \mathrm{tg}\gamma^2)$ ſeyn muß; ſo iſt ſie gleich anfangs kleiner als die hier angenommene Linie BM, denn es iſt $\sin\gamma^2$ allemahl $< 2n\zeta$. Daraus folgt, daß die eigentlich geſuchte Linie FND ſich anfangs etwas ſtärker krümme, als der Kreisbogen FMD: weil jedoch ſehr nahe $BM = k \sec\gamma$ bleibt, ſo verlohnt es ſich der Mühe zu vergleichen, ob die Linie $BM = k\ (\surd(q^2 \cos\gamma^2 + (2q-1)\sin\gamma^2) - (q-1)\cos\gamma)$ für gröſſere Werthe des Winkels γ der Linie s nahe komme, die man eigentlich bey Auflöſung der Aufgabe des 380 §. nöthig hat. Die bequemſte

Form

Form erhält die Formul, um darnach zu rechnen, wenn man ſie ſo ausdrückt: $BM = k(\surd((q-1)^2 \cos\gamma^2 + 2q - 1) - (q-1)\cos\gamma)$, alſo auch $BM = k(q-1)(\surd(\cos\gamma^2 + \frac{2q-1}{(q-1)^2}) - \cos\gamma$. Es iſt aber $q = 648,5$, und man findet $\frac{2q-1}{(q-1)^2} = 0,0030911883$.

Für $\gamma = 40°$ iſt $\cos\gamma = 0,7660444$, $\cos\gamma^2 = 0,58682400$, und man findet $BM = 1,3047125$. Dagegen iſt nach der Formul des 389 §. $tg\gamma = 0,8390996$, $tang\gamma^2 = 0,70408810$, $\surd(1 + 2n\zeta\, tg\gamma^2) = 1,0015559$, und man findet $K = \frac{k \sec\gamma}{\surd(1 + 2n\zeta\, tg\gamma^2)} = 1,30337937 \,.\, k$.

Weiter iſt $\mu = \frac{2n\zeta\, tg\gamma^2}{1 + 2n\zeta\, tg\gamma^2} = \frac{311431}{100311431} = 0,0031046$, und es wird $s = 1,000198 \,.\, K = 1,3036374 \,.\, k$ gefunden, alſo noch wie bey kleinen Winkeln $BM > s$.

Für $\gamma = 45°$, iſt $\sec\gamma = \surd 2$, $\cos\gamma = \frac{1}{\sec\gamma} = \frac{1}{\surd 2} = \frac{1}{2}\surd 2 = 0,7071068$, alſo $\cos\gamma^2 = \frac{1}{2} = 0,5$, und es wird $BM = 1,413104 \,.\, k$ gefunden. Dagegen iſt aus dem 389 §. $\mu = \frac{84}{10084} = 0,00833$, $\mu^2 = 0,0000694$, $K = 1,4083111 \,.\, k$, und $s = 1,0020829 \,.\, K = 1,4112443 \,.\, k$, wiederum kleiner als BM, und zwar ſo, daß der Ueberſchuß der letzten Linie beträchtlicher iſt, als für $\gamma = 40°$.

Für $\gamma = 50°$ iſt coſγ = 0,6427876, coſγ^2 = 0,41317585, und man findet BM = 1,554000. Aus dem 389 §. aber iſt $\mu = \frac{119267}{10119267}$ = 0,0117861, μ^2 = 0,0001381, K = 1,5465252, und s = 1,0033354 . K = 1,5516832 . k.

Für $\gamma = 60°$ iſt coſ$\gamma = \frac{1}{2}$, ſin$\gamma^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, tg$\gamma$ = $\sqrt{3}$, ſecγ = 2, alſo coſγ^2 = 0,25, und BM = 1,9953943 . k. Dagegen findet man dem 389 §. gemäß K = 1,9752566 . k, μ = 0,0245805, und μ^2 = 0,0006040, alſo s = 1,0080146 . K = 1,9910870 . k.

Wenn man die Rechnung fortſetzt, ſo findet ſich, daß BM auch für die folgenden Winkel gröſſer als s bleibe, und daß die Differenzen noch beſtändig wachſen, bis γ dem rechten Winkel ſehr nahe kommt. In der folgenden kleinen Tabelle läßt ſich dies am beſten überſehen.

γ	BM : k	s : k	diff.
40°	1,3047125 . k	1,3036374	0,0010751
45°	1,4130040	1,4112443	0,0018597
50°	1,5540000	1,5516832	0,0023168
60°	1,9953943	1,9910870	0,0043073
85°	10,5025795	10,204624	0,297955
86°	12,5914145	12,038073	0,553341
89°	26,431274	25,235257	1,196017

Weil nun in dem Fall $\gamma = 90°$ BM = s wird, ſo erhellet, daß die Linie, deren Natur die Gleichung zwiſchen γ und s ausdrückt, von dem Kreisbogen FMD zu ſehr Abweiche, als daß man für ſolche Winkel γ, die dem rechten Winkel nahe kommen, die Linie BM ſtatt s bey Auflöſung der Aufgabe des 380. §. brauchen könnte.

Der

Der XXVIII. Abſchnitt.

Von der Klarheit der Atmoſphäre, und der Erleuchtung, die das Tageslicht verurſacht.

403. §.

Was wir das Tageslicht nennen, wenn wir es vom Sonnenlicht, das die Gegenſtände um uns herum unmittelbar erleuchtet, unterſcheiden, iſt nichts anders als Sonnenlicht, das die Lufttheilchen, welche die Sonne erleuchtet, zurückſenden und nach allen Seiten zerſtreuen. Durch die Fenſter-Oefnungen eines Zimmers, die gegen die Oſtſeite des Horizonts belegen ſind, fällt Tageslicht ins Zimmer, wenn gleich die Sonne an der Weſtſeite des Horizonts befindlich iſt, und nicht grade durch die Fenſter-Oefnungen ins Zimmer hinein ſcheinen kann: und dies Tageslicht ſendet der von der Sonne erleuchtete öſtliche Theil der Atmoſphäre ins Zimmer. Jeden erleuchteten Lufttheilchen kann man alsdenn in eben dem Verſtande eine gewiſſe Klarheit zuſchreiben, in welchem man ſonſt für ſich dunklen von der Sonne erleuchteten Maſſen, eine gewiſſe Klarheit zuſchreibt. (13 §.)

404. §.

Es ſey AD ein Stück der Erdfläche, nur ſo groß, 126. Fig.
daß die Krümme deſſelben noch nicht ſehr beträcht-

lich iſt, ſo daß man es als eine ebene Fläche betrachten kann, und CB ſey die äuſſere mit AD parallele Gränze der Atmoſphäre. Das Sonnenlicht falle in der Richtung LA ⋕ FD durch die Atmoſphäre auf die Erdfläche, und der Abſtand der Sonne vom Scheitel CAL $= \omega$ ſey nicht über 45° groß. Ferner ſey wie bisher k die Höhe der bis auf die Dichtigkeit Δ der untern Luft zuſammen gedrückten Atmoſphäre, und s eine Linie, die ſich zu k verhält, wie die Maſſe, welche das Licht in der Richtung LA durchdringt, zu derjenigen, durch welche es vertical herab fällt; ſo iſt der Vorausſetzung gemäß $s = k \sec\omega$. (386 §.) Das vertical herab kommende Licht werde in dem Verhältniß 1 : V vermindert, und das in der Richtung LA einfallende in dem Verhältniß $1 : v$, ſo iſt $l\frac{1}{v} = \frac{s}{k}\ l\frac{1}{V} = \sec\omega\ l\frac{1}{V}$. Es ſey $l(1 : V) = \eta$, ſo hat man $-lv = \eta \sec\omega$, und $v = e^{-\eta \sec\omega} = e^{-\eta : \cos\omega}$. Die Lichtmenge, welche auf AD lothrecht fallen würde, wenn die Atmoſphäre kein Licht zerſtreuete, ſey $= 1$, ſo würde unter eben der Bedingung auf AD die Lichtmenge $= \sin \text{LAG} = \cos\omega$ fallen, wenn der Sonne Entfernung vom Scheitel $= \omega$ iſt. Wegen der Undurchſichtigkeit der Atmoſphäre fällt alſo auf AD die Lichtmenge $= \cos\omega \,.\, e^{-\eta : \cos\omega}$. Dieſe ſey $= \lambda$, ſo iſt der unterweges in der Luft zerſtreuete Theil des Lichts $= \cos\omega - \lambda = \cos\omega\,(1 - e^{-\eta : \cos\omega})$.

Dieſer

Dieſer zerſtreuete Theil des Lichts wird auf unzählig mannigfaltige Arten von den Lufttheilchen nach allen Seiten umher zurück geworfen, zum Theil aufwärts zum Theil unterwärts, auch zerſtreuet ſich wiewohl wahrſcheinlich nur ein ſehr kleiner Theil davon ſo unter den Lufttheilchen, daß derſelbe als verlohren angeſehen werden kann. Allemahl aber fällt auch ein Theil der zerſtreueten Lichtmenge wieder auf AD, und wenn derſelbe ſich zur ganzen zerſtreueten Lichtmenge, wie $n : 1$ verhält, ſo empfängt AD einen Theil des zerſtreueten Lichts $l = n \cdot \cos\omega\,(1 - e^{-\eta : \cos\omega})$. Nach Hn. Lambert (Photom. §. 905. 911.) dürfte n gewöhnlich etwas gröſſer ſeyn als $\frac{1}{2}$, auch dieſe Zahl deſto mehr übertreffen, je näher die Sonne dem Scheitel iſt. Dieſemnach hat man $\lambda : l = e^{-\eta \sec\omega} : n\,(1 - e^{-\eta \sec\omega})$, oder $\lambda : l = 1 : n\,(e^{\eta \sec\omega} - 1)$, und dies iſt zugleich das Verhältniß der Erleuchtung, welche die Fläche AD von dem in der Atmoſphäre geſchwächten Sonnenlicht empfängt, zur Erleuchtung, welche die von der Sonne erleuchtete Atmoſphäre auf AD wirft. Steht die Sonne im Scheitel, ſo iſt dies Verhältniß $\lambda : l = 1 : n\,(e^{\eta} - 1)$.

405. §.

Jede Stelle Zz der Erdfläche AD empfängt von allen Seiten her Licht, welches die erleuchteten Lufttheilchen dahin ſenden, nicht anders, als wenn ſich Zz im Mittelpunct einer leuchtenden Halbkugelfläche befände. Man ſtelle ſich um Zz nach allen

Seiten gleichgroſſe unendlich kleine coniſche Räume oder Ecken vor, die ihre Spitzen insgeſammt in Zz haben, als ſo viele in Zz zuſammen gehende Strahlenpyramiden oder Strahlenkegel. Wenn alle dieſe Strahlenkegel der Stelle Zz Licht von gleicher Dichtigkeit zuführten, deſſen Dichtigkeit, indem es ſich auf Zz verbreitet, nur wegen der Schiefe des Einfallswinkels geſchwächt würde; ſo erhellet, daß Zz eben ſo erleuchtet würde, als wenn um Z, als um einen Mittelpunct eine gleichförmig klare Halbkugelfläche ausgebreitet wäre, wovon Zz die Abſolute Erleuchtung empfinge. Man ſtelle ſich alſo eine ſolche gleichförmig klare Halbkugelfläche um Z vor, und ſetze ihre Klarheit $= \Sigma$, ſo wäre die Erleuchtung, welche ſie auf Zz würfe, $= \pi . \Sigma$. Man nehme an, dieſe Erleuchtung ſey ſo groß, als diejenige, welche Zz von der ganzen Atmoſphäre empfängt, ſo kann Σ die **mittlere Klarheit** der Atmoſphäre heiſſen. Die Sonne ſey um den Abſtand CAL $= \omega$ vom Scheitel entfernt, ihr ſcheinbarer Halbmeſſer ſey $= \varrho$, ihr, wegen der Undurchſichtigkeit der Atmoſphäre geſchwächter Glanz $=$ S; ſo iſt die Erleuchtung, welche ſie auf Zz wirft $= \pi S \sin\varrho^2 \cos\omega$, (59 §.) und das Verhältniß dieſer vom Sonnenlicht auf Zz fallenden Erleuchtung zu jener $\pi\Sigma$, welche der Vorausſetzung gemäß die Atmoſphäre dahin ſendet, iſt auch $= \lambda : l$. (404 §.) Alſo erhält man

$$S \sin\varrho^2 \cos\omega : \Sigma = \lambda : l, \text{ und } S = \frac{\lambda . \Sigma}{\sin\varrho^2 \cos\omega . l},$$

oder $$S = \frac{\lambda . \Sigma . \sec\omega}{\sin\varrho^2 . l}.$$

406. §.

406. §.

Vermittelſt dieſer Formul würde ſich der wegen Undurchſichtigkeit der Atmoſphäre geſchwächte Glanz der Sonne mit der mittlern Klarheit der Atmoſphäre vergleichen laſſen: es müſte aber γ nicht über 45° faſſen, auch müſte nicht allein die Zahl n, ſondern auch das Verhältniß 1 : V mit Zuverläßigkeit bekannt ſeyn, worin das Licht ; geſchwächt wird, wenn es lothrecht in der Atmoſphäre herab fällt. Denn vermöge des 404 §. iſt $\frac{\lambda}{l} = \frac{1}{n(e^{\eta \sec\omega} - 1)}$, und $\eta = l\,(1 : \mathrm{V})$. Weil nun jenes Verhältniß 1 : V noch nicht zuverläßig bekannt iſt, indem Hr. Lambert darin vom Hn. Bouguer gar ſehr abweicht (398 §.); ſo iſt keine ſcharfe Beſtimmung zu hoffen, und es kann genügen, wenn man $n = \frac{1}{2}$ ſetzt (404 §.), um eine ohngefehre Gleichung zwiſchen S und Σ wenigſtens für den Fall zu erhalten, wenn die Sonne dem Scheitel nahe iſt.

Steht die Sonne im Scheitel, ſo hat man $\lambda : l = 1 : n\,(e^{\eta} - 1)$, und $\mathrm{S} = \frac{\lambda \cdot \Sigma}{\sin \varrho^2 \cdot l}$. Nach Herrn Lambert iſt 1 : V = 1 : 0,5889, oder $\frac{1}{\mathrm{V}} = e^{\eta} = 1{,}6981$; alſo wäre $\frac{\lambda}{l} = \frac{100000}{34905} = 2\frac{6}{7}$, $n = \frac{1}{2}$ geſetzt. Nach Hn. Bouguer iſt 1 : V = 1 : 0,8123, oder $\frac{1}{\mathrm{V}} = e^{\eta} = 1{,}2311$,

mithin

mithin $\frac{\lambda}{l} = \frac{1}{0,1155} = 8,7$. Zwiſchen beyden Beſtimmungen iſt 6 eine Mittelzahl, die auch Hr. Lambert annimmt, daß alſo $S = \frac{6 \,.\, \Sigma}{\sin\varrho^2}$ wäre.

Wird endlich $\varrho = 16'$, alſo $\sin\varrho^2 = 0{,}00002166$, ſo erhält man $S = 276243 \,.\, \Sigma$, oder nach Herrn Lambert in einer runden Zahl $S = 277000 \,.\, \Sigma$. Dieſemnach wäre die mittlere Klarheit der Atmoſphäre ohngefehr ſo groß, als die mittlere Klarheit des Monds (307 §.), welches mit Hn. Smiths Gedanken überein kommt. (M. ſ. den Lehrbegrif der Opt. nach Herrn Käſtners Ueberſ. 28 S.) Würklich erſcheint uns der Mond bey Tage, wie eine mittelmäßig helle Wolke, weil manche Wolken matter, andere dagegen glänzender ausſehen, wie der Mond.

Will man die Beſtimmungen $\frac{1}{n\,(e^{\eta} - 1)} =$ 6, und $n = \frac{1}{2}$ als ohngefehr richtig annehmen, ſo iſt $1 = 3\,(e^{\eta} - 1)$, alſo $e^{\eta} = \frac{4}{3} = \frac{1}{V}$. Das hieſſe alſo annehmen, das Licht werde ohngefehr um den vierten Theil geſchwächt, wenn es in der Atmoſphäre lothrecht herab fällt. Auch wird hiemit zugleich angenommen, die ſenkrechte Erleuchtung einer wagerecht liegenden Ebene von der im Scheitel ſtehenden Sonne, ſey 6 mahl gröſſer, als die Erleuchtung, welche dieſelbe Ebene alsdenn von der ganzen Atmoſphäre empfängt.

407. §.

Die Klarheit der Atmoſphäre, auch wie wir ſie vermittelſt des Geſichts empfinden, iſt nicht an allen Stellen einerley: die Stellen, welche ſich in der Nachbarſchaft der Sonne befinden, ſcheinen uns klärer als die übrigen, deren ſcheinbarer Abſtand von der Sonne gröſſer iſt. Herr Bouguer iſt willens geweſen, vermittelſt ſeines im 305 §. beſchriebenen Lichtmeſſers (103 Fig.) hierüber Verſuche anzuſtellen, zum Theil hat er ſie würklich angeſtellet: allein die Reſultate davon hat er nicht in diejenige Handſchrift ſeines Traité d'optique eingetragen, nach welcher Hr. de la Caille den Abdruck hat veranſtallten laſſen. Das Verfahren ſelbſt bey dieſen Verſuchen iſt a. a. O. Liv. I. Sect. II. Art. VI. VII. VIII. beſchrieben, für die Zahlen aber, welche die Reſultate der Verſuche anzeigen, ſind Lücken gelaſſen. Nur ſo viel findet ſich Art. VI. angezeigt: bey einer Höhe der Sonne von 25° ſey die Atmoſphäre an einer um 8 bis 9° von der Sonne entfernten Stelle 4 mahl klärer geweſen, als an einer um 31° bis 32° davon entfernten Stelle. Der Verſuch iſt mehrmahls jederzeit bey recht heiterer Luft wiederhohlt worden. Es iſt zu bedauren, daß nicht allein andere hieher gehörige Verſuche, ſondern auch diejenigen haben unvollſtändig angezeigt werden müſſen, deren im VIII. Art. erwehnt wird, die dazu gedient haben, die von der Sonne kommende Erleuchtung mit derjenigen, welche von der Atmoſphäre herrührt, zu vergleichen.

408. §.

Es ſtelle wie vorhin, AD die Erdfläche, CB die äuſſere damit parallele Gränze der Atmoſphäre vor,

das Sonnenlicht falle durch die Atmoſphäre in der Richtung FD, und in A befinde ſich das Auge des Zuſchauers, welches nach der Richtung AB in die Atmoſphäre hinein ſiehet; ſo hängt ohne Zweifel die ſcheinbare Klarheit der Stelle B von derjenigen Erleuchtung ab, welche alle in der Richtung AB befindliche Lufttheilchen zuſammen genommen nach A ſchicken. Jedes dieſer Lufttheilchen in einer unbeſtimmten Stelle M empfängt Sonnenlicht, das in der Atmoſphäre den Weg FM zurück gelegt hat, und eben deswegen ſchon geſchwächt iſt: nur iſt dieſe Schwächung, die das Sonnenlicht ſchon erlitten hat, deſto geringer, je näher M der äuſſerſten Stelle B iſt. Das ſolchergeſtalt vom Sonnenlicht erleuchtete Lufttheilchen M zerſtreuet einen Theil des auffallenden Lichts nach allen Seiten, und das von M nach A ſtrahlende Licht leidet auf dem Wege MA eine abermahlige Schwächung, indem es die auf dieſer Strecke befindlichen Lufttheilchen durchdringt.

Auſſer dem Sonnenlicht, welches M grade zu auf dem Wege FM empfängt, wird die Erleuchtung deſſelben Theils noch durch dasjenige Licht verſtärkt, was alle übrige umher befindliche Lufttheilchen demſelben zuſenden, theils durch dasjenige, was die erleuchtete Erdfläche dahin zurück wirft. Das alles müſte in Rechnung gebracht werden, wenn man die ſcheinbare Klarheit der Atmoſphäre an einer gegebenen Stelle, vermittelſt analytiſcher Schlüſſe ſuchen wollte. Indeſſen bleibt diejenige Erleuchtung, welche die auf der Strecke AB befindlichen Lufttheilchen grade zu von der Sonne empfangen, allemahl die beträchtlichſte: deswegen müſſen die

For-

Formuln ſchon Reſultate geben, die ſich der Wahrheit ziemlich nähern, wenn man auch das grade zu auffallende Sonnenlicht mit in Rechnung bringt.

409. §.

Die ſcheinbare Klarheit einer Stelle der Atmoſphäre in gegebener Höhe über dem Horizont zu finden, wenn die Höhe der Sonne ebenfalls gegeben iſt: vorausgeſetzt, daß die Erdfläche AD, alſo auch die mit ihr parallele Gränze der Atmoſphäre BC als eine ebene Fläche angenommen werden könne.

Aufl. Es ſey AC # DE die Scheitellinie, 126. Fig.
$CAB = \gamma$ der Abſtand der gegebenen Stelle der Atmoſphäre vom Scheitel, und $EDF = \omega$ der Abſtand der Sonne vom Scheitel. Ferner ſey MP auf AC ſenkrecht, und CNG ſey eine krumme Linie, deren Ordinaten PN ſich eben ſo, wie die Dichtigkeiten der Luft in verſchiedenen Höhen AP ändern, und man ſetze $CP = x$, $PN = y$, $CA = 1$; ſo iſt $AM = (1 - x) \sec\gamma$, $PM = (1 - x) \operatorname{tg} . \gamma$ $BM = x \sec\gamma$ und $FM = x \sec\omega$. Die Subtangente der Lichtverminderungslinie, in einer gleichförmig und eben ſo dichten Luft, als die untere nahe an der Erdfläche iſt, ſey $= c$.

Der Winkel $CAB = \gamma$ wachſe um das Element $BAb = d\gamma$, ſo wächſt $PM = (1 - x) \operatorname{tg}\gamma$ um das Element $MQ = (1 - x)\, d . \operatorname{tg}\gamma$, und wenn die ganze Figur ſich um die Axe AC drehet, ſo beſchreibt PM einen Kreis, deſſen Fläche $= \pi (1 - x)^2 \operatorname{tg}\gamma^2$ iſt, MQ aber einen Ring, deſſen Fläche $\pi (1 - x)^2\, d . \operatorname{tg}\gamma^2$ iſt. Wächſt ferner auch $CP = x$ um das Element $Pp = dx$, ſo erhält man einen körperlichen

chen

chen Ring, und ſein Inhalt $= \pi (1-x)^2\, dx \,.\, d.\, \mathrm{tg}\gamma^2$. Drehete ſich die Figur nur durch einen unendlich kleinen Winkel $d\varphi$ um AC, ſo erhielte man ein Element jenes flachen Ringes $=$ PM $.\, d\varphi (1-x)\, d\, \mathrm{tg}\gamma = \frac{1}{2} d\varphi (1-x)^2\, d\,.\, \mathrm{tg}\gamma^2$, und des körperlichen Ringes $= \frac{1}{2} d\varphi\, dx\, (1-x)^2\, d\,.\, \mathrm{tg}\gamma^2$. Stellt man ſich um A eine Kugelfläche vor, deren Halbmeſſer AK $= 1$ iſt; ſo iſt die Zone derſelben, welche der Bogen K$k = d\gamma$ beſchreibt, das Maaß der ſcheinbaren Ausdehnung jener Ringe; mithin dieſe ſcheinbare Ausdehnung $= 2\pi\, d\gamma\, \sin\gamma$ und die ſcheinbare Ausdehnung eines Elements MmqQ von dieſem Ringe, wenn die Figur ſich um AC nur durch einen unendlich kleinen Winkel drehete, $= d\varphi d\gamma \sin\gamma$.

Die Klarheit eines Lufttheilchens F an der höchſten Gränze der Atmoſphäre ſey $= 1$, und das Licht nehme auf dem Wege FM in dem Verhältniß $1 : v$ ab, ſo iſt die Klarheit des Lufttheilchens M $= v$, weil die Klarheit deſſelben ſich wie die Erleuchtung verhält, die es von der Sonne empfängt. Wenn nun FM $= w$ geſetzt wird, die Dichtigkeit der Luft in der Schichte PM$mp = y$, ihre Dichtigkeit bey A $= 1$, ſo iſt $l\,\frac{1}{v} = \frac{\int y dw}{c}$ (380. §. wenn daſelbſt $m = 1\,.\,c$, und $1 : V = e : 1$ geſetzt wird), mithin $l\,\frac{1}{v} = \frac{\mathrm{sec}\,\omega\,.\,\int y \delta x}{c} = \frac{\mathrm{CNP}\,.\,\mathrm{sec}\,\omega}{c}$, und $v = e^{-\mathrm{CNP}\,\mathrm{sec}\,\omega : c}$. Dieſe Klarheit wird noch weiter geſchwächt, indem das Licht durch die Luft von M nach A ſcheint. Wird nemlich die

Klar-

Klarheit in A $= z$ geſetzt, ſo iſt $l\,\frac{v}{z} = \frac{\int y d \,.\, MA}{c} = \frac{GNPA \,.\, \sec\gamma}{c}$, alſo $lv - lz = -\frac{CNP \,.\, \sec\omega}{c} - lz = \frac{GNPA \,.\, \sec\gamma}{c}$, oder $l\,\frac{1}{z} = \frac{CNP \sec\omega + GNPA \sec\gamma}{c}$. Es ſey GCA $=$ A, ſo iſt GNPA $=$ A $-$ CNP, alſo $l\,\frac{1}{z} = \frac{CNP(\sec\omega - \sec\gamma) + A \sec\gamma}{c}$, und $z = e^{-((\sec\omega - \sec\gamma)\int y dx + A \sec\gamma) : c}$.

Das Verhältniß $1 : v'$, worin das Licht geſchwächt wird, wenn es vertical herab fällt, und den Weg CP zurück legt, giebt die Gleichung $l\,\frac{1}{v'} = \frac{\int y dx}{c}$, und eben dieſe Zahl $\frac{\int y dx}{c}$ verhält ſich wie die Zahl der Lufttheilchen, die das Licht auf dem Wege CP durchdringt. (327. 328. §.) Dieſemnach durchdringt es auf dem Wege Pp eine Anzahl von Lufttheilchen die ſich wie $\frac{y dx}{c}$ verhält. In jeder Schichte wie PpqQ ſind die Lufttheilchen gleichförmig vertheilt, alſo muß ſich die Menge derſelben in jedem Theil dieſer Schichte der Grundfläche dieſes Theils proportional ſeyn. Man ſtelle ſich eine ſolche Schichte vor, deren Grundfläche $= 1^2$ iſt, und nehme die Zahl der Lufttheilchen in derſel-

ben = $\frac{ydx}{c}$ an, ſo iſt ſie in einer ringförmigen Schichte, deren Breite MQ iſt, = $\frac{\pi(1-x)^2\, ydx\, d\,.\,tg\gamma^2}{c}$, denn man hat $1^2 : \pi(1-x)^2\, tg\gamma^2 = \frac{ydx}{c} : \frac{\pi(1-x)^2 ydxd\,.\,tg\gamma^2}{c}$.

Dieſemnach iſt die Zahl der Lufttheilchen in dem Element M*mq*Q dieſer Schichte, welches beſchrieben wird, wenn ſich die Figur um AC durch einen unendlich kleinen Winkel drehet = $\frac{\frac{1}{2}\, d\phi\, (1-x)^2\, ydx\, d\,.\,tg\gamma^2}{c}$.

Wenn man nun jedes Lufttheilchen als einen leuchtenden Punct betrachtet, der das Licht nach den im 2 §. angenommenen Geſetzen um ſich her verbreitet; ſo iſt die ſenkrechte Erleuchtung, welche jedes Lufttheilchen nach A ſendet, = $\frac{z}{AM^2}$, alſo ſenden alle zu dem Element M*mq*Q gehörigen Lufttheilchen nach A die ſenkrechte Erleuchtung $\frac{\frac{1}{2} z d\phi\,.\, ydx\, d\,.\,tg\gamma^2}{c\,.\,sec\gamma^2}$. Wird nun die geſammte Erleuchtung, welche alle von B bis M befindliche Lufttheilchen nach A ſenden, = I geſetzt; ſo iſt diejenige, welche von den in M*mq*Q befindlichen nach A geworfen wird, = dI. Ferner iſt $d\,.\,tg\gamma^2 = 2\,tg\gamma\,.\,d\,tg\gamma = 2\,tg\gamma\, d\gamma : cos\gamma^2$, oder $d\,.\,tg\gamma^2 = 2\,tg\gamma\, sec\gamma^2\, d\gamma$, alſo $\frac{d\,.\,tg\gamma^2}{sec\gamma^2} = 2\,tg\gamma\,.\,d\gamma$. Wenn demnach ſtatt z der vorhin gefundene Werth gebraucht

braucht wird, ſo erhält man $dI = \mathrm{tg}\,.\gamma\, d\gamma\, d\varphi\; e^{-((\sec\omega - \sec\gamma)\int ydx + A\sec\gamma):c} \cdot \frac{ydx}{c}$. Um dies zu integriren ſetze man $((\sec\omega - \sec\gamma)\int ydx + A\sec\gamma):c = w$, ſo iſt $d\,.\,e^{-w} = -e^{-w}\,dw = e^{-w}(\sec\omega - \sec\gamma)\,\frac{ydx}{c}$, und $\frac{ydx}{c} = \frac{-d\,.\,e^{-w}}{e^{-w}(\sec\omega - \sec\gamma)}$. Das giebt $dI = \frac{\mathrm{tg}\gamma\, d\gamma\, d\varphi\, d\,.\,e^{-w}}{\sec\omega - \mathrm{se}\gamma}$; und weil allein x oder w veränderlich iſt, wenn ſich allein BM ändert, ſo erhält man $I = C - \frac{\mathrm{tg}\gamma\, d\gamma\, d\varphi\,.\,e^{-w}}{\sec\omega - \sec\gamma}$. Wenn BM, alſo auch x und $\int ydx$ verſchwinden, ſo iſt $w = \frac{A\sec\gamma}{c}$: weil nun zugleich I verſchwinden muß, ſo wird $C = \frac{\mathrm{tg}\gamma\, d\gamma\, d\varphi}{\sec\omega - \sec\gamma}\,.\,e^{-A\sec\gamma:c}$ gefunden, und man erhält $I = \frac{\mathrm{tg}\gamma\, d\gamma\, d\varphi}{\sec\omega - \sec\gamma}\,(e^{-A\sec\gamma:c} - e^{-w})$. Um die geſammte Erleuchtung zu haben, welche alle von B bis A befindliche Lufttheilchen nach A ſenden, muß man BM = BA, alſo x = CA, und $\int ydx = A$ ſetzen, ſo wird $w = \frac{A\sec\omega}{c}$, und

$$I = \frac{\mathrm{tg}\gamma\, d\gamma\, d\varphi}{\sec\omega - \sec\gamma}\,(e^{-A\sec\gamma:c} - e^{-A\sec\omega:c}).$$

Dieſe Erleuchtung durch die ſcheinbare Gröſſe $d\phi\, d\gamma\, \sin\gamma$ des zwiſchen den Gränzen dieſer körperlichen Ecke BΛb befindlichen Theils der Atmoſphäre dividirt, giebt die Klarheit eben dieſes Theils der Atmoſphäre $\Sigma =$

$$\frac{\sec\gamma}{\sec\omega - \sec\gamma}\left(e^{-A\sec\gamma : c} - e^{-A\sec\omega : c}\right).\ (38.\ 276.\ \S.)$$

In dem Fall $\omega = \gamma$ beſtimmt dieſe Formul nichts. Alsdenn aber iſt $dI = \mathrm{tg}\gamma\, d\gamma\, d\phi\ .\ e^{-A\sec\gamma : c}\frac{ydx}{c}$, alſo $I = \mathrm{tg}\gamma\, d\gamma\, d\phi\ .\ e^{-A\sec\gamma : c}\frac{\int ydx}{c}$, und für alle von B bis A befindliche Lufttheilchen $I = \frac{\mathrm{tg}\gamma\, d\gamma\, d\phi\ .\ A\, e^{-A\sec\gamma : c}}{c}$, und es wird $\Sigma = \frac{A\sec\gamma}{c}\, e^{-A\sec\gamma : c}$.

410. §.

Die gefundene Formul läßt ſich auch ſo ausdrücken:

$$\Sigma = \frac{\sec\gamma}{\sec\gamma - \sec\omega}\left(e^{-A\sec\omega : c} - e^{-A\sec\gamma : c}\right).$$

Um einigermaſſen zu überſehen, wie ſich dieſe Klarheit bey einerley Sonnenhöhe in verſchiedenen Entfernungen vom Zenith ändert, ſetze man $\frac{A\sec\omega}{c} = a$, $\frac{A\sec\gamma}{c} = z$, ſo iſt $\Sigma = \frac{z}{z - a}\left(e^{-a} - e^{-z}\right)$. Man ſuche die Fälle, wenn Σ am gröſten oder kleinſten wird, und ſetze in ſolcher

Abſicht

Abſicht $\frac{d\Sigma}{dz} = 0$; ſo giebt die Differentialrechnung $d \,.\, \frac{z}{z-a} = -\frac{adz}{(z-a)^2}$, $d \,.\, (e^{-a} - e^{-z}) = e^{-z} dz$, alſo ferner $z\,e^{-z} - \frac{a(e^{-a} - e^{-z})}{z-a} = 0$, und $\frac{(z-a)\,e^{-z}}{e^{-a} - e^{-z}} - \frac{a}{z} = 0$. Dieſer Gleichung geſchicht ein Gnüge, wenn man $z = a$, auch wenn man $z = \infty$ annimmt. Bey der Vorausſetzung $z = a$ verſchwinden zwar Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{(z-a)\,e^{-z}}{e^{-a} - e^{-z}}$: man darf aber nur erwägen, das ein Bruch wie $\frac{p}{q}$ auch $= \frac{p+dp}{q+dq}$ ſey, mithin derſelbe $= \frac{dp}{dq}$ werde, wenn p und q verſchwinden. Hier wird $dp = -(z-a)\,e^{-z} dz + e^{-z} dz$, und $dq = e^{-z} dz$, alſo $\frac{dp}{dq} = \frac{e^{-z} - (z-a)\,e^{-z}}{e^{-z}} = 1 - (z-a) = 1$, wenn $z = a$ iſt. Ferner iſt $(z-a)\,e^{-z} = \frac{z-a}{e^z}$, und $e^z = 1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z^3 \ldots$

(387 §.), alſo $(z-a)\,e^{-z} = \frac{z-a}{1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3 \ldots}$. Dieſer Bruch verſchwindet, wenn $z = \infty$ geſetzt wird: mithin leiſtet dieſe Vorausſetzung der gefundenen Gleichung ebenfalls ein Genüge.

Setzt man $z = a$, ſo iſt $\gamma = \omega$, und $\Sigma = \frac{A\ \sec\omega}{e}\, e^{-A\ \sec\omega : c}$; ſetzt man $z = \infty$, ſo iſt $\gamma = 90°$, und $\Sigma = e^{-A\ \sec\omega : c}$. Beyde Werthe ſind gröſte: alſo fallen die Stellen, wo die Klarheit der Atmoſphäre am gröſten iſt, einmahl in die Stelle der Sonne ſelbſt, und hiernächſt in den Horizont.

411. §.

Wenn man ſich eine lothrechte Luftſäule AC vorſtellet, deren Grundfläche $= 1^2$, ſo iſt die darin enthaltene Luftmaſſe der vorhin gebrauchten Bezeichnung gemäß $=$ A. Die Höhe der bis auf die Dichtigkeit der untern Luft zuſammen gedrückten Atmoſphäre ſey wie im 377 §. $= k$, und wie hier angenommen iſt, die Dichtigkeit der untern Luft $= 1$, ſo wird $A = 1 . k$. Die Zahl der Lufttheilchen in dieſer Höhe iſt alſo $= \frac{A}{c} = \frac{k}{c}$. Eben dieſe Zahl iſt der Logarithme des Verhältniſſes, worin das Licht geſchwächt wird, wenn es durch die Atmoſphäre vertical herab fällt: wenn alſo dies Verhältniß $1 : V$ iſt, ſo hat man log. nat. $\frac{1}{V} = \frac{k}{c}$, und $c = \frac{k}{2{,}3025851\ \text{log. tab.}\ (1 : V)}$ oder

oder $c = \frac{0,4342944 \cdot k}{\text{log. tab.} (1 : V)}$. Wird nun die Zahl $\frac{0,4342944}{\text{log. tab.} (1 : V)} = n$ angenommen, ſo erhält man $c = n\,k$, und

$$\Sigma = \frac{\text{ſec}\gamma}{\text{ſec}\gamma - \text{ſec}\omega} \left(e^{-\text{ſec}\omega : n} - e^{-\text{ſec}\gamma : n}\right),$$

in dem Fall $\gamma = 0$ aber

$$\Sigma = \frac{\text{ſec}\gamma}{n}\, e^{-\text{ſec}\gamma : n}.$$

Aus dieſen Formuln kann die Rechnung für jeden beſondern Fall leicht angeſtellet werden, wenn man die Zahl n hat. Nach Hn. Lambert wäre log. tab. (1 : V) = 0,23 (398. §.); oder wie er im 945 §. ſeiner Photometrie annimmt log. tab. (1 : V) = 0,2; und das giebt $n = 2,171472$, woraus ferner folgende Zahlen gefunden werden.

Abſt. d. O. v. Scheitel	Klarheit im Horizont.	Klarheit neben der ☉.	Klarheit im Scheitel.
0°	0,6310	0,2906	0,2906
10°	0,6265	0,2923	0,2897
20°	0,6126	0,3002	0,2864
30°	0,5876	0,3123	0,2805
40°	0,5482	0,3248	0,2710
50°	0,4885	0,3500	0,2562
60°	0,3972	0,3666	0,2338
70°	0,2602	0,3503	0,1927
80°	0,0705	0,1870	0,1178

Für gröſſere Entfernungen vom Scheitel als bis auf 50 Grade dürfte dieſe Tafel wohl nicht brauchbar ſeyn, weil die mit der Erdfläche parallelen Schnitte der Atmoſphäre als ebene Flächen ſind angenommen worden.

412. §.

Die 126 Fig. ſtellt die Linien AB, DF beyde in einerley Ebene, nemlich in der Verticalfläche der Sonne vor: wäre die höchſte Gränze der Atmoſphäre würklich eine ebene die Scheitellinie ſenkrecht ſchneidende Fläche; ſo würde in den Schlüſſen des 410 §. und den darauf gegründeten Rechnungen nichts geändert werden, wenn gleich AB in einer andern Verticalfläche angenommen würde. Stellt man ſich den ganzen Ring vor, wozu der Halbmeſſer PM und das Element MQ gehört, ſo erhellet, daß das Sonnenlicht allemahl einen Weg = FM in der Atmoſphäre zurück lege, bevor es auf MQ fällt, wo auch dieſe Stelle im Umfang des Ringes angenommen wird, ſo wie übrigens für einerley Ring, auch AM einerley Gröſſe behält. Weil aber die höchſte Gränze der Atmoſphäre nur ſo lange einer ebenen Fläche nahe kommt, als der Winkel CAB wenige Grade faſſet, ſo erhellet, daß die Klarheit jeder Stelle der Atmoſphäre auch von dem Azimuthalwinkel abhängen werde, den die dazu gehörige Verticalfläche mit der Verticalfläche der Sonne einſchließt.

Nach einer vom Hn. Bouguer angeſtellten Erfahrung (Traité d'optique Liv. I. Sect. II. Art. VI. pag. 73.) iſt die Klarheit der Atmoſphäre in gleichen Höhen über dem Horizont, oder in einerley Parallelkreis mit dem Horizont, nicht überall einerley. Bey einer Höhe der Sonne von 15 bis 20 Graden hat er vermittelſt ſeines Lichtmeſſers die Klarheit der Atmoſphäre zu beyden Seiten der Sonne in einerley Parallelkreiſe mit dem Horizont bey wachſender Entfernung vom Verticalkreiſe der Sonne anfangs abneh-

abnehmend gefunden, bis zu einer um 110° bis 120° vom Scheitelkreiſe der Sonne entfernten Stelle: daſelbſt fand er die Klarheit am kleinſten, nachher aber wieder wachſend, bis zu der um 180° von dem Scheitelkreiſe der Sonne entfernten Stelle, da er ſie wieder am gröſten fand.

413. §.

Auſſer der nicht völlig der Natur gemäſſen Vorausſetzung, daß die höchſte Gränze der Atmoſphäre eine ebene Fläche ſey, dürfte auch eine andere, welche im 210 §. zum Grunde genommen iſt, ihre Einſchränkung leiden, diejenige nemlich, daß von jedem Element der Luft das Licht ſich nach allen Seiten wie von einem leuchtenden Punct ausbreite, nicht anders, als wenn jedes Lufttheilchen ein unendlich kleiner ſphäriſcher Spiegel wäre. Ferner ſind bey der Rechnung des 410 §. auch noch verſchiedene Urſachen, welche die Klarheit eines jeden Lufttheilchens vermehren, beyſeit geſetzt worden: denn jedes Lufttheilchen empfängt auſſer dem grade zu darauf fallenden Sonnenlicht, welches a. a. O. allein iſt in Rechnung gebracht worden, auch noch Licht von allen um daſſelbe herum befindlichen Lufttheilchen; auch wird es von denjenigen Licht erleuchtet, welches die Erdfläche dahin zurück ſendet. Herr Lambert (Photom. §. 958 - 973.) hat auch darüber Rechnungen angeſtellet, wie ſich die Klarheit eines Lufttheilchens, die ihm nicht allein die Erdfläche zuſendet, ſondern auch von allen umher befindlichen Lufttheilchen dahin geworfen wird, mit der von der Sonne allein demſelben mitgetheilten Klarheit vergleichen laſſe. Er nimmt aber auch dabey die höchſte Gränze der Atmoſphäre als eine ebene Fläche an,

um nicht auf gar zu ſehr verwickelte Formuln zu gerathen, die ohnehin ſchon ſehr verwickelt bey Aufloͤſung der Aufgabe ausfallen, wenn die Klarheit geſucht wird, welche alle uͤbrige umher befindliche Lufttheilchen dem als gegeben angenommenen zuſenden. Ueberdem betrachtet Hr. Lambert bey dieſen Unterſuchungen die Atmoſphaͤre ſo, als wenn ſie bis auf die Dichtigkeit der untern Luft zuſammengedruͤckt waͤre, nachdem er vorher bewieſen hat, daß bey Aufloͤſung der Aufgabe des 410 §. eben die Vorausſetzung haͤtte angenommen werden koͤnnen, ohne daß ſolches das geſuchte Reſultat ſelbſt geaͤndert haͤtte.

Geſetzt aber man koͤnnte auch die Rechnungen ohne zu groſſe Schwierigkeit auf Vorausſetzungen gruͤnden, die der Natur gemaͤſſer waͤren; ſo wuͤrden ſie doch allemahl einen beſondern Zuſtand der Atmoſphaͤre vorausſetzen muͤſſen, weil die Luft bald mehr, bald weniger undurchſichtig iſt, auch die zarten Duͤnſte, welche die Durchſichtigkeit der Luft vermindern, bald mehr in der einen, bald mehr in der andern Gegend angehaͤuft, und vielleicht nie in demjenigen Theil der Atmoſphaͤre, der uͤber dem Horizont befindlich iſt, nach einem ſolchen Geſetz vertheilt ſind, daß ſich durch eine analytiſche Formul, vermittelſt bekannter Kunſtgriffe ausdruͤcken lieſſe. Wie denn auch eben dieſe Duͤnſte bald in den Wolken ſichtbar werden, bald unſichtbar bey ganz heiter ſcheinenden Himmel in der Luft ſchweben. Um alſo nur einigermaſſen die Klarheit ſocher Gegenſtaͤnde, die vom Tageslicht erleuchtet ſind, wenn nur ein Theil des ſcheinbaren Himmelsgewoͤlbes dahin ſcheinen kann, mit der Klarheit zu vergleichen, die ihnen

das

das ganze ſcheinbare Himmelsgewölbe mittheilen würde; kann man eine gewiſſe mittlere Klarheit deſſelben, ſo wie ſie im 406 §. ohngefehr beſtimmt iſt, vorausſetzen, und bey der Rechnung annehmen, daß das ganze ſcheinbare Himmelsgewölbe überall eine ſolche Klarheit habe, die der angenommenen mitlern Klarheit gleich iſt.

414. §.

Es ſey ABEF eine Mauer, die auf die wagrechte Ebene ABCD ihren Schatten wirft, wenn ſie auf der andern Seite von der Sonne erleuchtet iſt: man ſucht die Klarheit einer im Schatten gegebenen Stelle M. 15 F.

Aufl. Was im Schatten liegt, den die Mauer auf die Ebene ABCD wirft, wird allein von dem ſcheinbaren Himmelsgewölbe, und zwar nur von demjenigen Theil deſſelben erleuchtet, den die Mauer dem Auge, wenn es in M befindlich wäre, nicht bedeckte. Man ſuche alſo die Erleuchtung, welche der von der Mauer bedeckte Theil des Himmelsgewölbes nach M werfen würde, und ziehe ſie von der abſoluten Erleuchtung ab, ſo hat man diejenige Erleuchtung, welche M vom Tageslicht empfängt. Der von der Mauer dem in M befindlichen Auge bedeckte Theil des Himmelsgewölbes iſt zwiſchen den Gränzen der pyramidenförmigen Ecke um M enthalten, wovon AMB, BME, EMF, AMF die Seitenflächen ſind, und wenn die Mauer ABEF ſelbſt mit einer eben ſo groſſen Klarheit glänzte, als das Himmelsgewölbe; ſo würde ſie die Stelle M eben ſo ſtark als der von ihr bedeckte Theil des Himmelsgewölbes erleuchten.

Man

Man ſetze nun die aus M geſehene ſcheinbare Höhe der Mauer PMQ $= \alpha$, ihre untere ſcheinbare Breite AMB $= \beta$, ihre obere ſcheinbare Breite EMF $= \gamma$, ſo findet man die Erleuchtung, welche der bedeckte Theil des Himmels auf M werfen würde, aus dem 72 §. $= \frac{1}{2} (\beta - \gamma \cos \alpha)$, die Klarheit der leuchtenden Fläche = 1 geſetzt. Wenn alſo hier Σ die mittlere Klarheit der Atmoſphäre bezeichnet, ſo iſt die Erleuchtung, welche M vom Tageslicht empfängt, $= \pi \Sigma - \frac{1}{2} \Sigma (\beta - \gamma \cos \alpha$, oder eben dieſe Erleuchtung $I = \Sigma (\pi - \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \gamma) \cos \alpha)$.

Erſtreckte ſich die Mauer zu beyden Seiten ſehr weit in die Länge fort, daß man wenigſtens beynahe β und $\gamma = \pi$ ſetzen könnte; ſo wäre die geſuchte Erleuchtung $I = \frac{1}{2} \pi \Sigma (1 + \cos \alpha)$, oder auch $I = \pi \Sigma (\cos \frac{1}{2} \alpha)^2$ (425 §. Geom.) Wird überdem die Stelle M ſo nahe bey der Mauer angenommen, daß α ein rechter Winkel wird, ſo wird eben dieſe Erleuchtung $= \frac{1}{2} \pi \Sigma$, wie der Natur der Sache gemäß iſt.

Wenn man die Weiſſe der erleuchteten Fläche = A ſetzt, ſo iſt die Klarheit der Stelle M $= \frac{A \times I}{\pi}$: wird alſo dieſe $= \sigma$ geſetzt, ſo hat man $\sigma = \frac{1}{2} A \Sigma (\pi - \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \gamma \cos \alpha)$, und in dem Fall der nach beyden Seiten ſehr weit fortlaufenden Mauer $\sigma = A \Sigma \cos \frac{1}{2} \alpha)^2$.

415. §.

Man ſtelle ſich über BC ebenfalls eine Mauer
15F. DAFO vor, welche die vorige ABEF in AF ſchneidet, und bezeichne ihre ſcheinbare Höhe, ihre untere und obere Breite aus M geſehen, mit α', β', γ',

ſo

ſo entzieht ſie der Stelle M die Erleuchtung $\frac{1}{2}\Sigma(\beta' - \gamma' \cos\alpha')$, und die Erleuchtung, welche M von dem Himmelsgewölbe empfängt, wird $= \Sigma(\pi - \frac{1}{2}(\beta + \beta') + \gamma \cos\alpha + \gamma' \cos\alpha')$ gefunden: daraus ergiebt ſich die Klarheit dieſer Stelle $\sigma =$

$$\Sigma . A \left(1 - \frac{\beta + \beta'}{2\pi} + \frac{\gamma \cos\alpha + \gamma' \cos\alpha'}{2\pi}\right).$$

Sind beyde Mauern einander parallel, und erſtrecken ſie ſich zu beyden Seiten auf Entfernungen, die in Vergleichung mit der Entfernung der Stelle M von jeder Mauer ſehr groß ſind, ſo iſt wenigſtens beynahe $\beta = \pi = \beta'$, und $\gamma = \pi = \gamma'$, und man erhält $\sigma = \frac{1}{2}\Sigma . A(\cos\alpha + \cos\alpha')$.

Wenn beyde Mauern einander in AF ſenkrecht ſchneiden, und dabey von A aus ſehr weit nach D und B fortlaufen, ſo iſt wenigſtens ſehr nahe MAB + MAD $= \beta + \beta' = \frac{3}{2}\pi$, mithin alsdenn die Erleuchtung in M $= \Sigma\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{\gamma \cos\alpha + \gamma' \cos\alpha'}{2\pi}\right)$.
Je kleiner überdem AM iſt, deſto mehr nähern ſich MFE $= \gamma$, MFO $= \gamma'$, dem rechten Winkel, eben ſo, wie AMF $= \alpha$ ſich dem rechten Winkel nähert. Nimmt man alſo M in A an, ſo wird die dahin fallende Erleuchtung $= \frac{1}{4}\pi\Sigma$ gefunden, wie ebenfalls der Sache gemäß iſt.

416. §.

Das Viereck EFGH ſtelle eine Fenſteröfnung in der Wand eines Zimmers vor, wodurch das Tageslicht ins Zimmer hinein ſcheint; auf dem wagrecht liegenden Fußboden ſey die Stelle *M* gegeben: man ſoll die Erleuchtung finden, die ſie vom Tageslicht empfängt. 15 F.

Aufl.

Aufl. Man ſetze PMQ $= \alpha$, PMR $= \alpha'$, AMB $= \beta$, BMF $= \gamma$ GMH $= \gamma'$. Wäre nun das ganze Rechteck ABHG offen, ſo fiele auf M eine Erleuchtung $= \frac{1}{2}\Sigma\,(\beta - \gamma' \cos\alpha')$; und davon muß derjenige Theil abgezogen werden, welchen das Stück des Himmelsgewölbes dahin ſchicken würde, das von dem Rechteck ABEF bedeckt wird. Dieſe Erleuchtung wäre $= \frac{1}{2}\Sigma\,(\beta - \gamma \cos\alpha)$; alſo fällt auf M eine Erleuchtung $= \frac{1}{2}\Sigma\,(\gamma \cos\alpha - \gamma' \cos\alpha')$.

Wird wiederum die Weiſſe des Fußbodens mit A bezeichnet, ſo iſt die Klarheit der Stelle M

$$= \frac{A.\Sigma}{2\pi}\,(\gamma \cos\alpha - \gamma' \cos\alpha').$$

417. §.

Bey der Erleuchtung, welche die Atmoſphäre verurſacht, wenn ſie ſelbſt von der Sonne erleuchtet wird, iſt noch der Umſtand merkwürdig, daß der wolkenfreye heitere Himmel mit einer ſchönen blauen Farbe erſcheint; und nichts iſt natürlicher, als daß man ſich die Erſcheinung dieſer blauen Farbe, den im XI. Abſchnitt und beſonders im 141 §. vorgetragenen Gründen gemäß, eben ſo, wie die Erſcheinung der Farben bey andern körperlichen Maſſen vorſtelle. Die Lufttheilchen zerſtreuen nemlich das blaue Licht nach allen Seiten, und laſſen dagegen das rothe und gelbe Licht am häufigſten durch: daraus erklärt es ſich zugleich, warum Sonne und Mond, wenn ſie am höchſten ſtehen, am weiſſeſten ausſehen, dagegen aber ſich nach und nach zu blaßgelb, orange und roth deſto mehr neigen, je näher ſie dem Horizont kommen. Weil nemlich der Weg, den die Strahlen von der nidrig ſtehenden Sonne oder dem nahe beym Horizont befindlichen Mond

durch

durch die Luft nehmen müſſen, viel länger iſt, als wenn dieſe Himmelskörper höher ſtehen; ſo werden deſto mehr blaue Strahlen nach allen Seiten zerſtreuet, und das durchgehende Licht muß mehr ins gelbe und rothe fallen. (M. ſ. Smiths Lehrbegrif der Optik 425. S. d. D. Ueberſ.) Indeſſen ſind auch andere Naturforſcher geneigt, dieſe blaue Farbe mehr den in der Luft ſchwebenden Dünſten, als den Lufttheilchen ſelbſt zuzuſchreiben, wovon Hr. Prof. Tetens in einer zu Roſtock im Jahr 1760 gehaltenen Diſputation: de cauſſa caerulei coeli coloris umſtändlich gehandelt hat. Wäſſerige Dünſte können daran nicht Antheil haben, weil die Himmelblaue Farbe in Italien, in der Schweiz, und an allen trockenen und erhabenen Orten weit ſchöner, als in andern mehr feuchten Gegenden, und ſo vortreflich iſt, daß kein Mahler ſie vollkommen nachahmen kann. (M. ſ. Lulofs Kenntniß der Erdkugel im 437 §. 394 S. d. d. Ueberſ.)

418. §.

Wenn die Sonne dem Horizont nahe iſt, und alsdenn der Schatten eines dunklen Körpers mit einer weiſſen Fläche aufgefangen wird, ſo erſcheint der Schatten mit einer mehr oder weniger lebhaften blauen Farbe, nachdem die übrigen Umſtände mehr oder weniger günſtig ſind. Otto Guerike hatte ſchon etwas dergleichen wahrgenommen, wie er in den Experimentis novis Magdeburgicis pag. 142. anführt. Er verſichert, wenn man des Morgens ein brennendes Licht verdecket, und den Schatten auf weiſſes Papier fallen läßt, daß dieſer blau und nicht ſchwarz ſeyn werde. Nach der Zeit iſt man auf dieſe Erſcheinung eben nicht aufmerkſam geweſen

ſen, bis im Julius des Jahrs 1742 Hr. v. Büffon bey Sonnen-Aufgang die blaue Farbe der Schatten bemerkte, als er des Abends zuvor wahrgenommen hatte, daß die Schatten der Bäume, die auf eine 30 bis 40 Fuß weit davon entfernte Mauer fielen, eine zarte grüne Farbe hatten, die etwas ins blaue fiel: wobey noch merkwürdig war, daß der Schatten einer nur drey Fuß weit von der Mauer entfernten Laube ſo grün erſchien, als wenn er ganz friſch mit Grünſpan gemahlet wäre. Am zweyten Abend fand er die Schatten wieder grün, nach der Zeit aber, nachdem er ſechs Tage lang an Fortſetzung dieſer Beobachtungen war gehindert worden, fand er die Schatten ſowohl beym Untergang, als auch bey Aufgang der Sonne ſchön Himmelblau. Dieſe Wahrnehmungen ſind in den Memoires de l'Academie de Paris A. 1743 erzählt, pag. 217 der Pariſer Ausgabe.

Im J. 1764 hat H. Beguelin dieſe Sache noch weiter unterſucht, und in den Memoires de l' Academie de Berlin pour l'Année 1767 p. 27. ſq. davon Nachricht gegeben. Nach ſeinen Wahrnehmungen fangen die Schatten des Abends an ſich blau zu färben, wenn der wagrechte Schatten eines Körpers achtmahl länger als der Körper ſelbſt, mithin die Sonne noch 7° 8′ hoch über dem Horizont iſt: indeſſen hat er auch ſchon um 3 Uhr Nachmittags am 19 Julius blaue Schatten wahrgenommen, als die Sonne in einem ſehr hellen Nebel gehüllet war, der ihr Licht ſchwächte. Alle dieſe Wahrnehmungen ſind ſoviele Beſtättigungen deſſen, daß die blauen Lichtſtrahlen von den Lufttheilchen am häufigſten nach allen Seiten zerſtreuet werden,

weil

weil die blaue Farbe der Schatten unter den angezeigten Umſtänden ſich ganz ungezwungen daraus erklären läßt. Hr. Beguelin verſichert, man könne dergleichen blaue Schatten faſt zu jeder Stunde des Tages in Zimmern wahrnehmen, welche das Sonnenlicht durch die Zurückwerfung von einem weiſſen Gegenſtande erhalten, wofern man nur von dem Ort des Verſuchs einen Theil des klaren Himmels entdecken, und alles ſo einrichten kann, daß der Schatten daher Licht empfängt. Die blaue Farbe wird alsdenn grade an denjenigen Stellen des Schattens verſchwinden, die von dem blauen Himmel kein Licht erhalten können. Dieſe und andere hieher gehörige Nachrichten findet man auch in Hn. Prieſtleys Geſchichte der Optik 3 Abſchnitts 3 Cap. 327. S. der Ueberſetzung.

Einige Zuſätze und Verbeſſerungen.

Zum 44. §.

Die Auflöſung dieſer Aufgabe iſt eine leichte Folge aus dem 35 §., wenn man den 42 §. damit verbindet: warum ich hier die ganz leichte und kurze Analiſin wieder herſetze, die, was den veränderlichen Factor betrift, eben die Differentialformul wie im 35 §. giebt, auch keine andere geben kann, wie aus Vergleichung beyder Stellen erhellet, wird man im 57 §. angezeigt finden.

Zum 45. §.

Ich habe hier und in einigen folgenden §. §. die Ausdrücke Strahlenmenge und Lichtmenge als gleichgültige gebraucht, im folgenden ſolches aber mehr vermieden, und lieber allein das Wort Lichtmenge behalten. Im 2 §. wird man den Grund finden, weswegen ich Strahlenmenge, und Lichtmaſſe, lieber unterſcheide, wofern es anders verſtattet iſt, ſich von den phyſiſchen Lichtſtrahlen die eben daſelbſt angenommene Vorſtellung zu machen. Jedes Element einer leuchtenden Fläche verbreitet die davon ausgehenden Strahlen nach allen Seiten gleichförmig, keineswegs aber die davon nach allen Seiten ausgehende Lichtmaſſe: nur alsdenn, wenn die Verminderung des Lichts wegen der Schieſe des Ausflußwinkels wegfällt, iſt die Menge des nach allen Seiten umher ſich ausbreitenden Lichts der Strahlenmenge proportional.

Im 46. §.

Sind die zwey erſten Perioden überflüßig, und ich bitte ſie ſo anzuſehen, als wenn ſie nicht da ſtün-

den,

den, und dieſer §. gleich ſo anfienge:

Die Menge Lichts, welche ein Element einer leuchtenden Fläche, wie L*l*, um ſich her verbreitet, wird als unendlich klein u. ſ. w.

Zum 47. §.

Nach den Worten: als eine endliche Gröſſe zu betrachten, und ſtatt der Zeile: Eigentlich hat es damit folgende Bewandniß, bitte ich folgendes zu leſen:

Denn vermöge der im 14 bis 16 §. feſtgeſetzten photometriſchen Grundbegriffe, kann S die Lichtmenge bezeichnen, die eine eben ſo ſtark glänzende Fläche nach allen Seiten umher ſtrahlen würde, wenn ihr Quadratinhalt $=1$ wäre; wogegen wenn die Formuln des 35 §. gebraucht werden, nur derjenige Theil dieſer Lichtmenge zu verſtehen iſt, der ſich zur ganzen nach allen Seiten umherſtrahlenden Lichtmenge, wie $\frac{1}{\pi} : 1$ erhält. Dieſe Lichtmenge wird in den analytiſchen Formuln durch eine Zahl ausgedruckt, welche ihr Verhältniß gegen diejenige Lichtmenge angiebt, die eine eben ſo groſſe Fläche von bekannten Glanz, den man $= 1$ annimmt, umher ſtrahlet. Eben ſo bringt man in den mechaniſchen Wiſſenſchaften, die Dichtigkeit andrer körperlicher Maſſen in Rechnung, wenn man ſie durch eine Zahl ausdruckt, die ihr Verhältniß gegen die Dichtigkeit des Waſſers angiebt. Wäre mein bisheriger Vortrag der erſten Gründe der Photometrie nicht befriedigend, und wollte man lieber, wie ſonſt gewöhnlich iſt, die Lichtſtrahlen als geometriſche von jedem Punkt ausgehende Linien betrachten, ſo könnte man in Rückſicht auf die am Ende des 39 §. beygefügte Folge annehmen, es habe hiemit folgende Bewandniß. u. ſ. w.

Zum

Auf der 338 S. am Ende der 12ten Zeile muß nach dem Wort: iſt, ein Punkt ſtehen, und das folgende bis zu den Worten: die geſuchte Lage des Strahls, ſo heiſſen:

Wollte man AO genauer ſuchen, ſo könnte hier die Gleichung aus dem 169 §., welche den Winkel γ beſtimmt, nicht gebraucht werden, weil in der Vorausſetzung $\gamma = \infty$ beſtändig $\gamma = 0$ bleibt, wo auch der Strahl auffällt. Demnach ſetze man $Am = e$, und die Winkel $AOQ = \alpha$, $OGm = \beta$, ſo hat man $\sin\beta = \frac{e}{\sqrt{(c^2+e^2)}}$, mithin $\sin\alpha = \frac{me}{n\sqrt{(c^2+e^2)}}$. Weil aber der Strahl aus Q auf M fallen ſoll, ſo wird erfordert, daß $\sin\alpha = \frac{b-e}{\sqrt{((b-e)^2+\delta^2)}}$ ſey, alſo beyde Werthe gleich geſetzt $\frac{me}{n\sqrt{(c^2+e^2)}} = \frac{b-e}{\sqrt{((b-e)^2+\delta^2)}}$, und dieſe Gleichung beſtimmt e für die geſuchte Lage des Strahls.

Verzeichniß einiger Druckfehler.

Auf der 32 S. lezte Z. ſtatt $e\pi cSzdz$ l. $2\pi cSz'dz$.
= = 41. 6 Z. ſtatt 13 §. l. 5. 6. §.
= = = 16 Z. ſtatt 13 §. l. 6. §.
= = = 17 Z. ſtatt *al* l. *ab*
= = = 21 Z. ſtatt *ae* l. *al*.
= = 77 S. 19 Z. ſtatt groſſer l. gröſter.
= = 79 S. 3 Z. ſtatt $M\mu$ l. Mm.
= = 119 S. 8 Z. ſtatt ABZY l. MABZY.
= = = = 18. Z. = RMQ l. PMQ.
= = 129 S. 14 Z. = $ACN = \zeta$ l. $ACN = \xi$.
= = = 16 u. 17 Z. = $\cos\zeta$ und $x \sin\zeta$ l. $\cos\xi$ und $x \sin\xi$.
= = 132 S. 6 Z. im Nenner $2bz$ l. $2z$.
= = 133 S. 10 Z. $\frac{y}{br}$ l. $\frac{ay}{br}$.
= = 135 S. 9 Z. 180^2 l. 180°.
= = 136 S. 8 Z. $(a^2+b^2-r^2)$ l. $a^2+b^2-r^2)^2$.
= = 138 S. 4 Z. a^2b^2 l. a^2+b^2.
= = = = 6 Z. um l. nun.
= = 152 S. 17 = 18 Z. wie auch von krummen Spiegelflächen wird zwar die Catoptrik Unterricht geben: iſt = = Statt deſſen l. wie auch von andern krummen Spiegelflächen wird die Catoptrik Unterricht geben, Iſt = =
= = 153 S. 6 Z. von unten der Punkt H, l. A.
= = 158 S. 19 Z. $\frac{\frac{1}{2}KL}{r}$ ſinACK l. $\frac{\frac{1}{2}KL}{r} = \sin ACK$.
= = 160 S. 6 Z. $v\sin\gamma$ l. $r\sin\gamma$.
= = 165 S. 9 Z. muß $1-\frac{1}{2}\sin\alpha^2$ in Parentheſi ſtehen.

Auf der 169 S. 4 Z. von unten $n\frac{1}{2}n^2$ l. $\frac{1}{2}n^3$.
= = 172 S. 5 Z. 0 bis x l. 0 bis α.
= = 173 S. lezte Z. der gröſte l. der kleinſte.
= = 174 S. 18 Z. $f=d$, l. $f-d$.
= = 179 S. 3 Z. von unten $2d\beta . d\pi$ l. $2d\beta : d\pi$.
= = = lezte Z. $d-r$ l. $\delta-r$.
= = 180 S. 9 Z. 2PM l. z,PM.
= = 181 S. 11 Z. $q\frac{1}{4}$MF l. $q=\frac{1}{4}$MF.
= = 185 S. 7 Z. v. unten $\frac{f}{\delta-f}$ l. $\frac{\delta f}{\delta-f}$.
= = 224 S. 10 Z. $\sqrt[3]{w}=r$ l. $\sqrt[3]{w}-r$.
= = 226 S. 7 Z. v. u. nach AS$=y$ ſetze man hinzu: als die Abſciſſe.
= = 227 S. 2 Z. v. u. $=\alpha$ l. $=a$.
= = 236 S. 12 Z. ſin$\delta\ \frac{m}{n}$ l. ſin$\delta=\frac{m}{n}$.
= = 246 S. 2 Z. v. u. aber l. oder.
= = 261 S. 12 Z. $\frac{1}{2}\varepsilon=\varphi$ l. $\frac{1}{2}\varepsilon-\varphi$.
= = 271 S. 4 Z. v. u. $\mu<1$ l. $\mu>1$.
= = 274 S. 3 Z. $\varepsilon 4\zeta$ l. $\varepsilon+\zeta$.
= = = S. 7 Z. ſetze man vor M das zeichen =
= = 300 S. 15 Z. $\frac{m}{m-n}=\nu$ l. $\frac{n}{m-n}=\nu$.
= = 301 S. 15 Z. im Zähler rf l. ϱf.
= = 306 S. 9 Z. $\varepsilon=\gamma$, l. $\varepsilon=-\gamma$.
= = 310 S. 20 Z. im Zähler muß was unter dem Wurzelzeichen iſt zwiſchen zweyen ( ) ſtehen.
= = 315 S. 3 Z. Strahl l. Winkel.
= = 328 S. 2 Z. v. u. CK l. EK.
= = 329 S. 3 Z. im Nenner $+r$ l. $+\varrho$.
= = 373 S. 5 Z. v. u. Licht l. leicht.
= = 378 S. lezte Z. im Nenner $(\delta-g^2)$ l. $(\delta-g)^2$.
= = 399 S. 1 Z. VW^2 l. VW.

Auf

Auf der 400 S. 8 Z. v. u. Licht l. leicht.
= = 404 S. 6 Z. muß vor r ein Comma ſtehen.
= = 407 S. 16 Z. tang KpD l. tang KpD^2.
= = 410 S. 9 = 10 Z. oder kleiner, lösche man weg.
= = 413 S. 6 Z. v. u. K^{2}M l. k^2M.
= = = = lezte Z. concentrale l. centrale.
= = 416 S. 11 Z. im Nenner b^4 l. b^2.
= = 417 S. 3 Z. v. u. $16x^{\frac{3}{2}}$ l. $16 \times \frac{3}{2}$.
= = 423 S. 10 Z. v. u. zweymahl im Nenner Nr l. Mr.
= = 426 S. 12 Z. ſehr nahe l. ſo nahe.
= = 442 S. 4 Z. v. u. FO l. 2FO.
= = 446 S. 14 Z. 0,0009 l. 0,0109.
= = 453 S. 7 Z. v. u. μa^2 l. $\mu^2 a^2$.
= = 457 S. 18 Z. $\eta : z$ l. $\eta . z$.
= = 490 S. 5 Z. v. u. ACF = I, l. ACF = ϑ.
= = 500 S. 18 Z. ſinηdy l. ſin$\eta d\eta$.
= = 528 S. 10 Z. v. u. Winkel AHF l. HAF.
= = 531 S. 3 Z. 232 §. l. 282 §.
= = = = 11 Z. S : Σ 1 : A l. S : Σ = 1 : A.
= = 533 S. 12 Z. $\Sigma\vartheta\mu$ l. $\Sigma d\mu$.
= = 534 S. 5 Z. coſE. M l. coſEM.
= = = = 11 Z. muß nach ſinα ein) ſtehen.
= = 535 S. 12 Z. fehlt im Zähler und Nenner am Ende ein).
= = 546 S. 4 Z. im Nenner $b - g$ l. $b - q$.
= = 566 S. 10 Z. iſt nur l. iſt mir.
= = 571 S. 18 Z. der Kern l. der Stern.
= = 574 S. 15 Z. §. 117 *ſqq* l. 1117 *ſqq*.
= = 585 S. 17 Z. wird das Wort: man weggelöſcht.
= = 589 S. 8 Z. v. u. $= x$. AD $= c$, l. $= x$, AD $= c$.
= = 592 S. 5 Z. v. u. = ML l. = M. L.
= = 596 S. 8 Z. v. u. polirte l. foliirte.
= = 603 S. im Anfang der 13 Z. fehlen die Worte: ſo iſt.

Auf

Auf der 610 S. 5 Z. v. u. $q\ldots:Q$ l. $q:Q$.

= = 612 S. 7 Z. muß nach dem Bruch $\frac{1}{1+2a^2h^2:f^2}$ die Ziffer 1 weggelöſcht werden.

= = 619 S. 11 Z. $mp\lambda^2u$ l. $mp\lambda^3n$.

= = 625 S. 2 Z. v. u. $\frac{N^2\,N^2}{3N-2N^2}$ l. $\frac{N^2}{3N-2N^2}$.

= = 641 S. 17 Z. ſo wie auch s, l. ſo wie auch λ.

= = 661 S. 19 Z. muß vor N ein Comma ſtehen.

= = 662 S. 12 Z. $l\frac{1}{\lambda}\ \frac{x}{f}$, l. $l\frac{1}{\lambda}=\frac{x}{f}$.

= = = 3. Z. v. u. im Nenner $1-p\lambda^2$ l. $1-p^2\lambda^3$.

= = 671 S. 2 u. 3 Z. v. u. 1000 l. 10000.

= = 672 S. 8 Z. v. u. lk, l. lK.

= = 680 S. 4 Z. muß vor $3k$ das Multiplikationszeichen ſtehen.

= = = 7 Z. v. u. $\frac{28}{3271}$ l. $\frac{28}{3272}$.

= = 684 S. 2 Z. fehlt im Nenner am Ende der Schluß der Parentheſe.

= = 685 S. letzte Z. $R-T+T$ l. $R-S+T$.

= = 687 S. 3 Z. $m=\frac{n}{\zeta}$ l. $m=\frac{\mu}{\zeta}$.

= = 699 S. 8 Z. 0,00000063761. 0,000000026376

= = 702 S. 2 Z. 0,077.. l. 1,077....

= = 704 S. 3 Z. $+-+'$ l. $t-t'$.

= = = 9 S. im Nenner 1.4...10 l. 2.4...10.

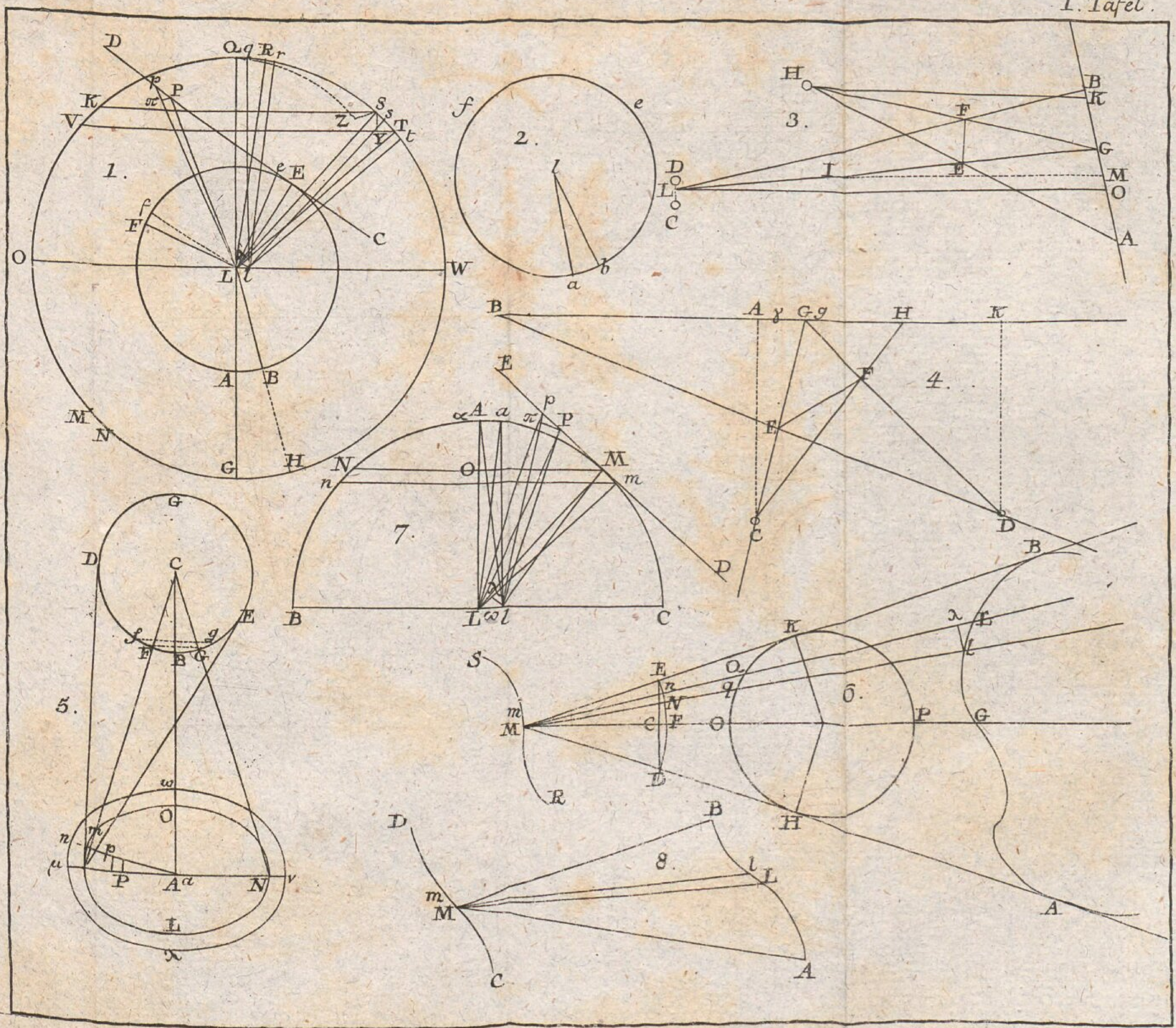
= = 707 S. 2 Z. v. u. $y^{\frac{2}{9}}$ l. $y^{\frac{9}{2}}$.

= = 719 S. 18 Z. nach k muß das Zeichen = und nach Toiſen ein Comma ſtehen.

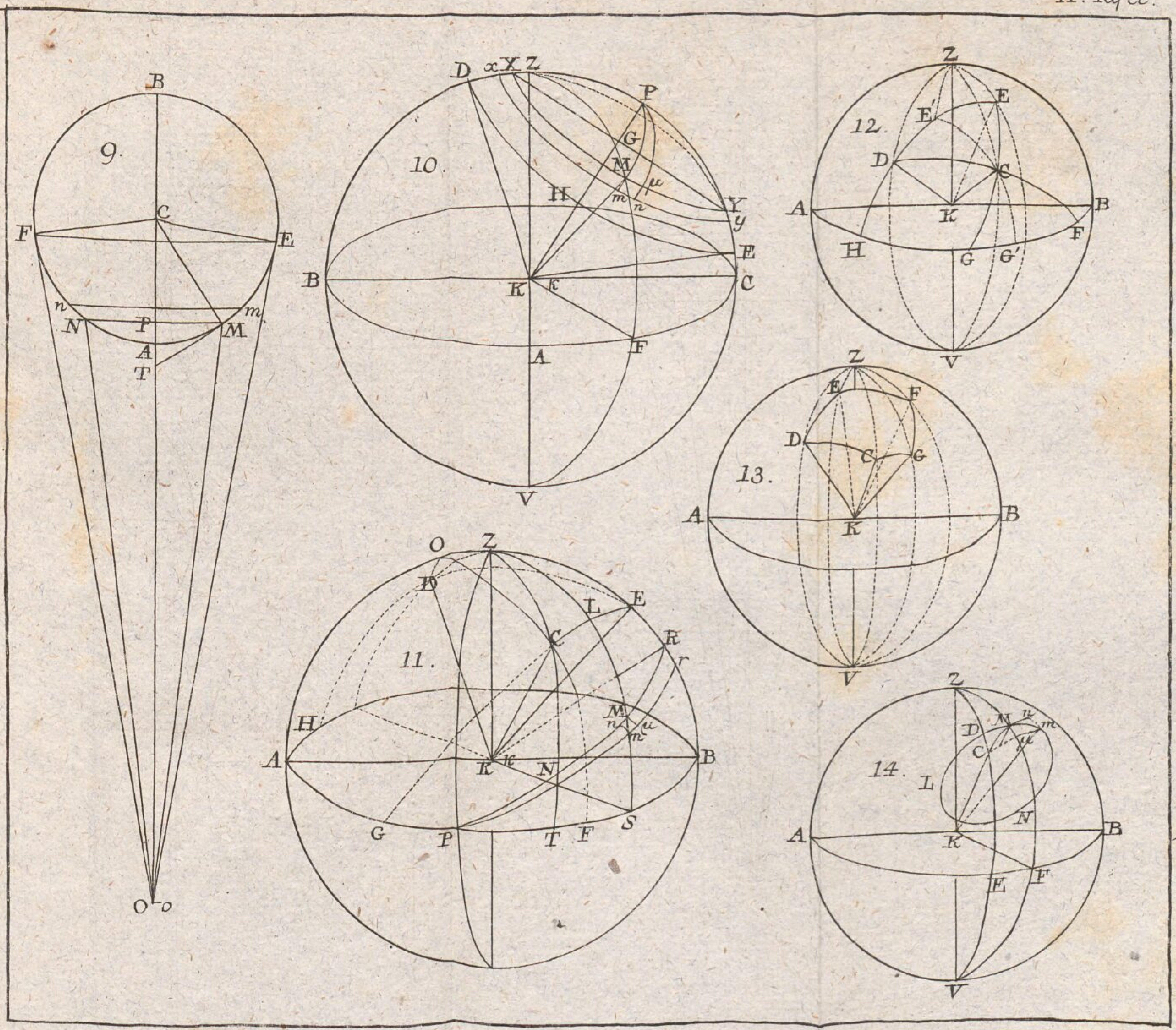
= = 721 S. 10 Z. 1000 l. 10000.

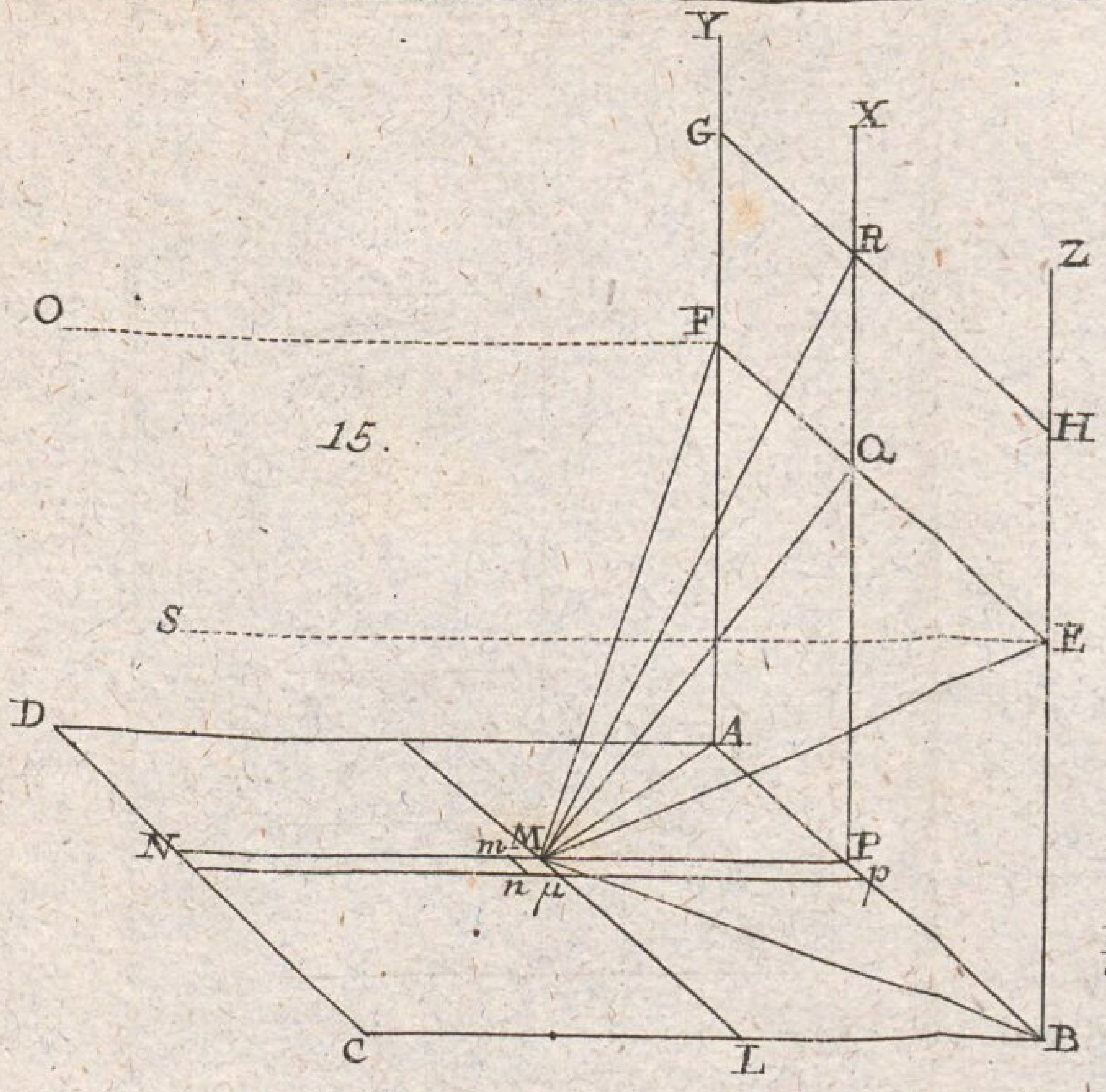
= = 727 S. 7 Z. v. u. nach -1 ſteht der Haken (verkehrt

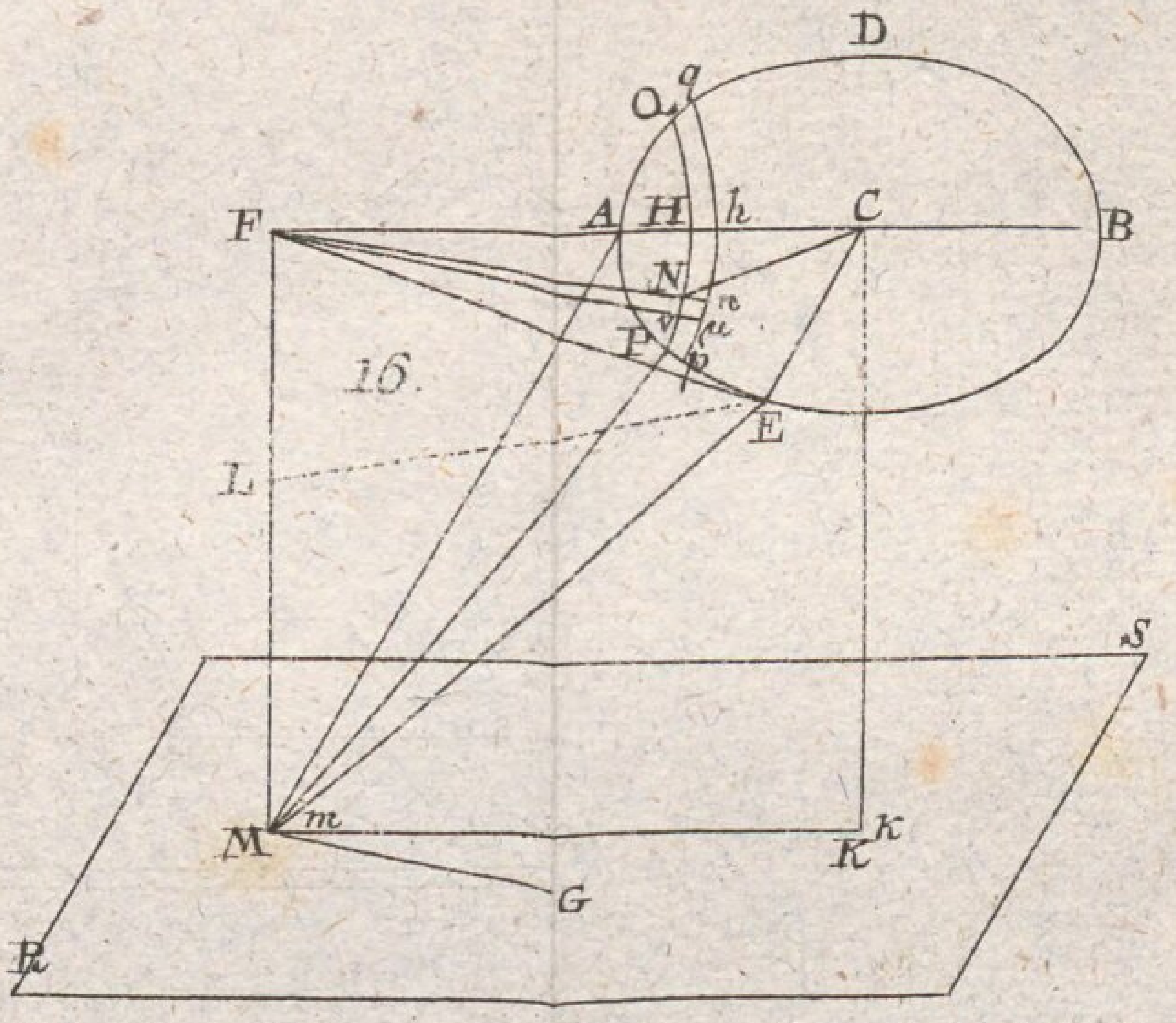
= = 728 S. 4 Z. 13 G l. BG.

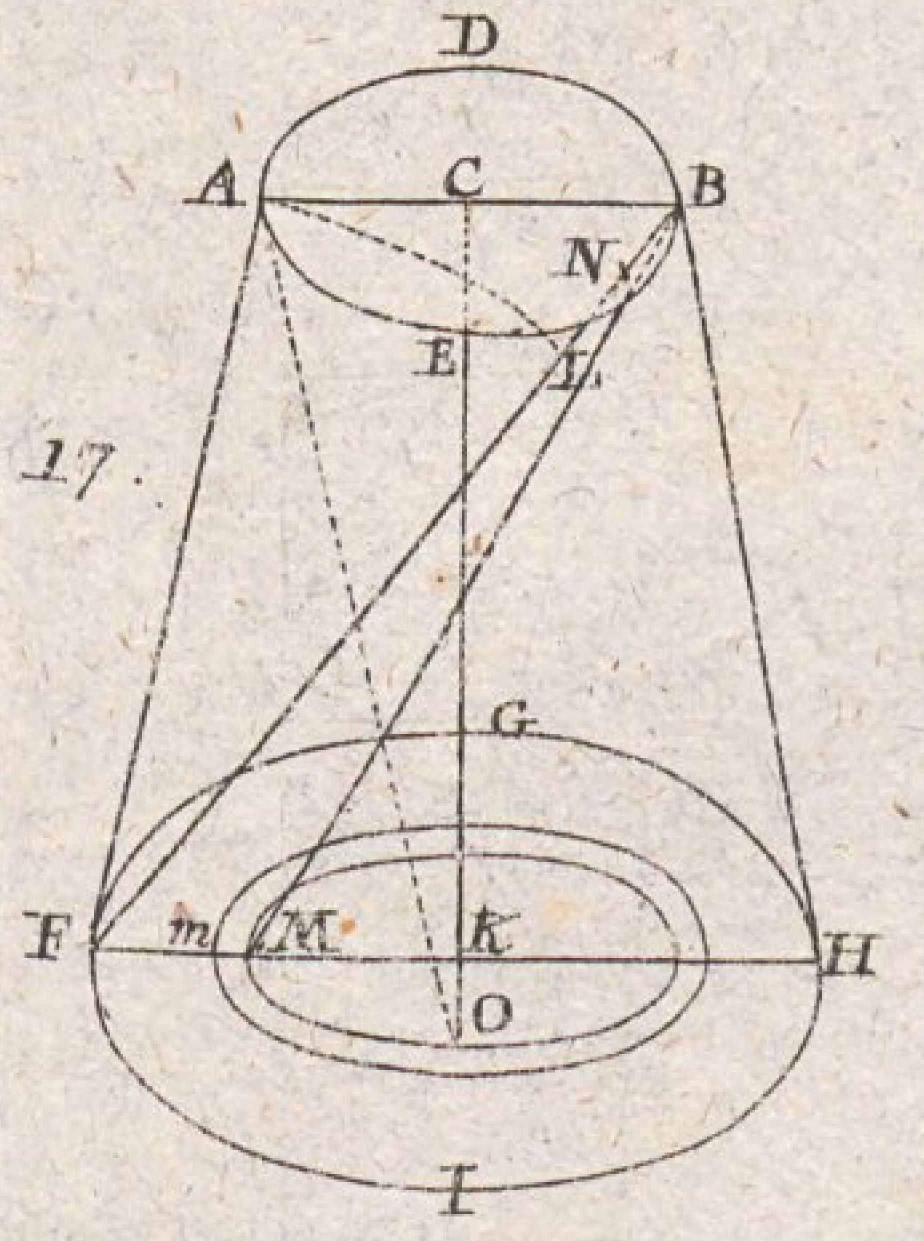

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.

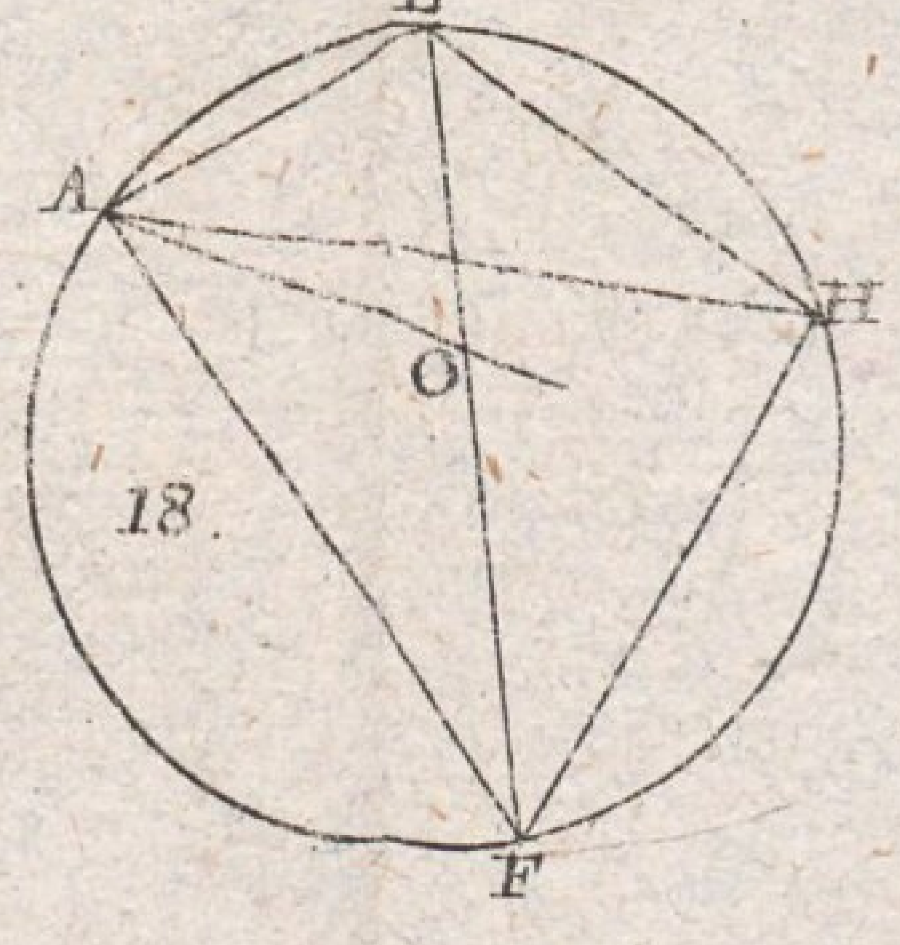
Bayerische
Staatsbibliothek
München

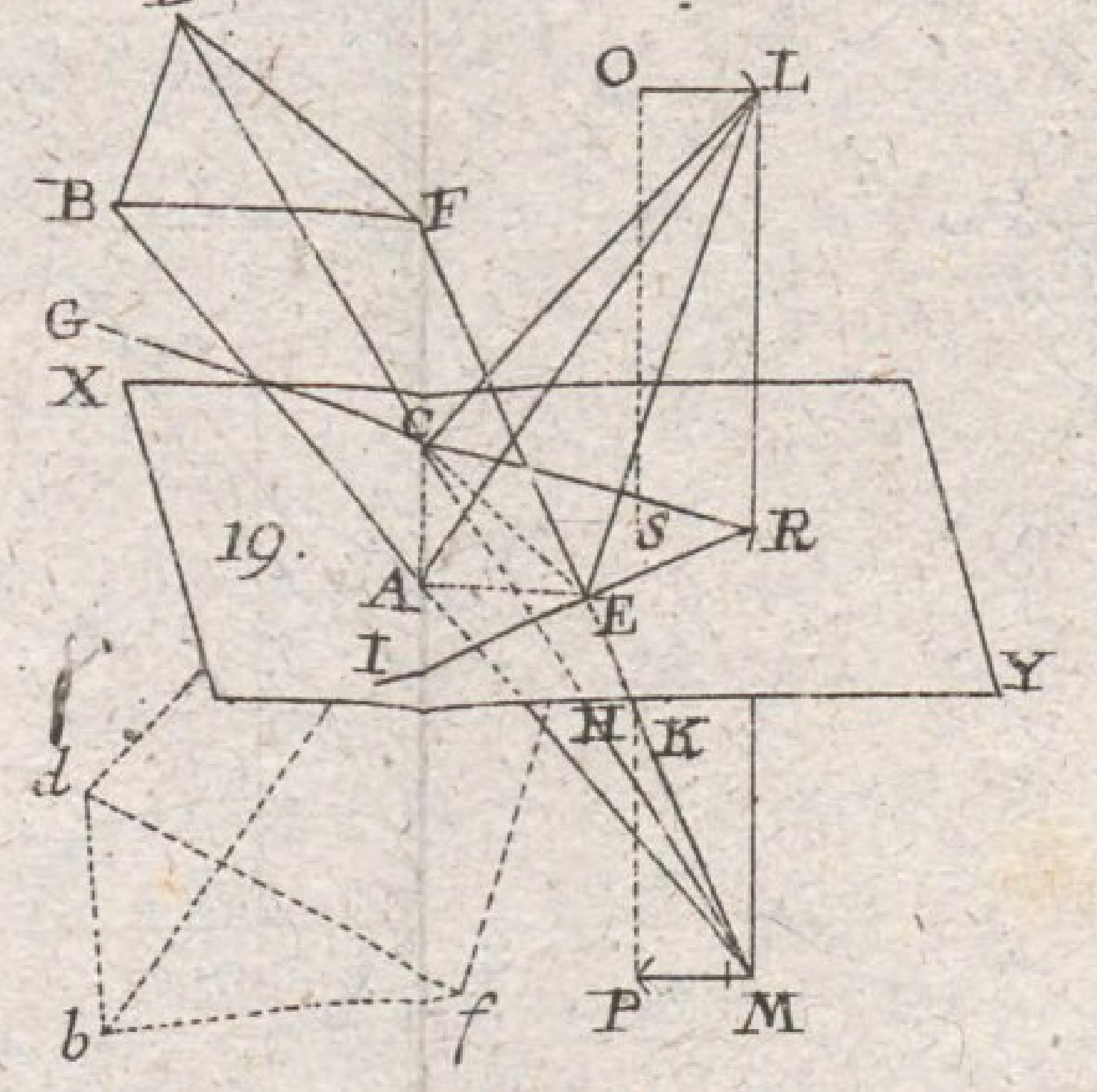

9.
10.
11.
12.
13.
14.

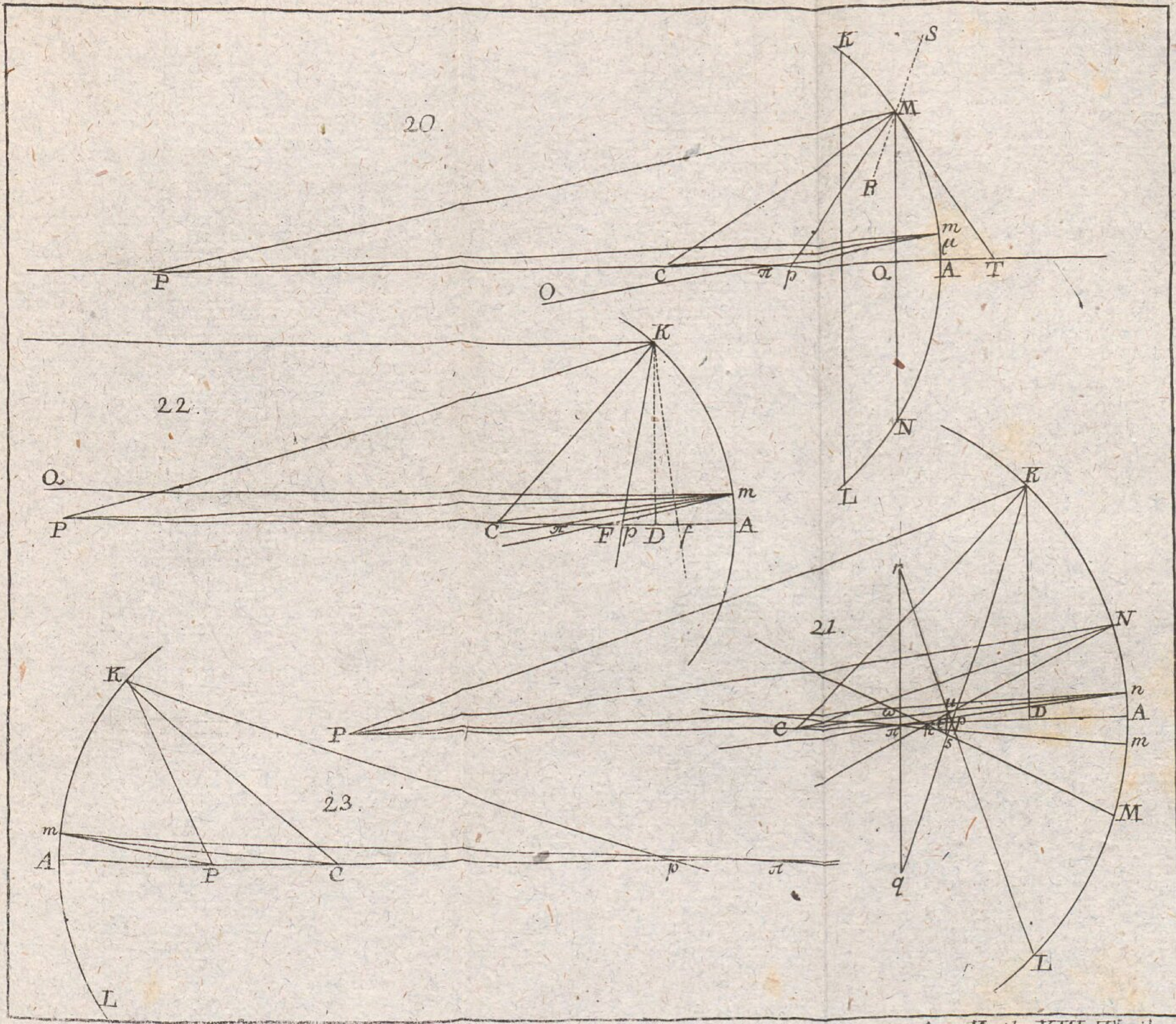

15.

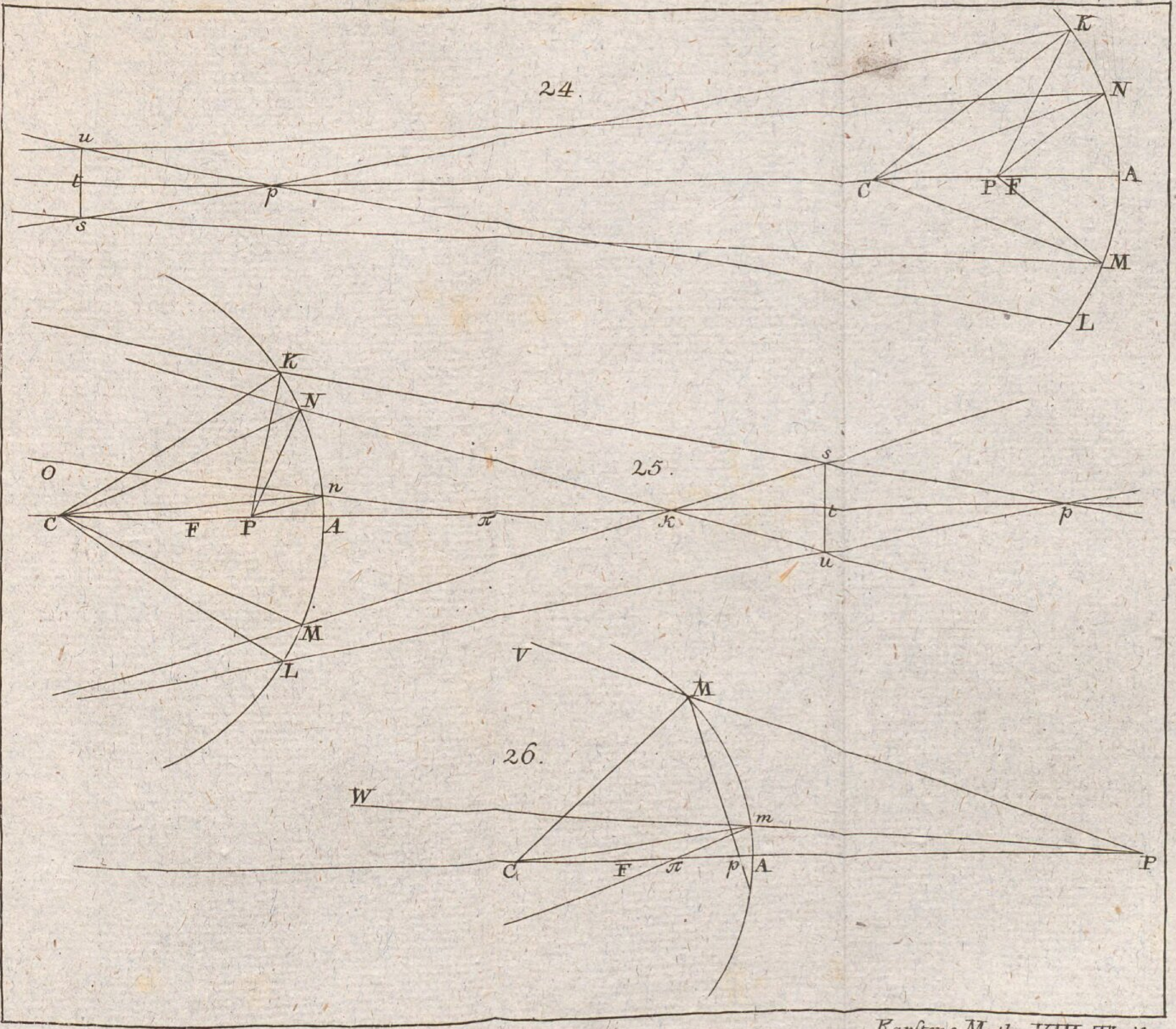

16.


17.

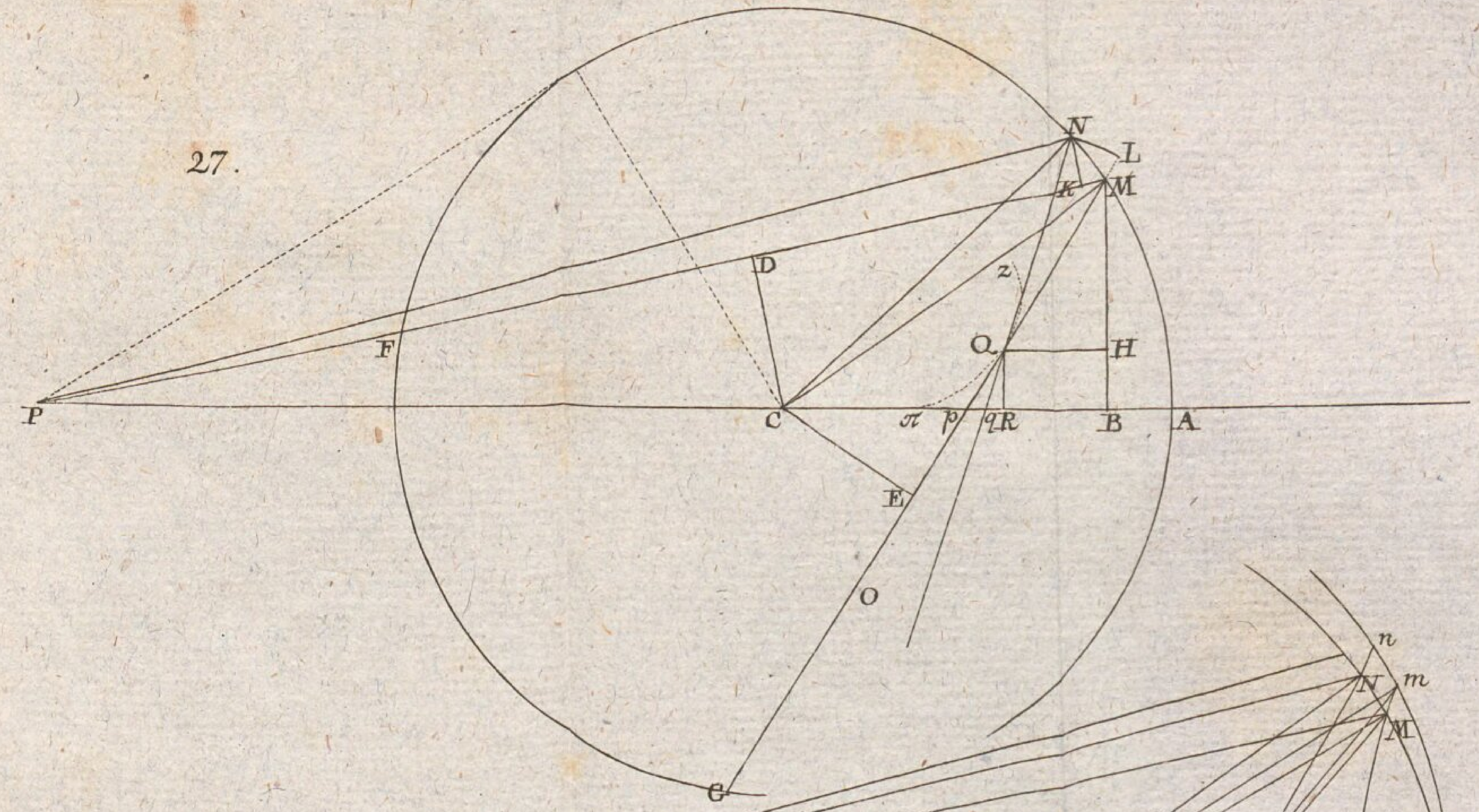

18.


19.

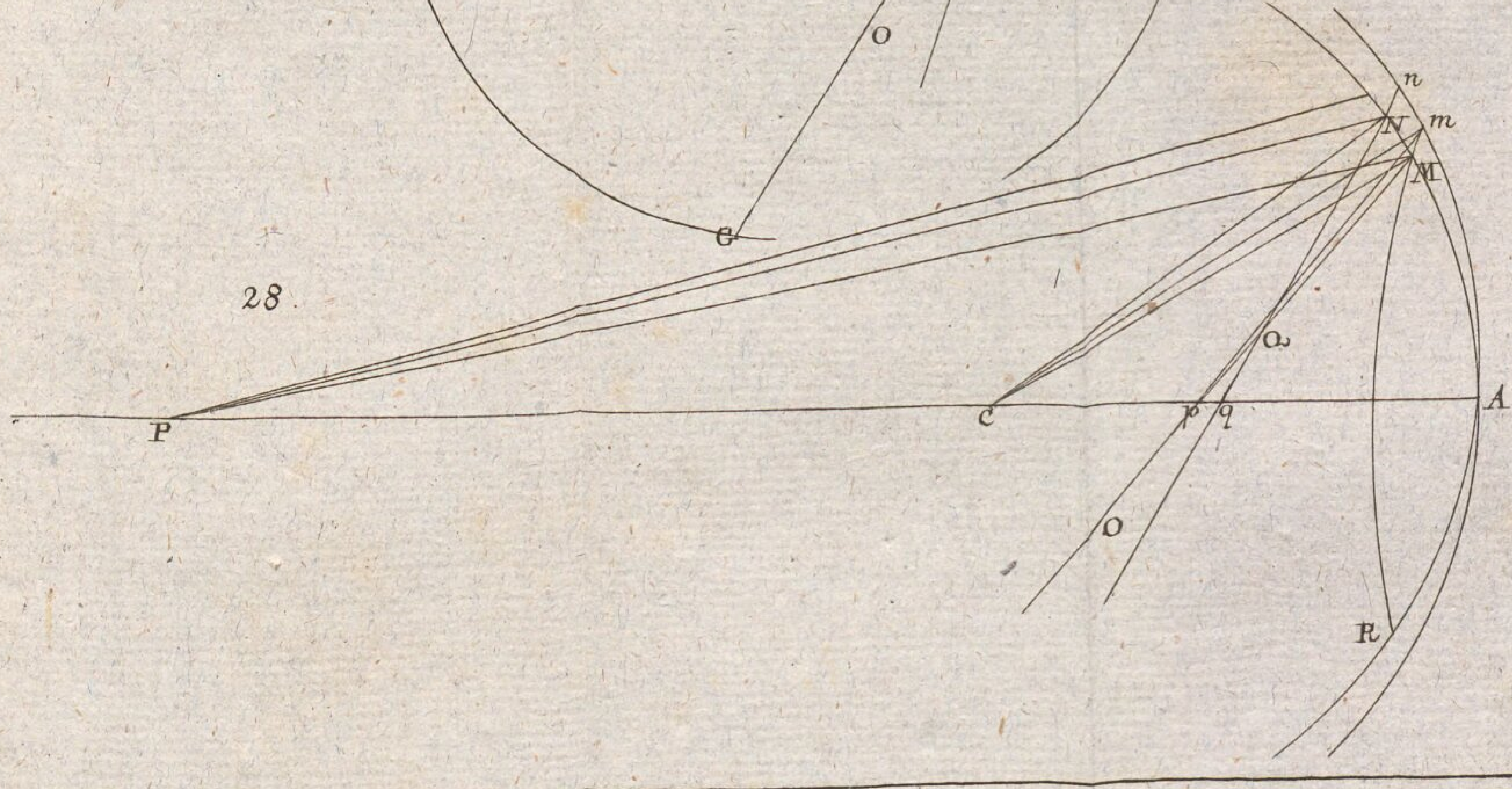

20.
22.
21.
23.

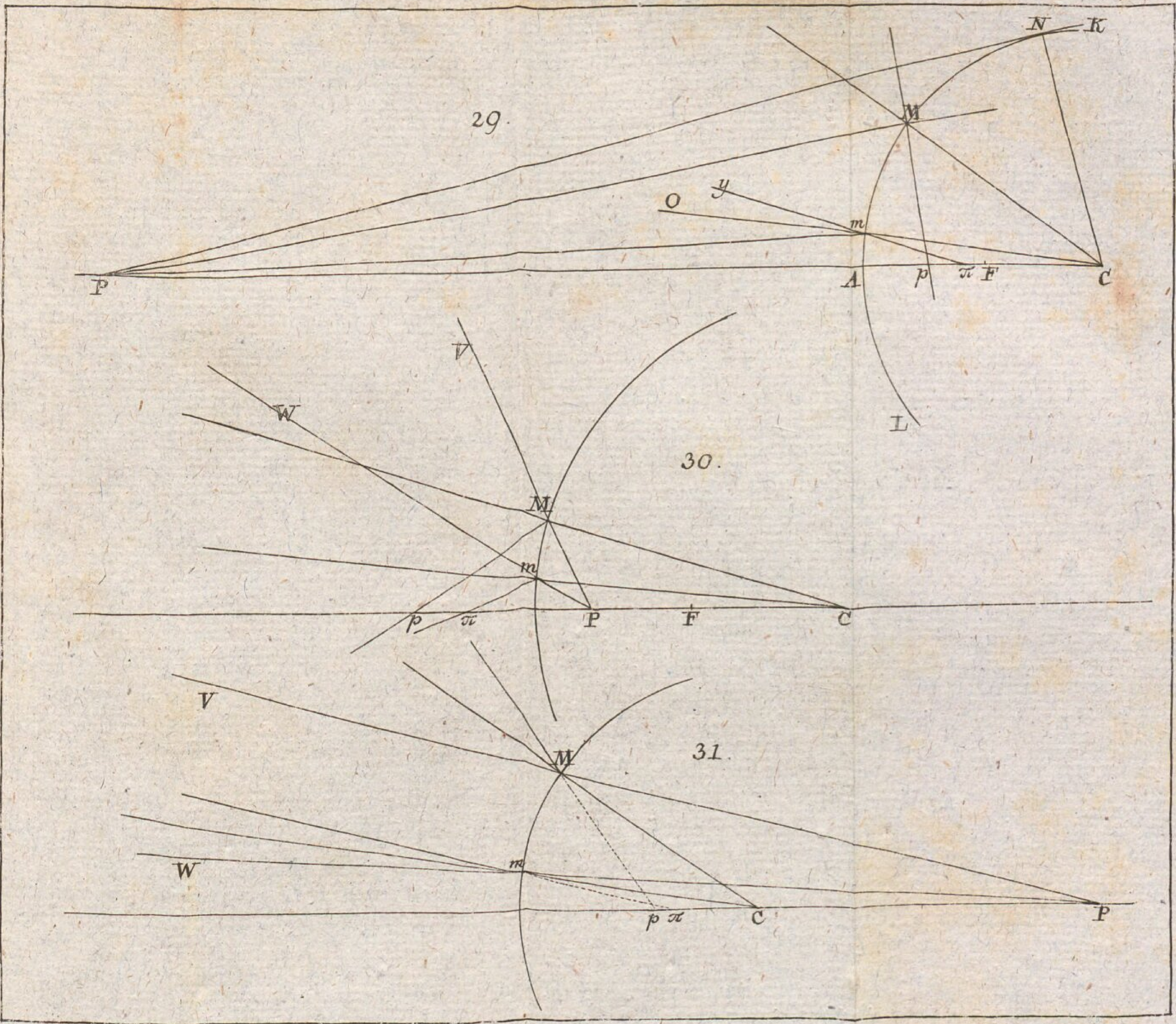

24.
u
t
s
p
K
N
C
P F
A
M
L
25.
K
N
O
n
C
F
P
A
π
K
s
t
u
p
M
L
26.
V
M
W
m
C
F
π
p
A
P

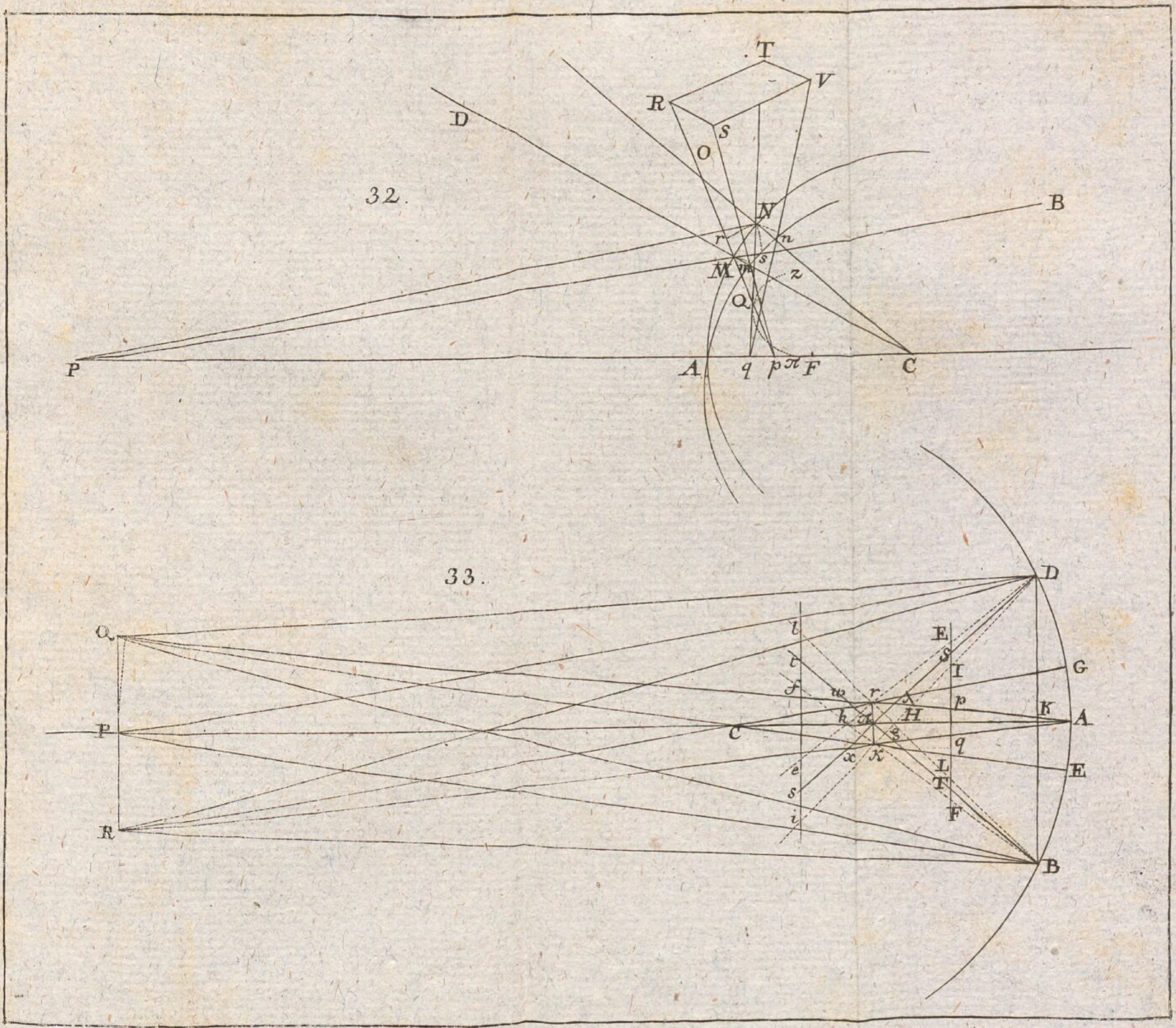
27.

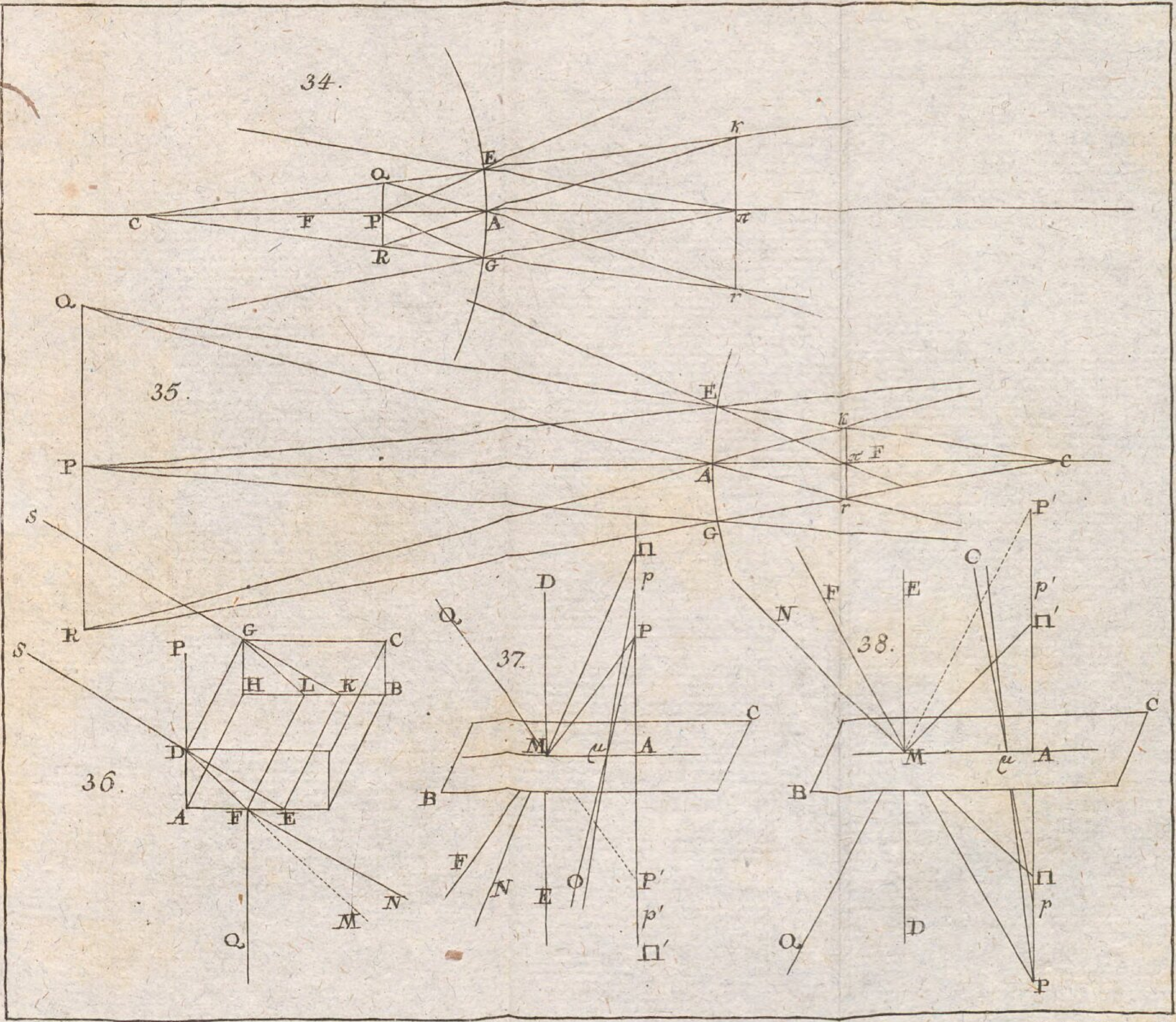


28.

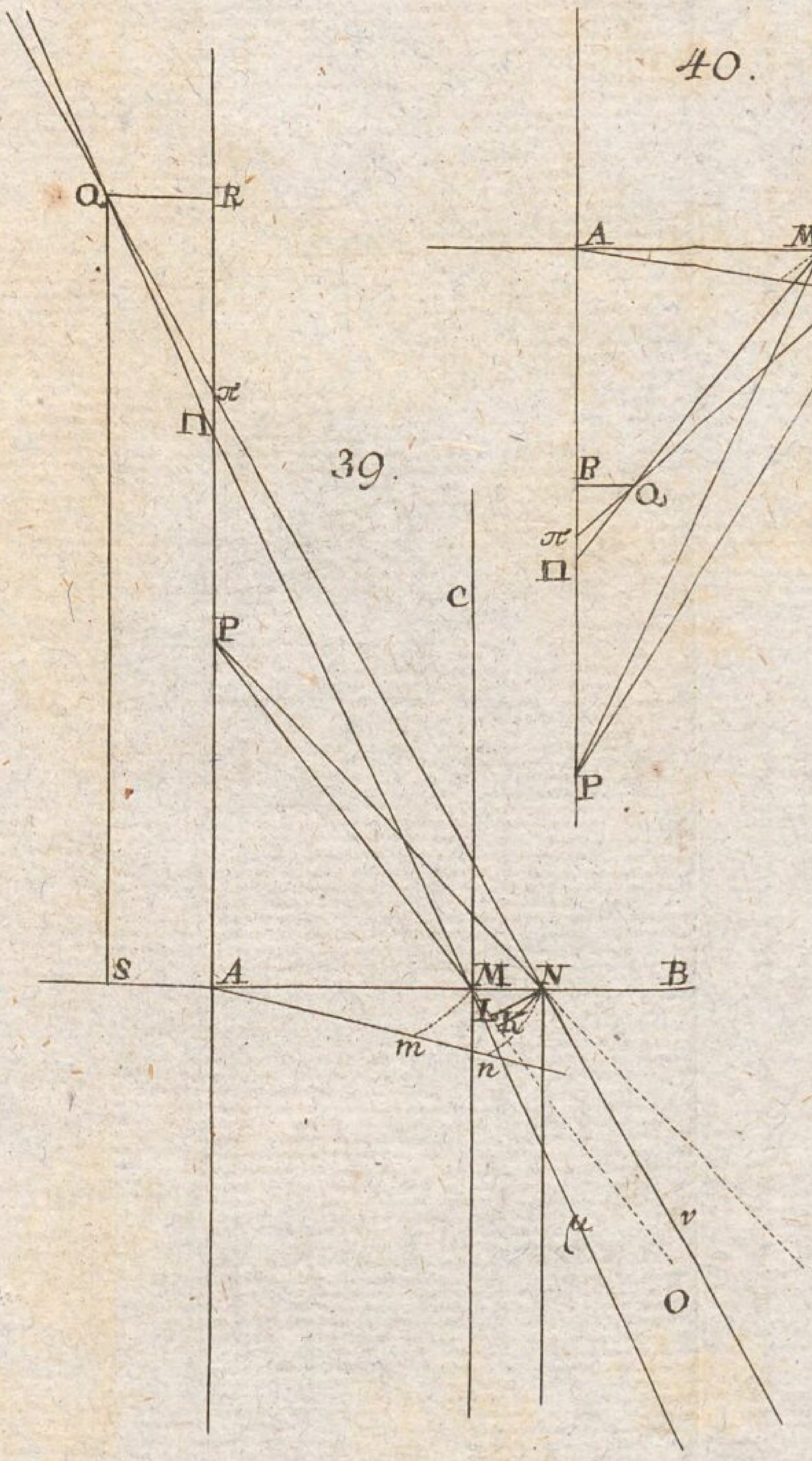



29.
N
K
M
y
O
m
P
A
p
π
F
C
L
30.
V
W
M
m
p
π
P
F
C
31.
V
M
W
m
p
π
C
P

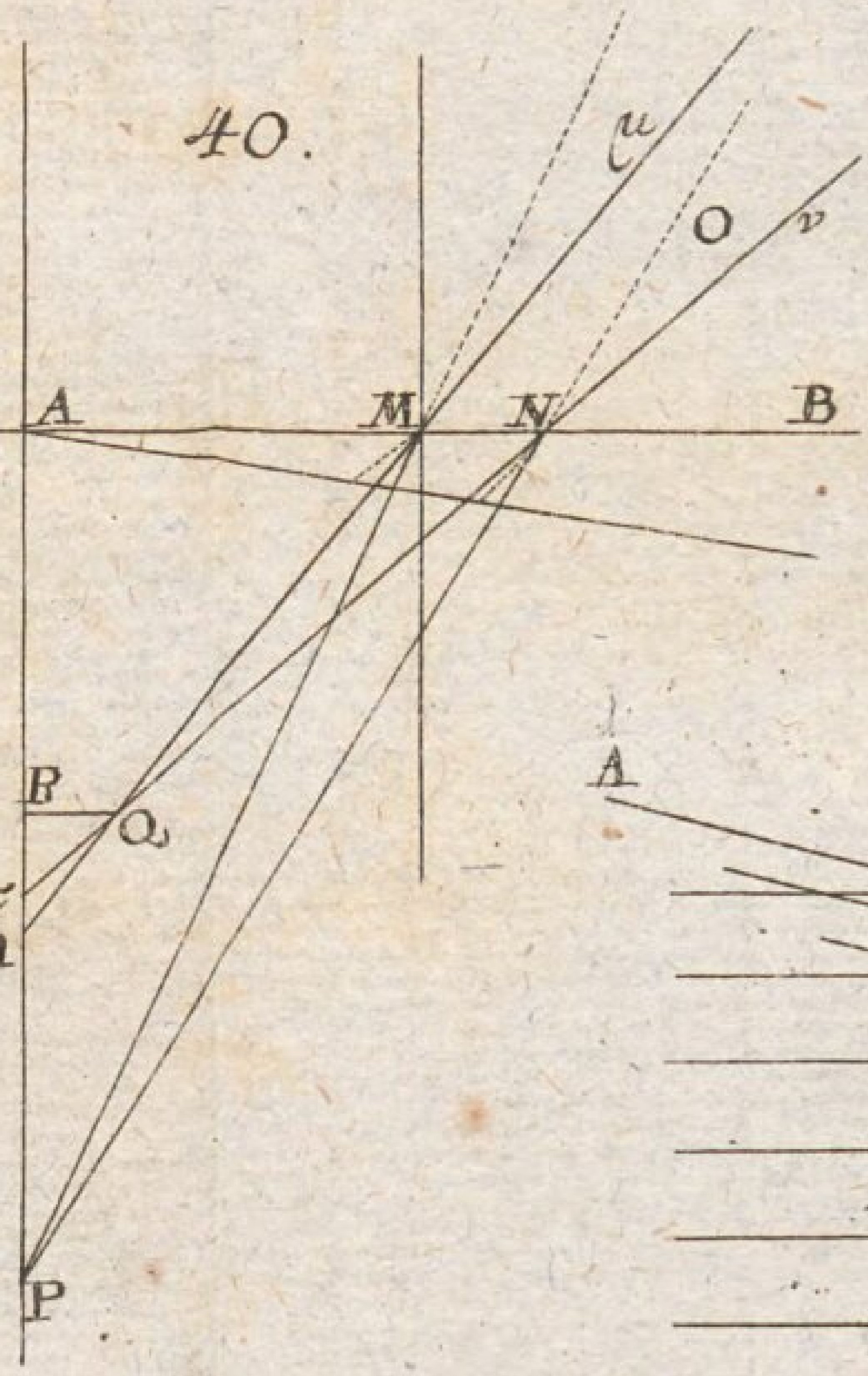

32.
T
V
R
D
S
O
B
N
r
n
s
M
m
z
Q
P
A
q
p
π
F
C
33.
D
Q
l
t
f
w
r
λ
E
S
I
G
p
K
A
h
H
P
C
z
q
x
K
e
L
E
s
T
i
F
R
B


34.
35.
36.
37.
38.

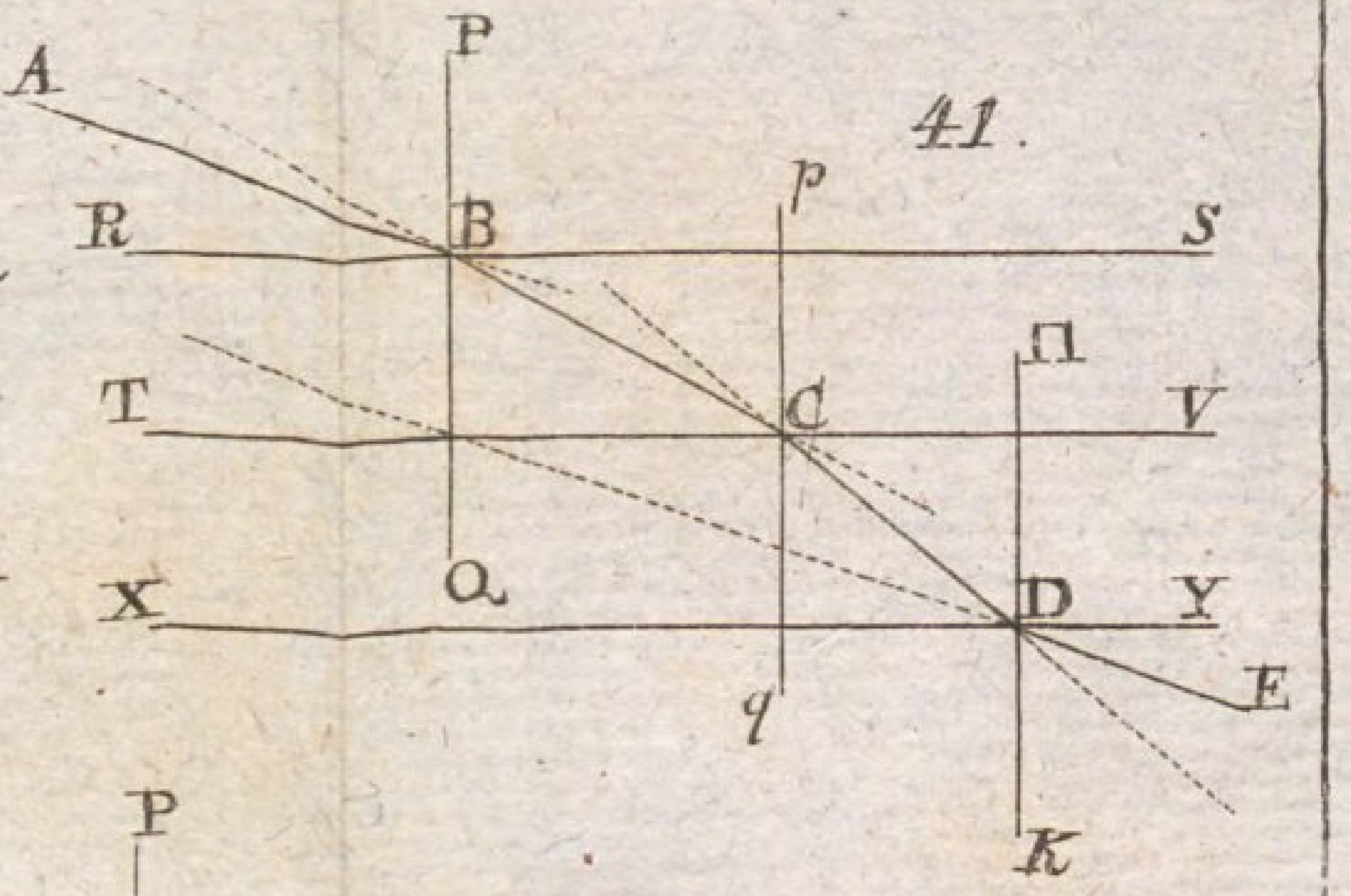
39.


Q
R
π
Π
P
C
S
A
M
N
B
L
K
m
n
μ
v
O

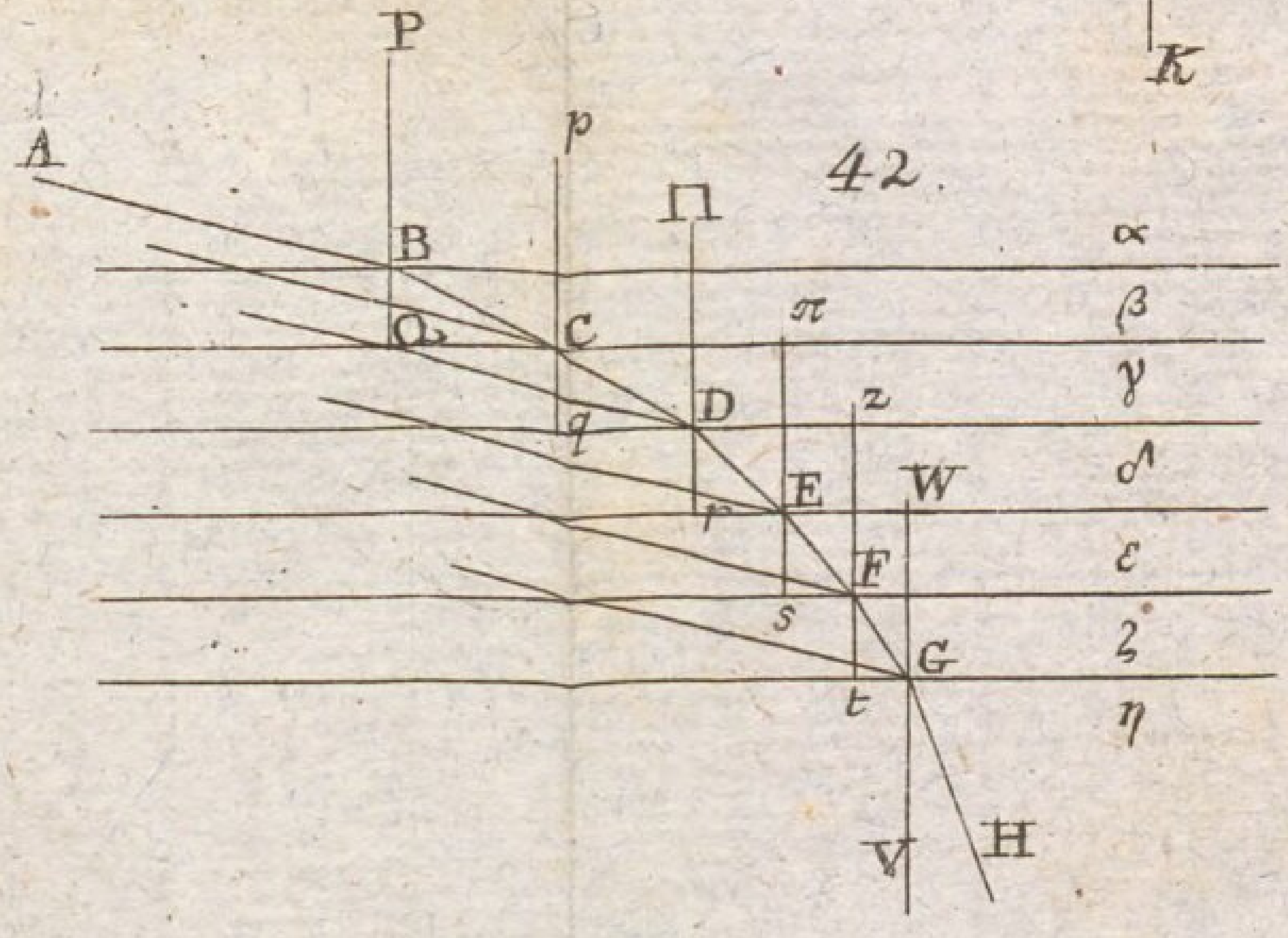
40.


μ
O
v
A
M
N
B
R
Q
π
Π
P

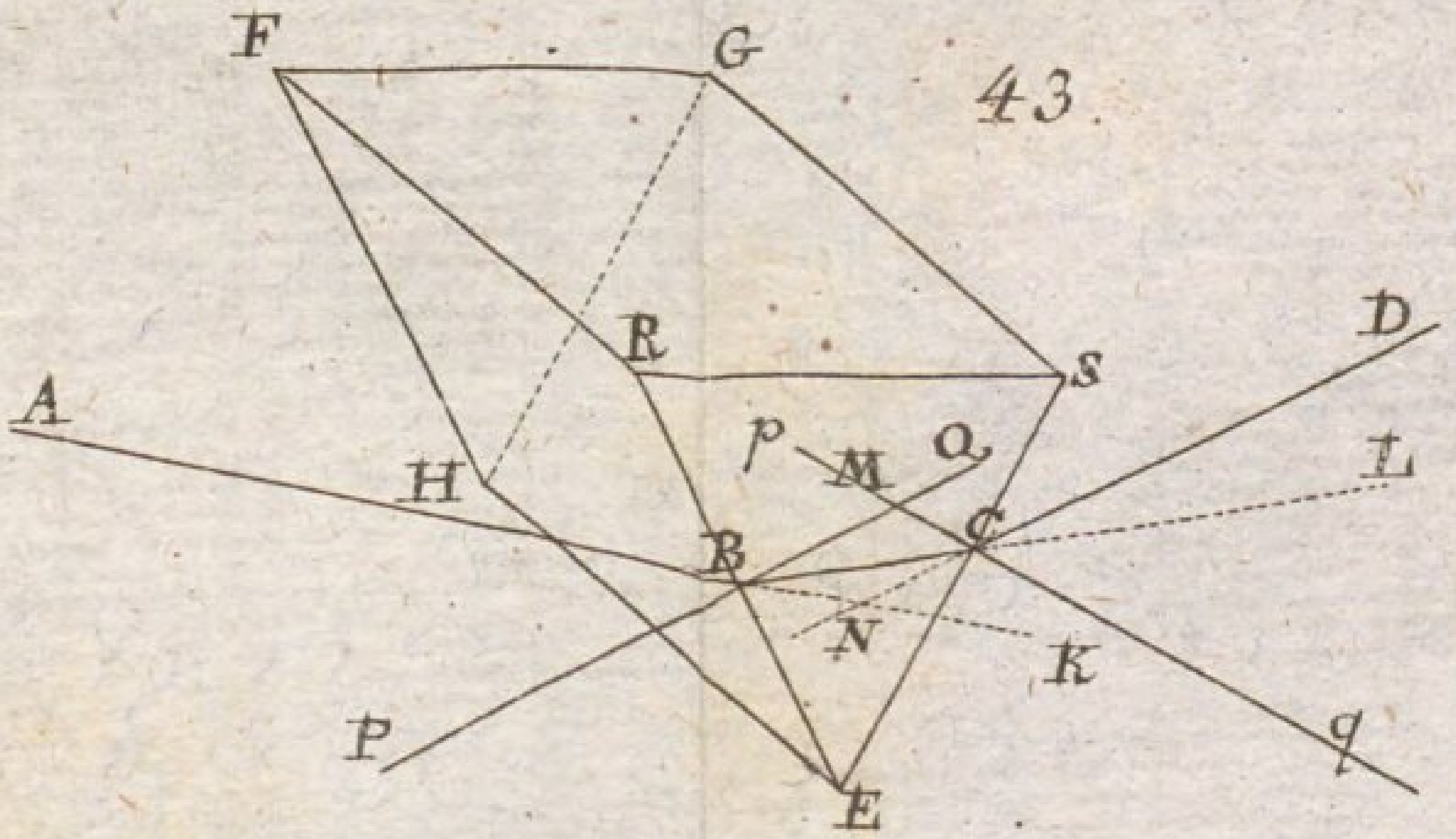
41.

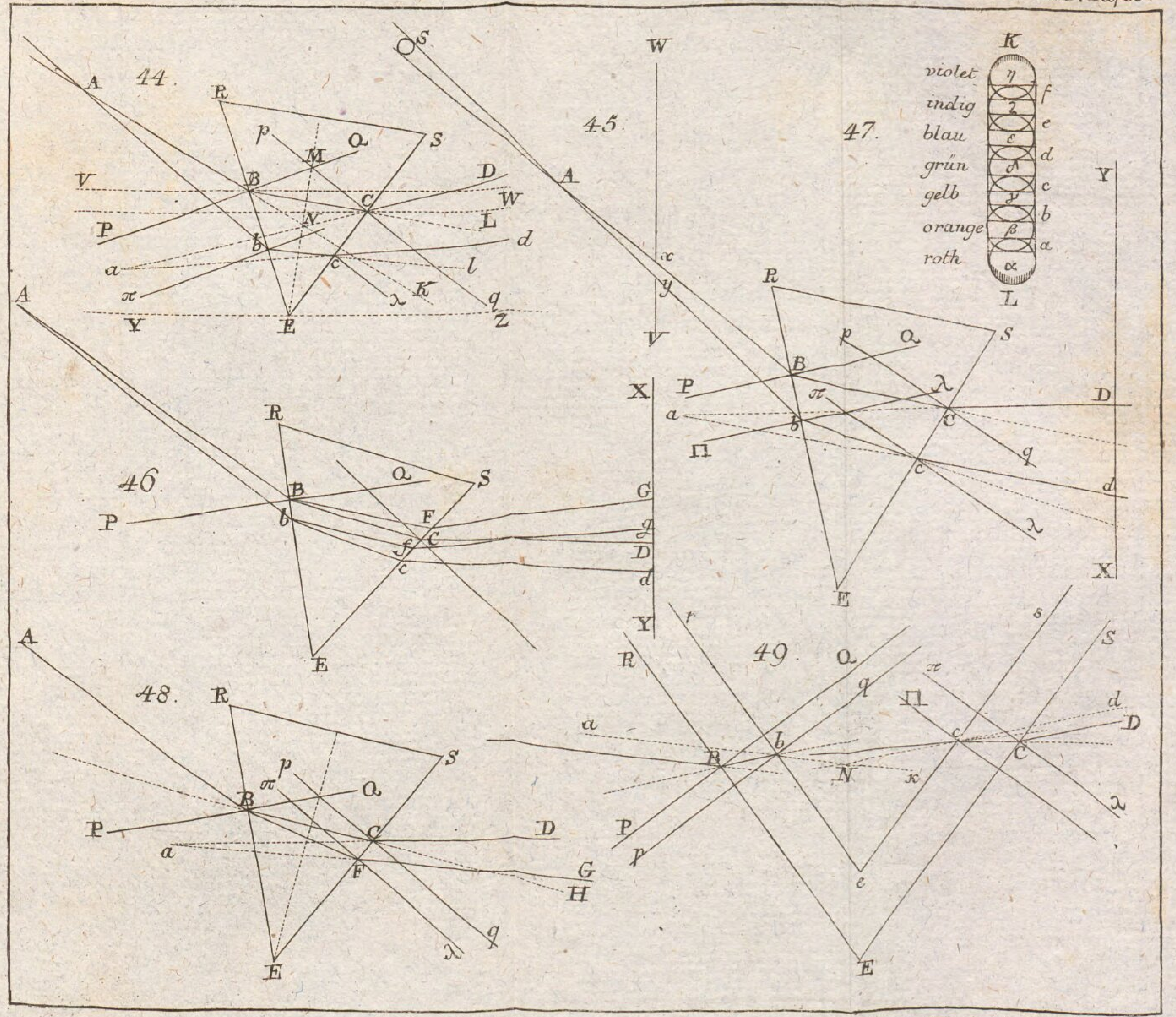

A
P
p
R
B
S
Π
T
C
V
X
Q
D
Y
E
q
K

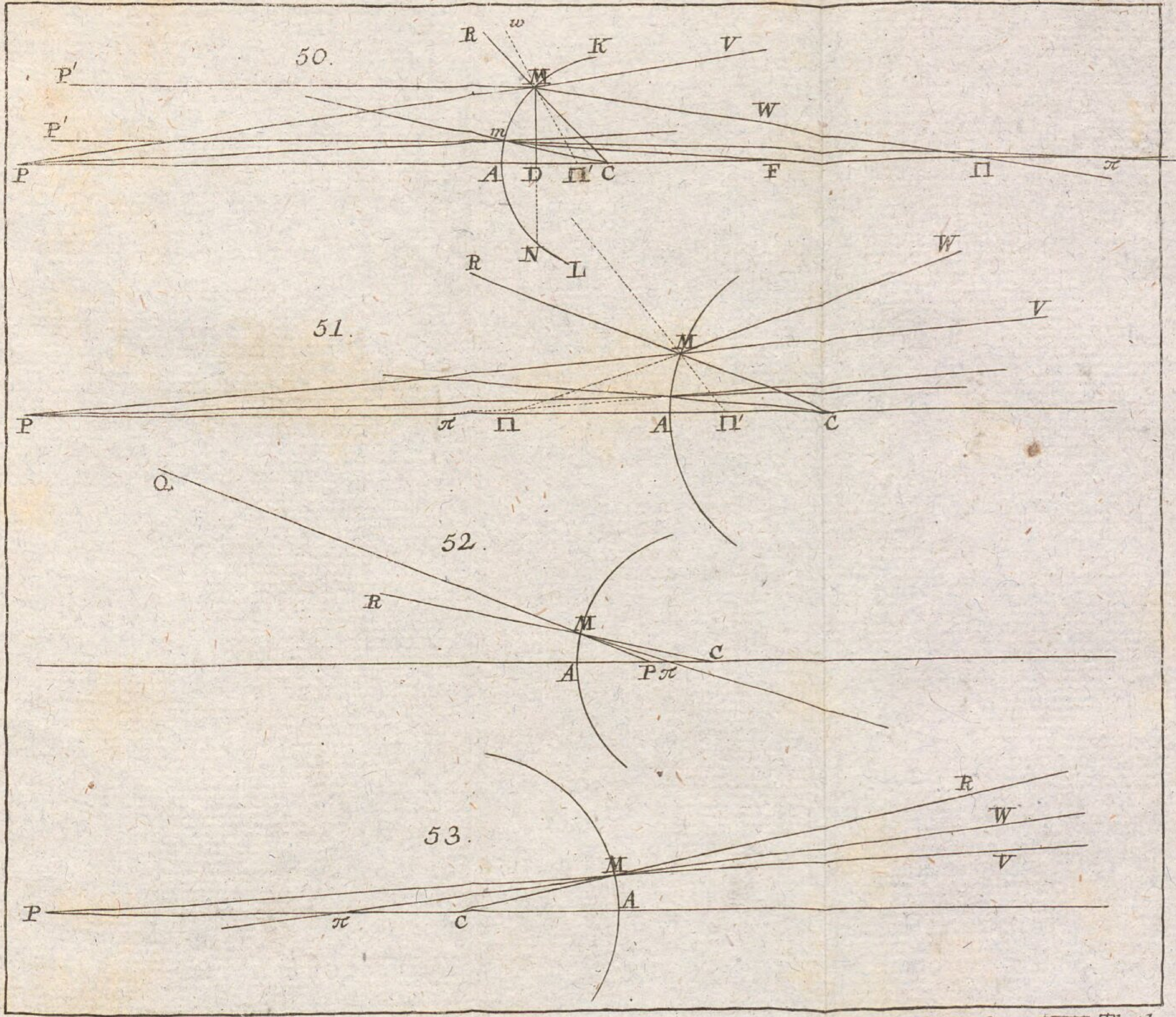
42.

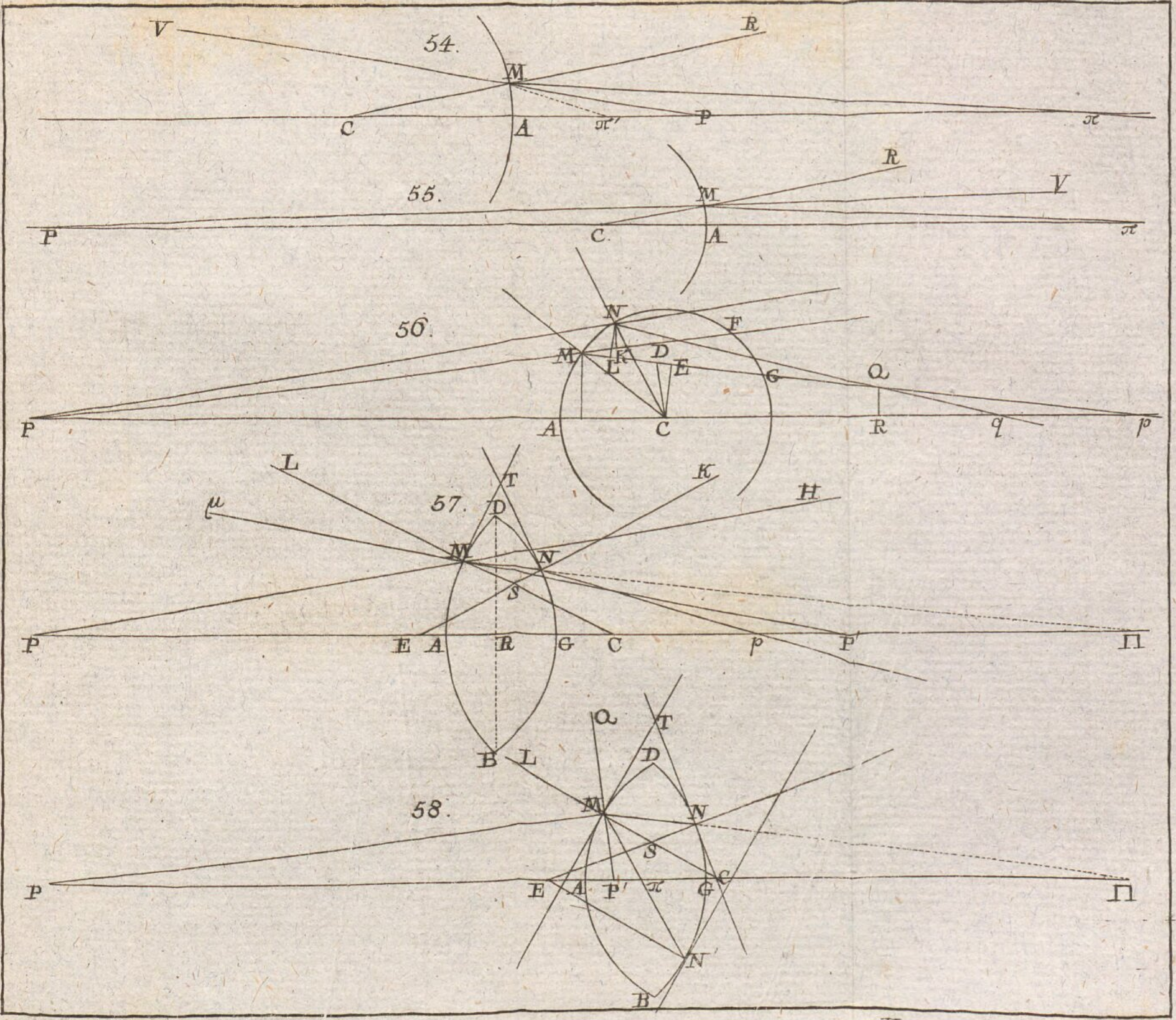

P
A
p
Π
B
Q
C
π
D
q
z
E
W
r
F
s
G
t
V
H
α
β
γ
δ
ε
ζ
η

43.

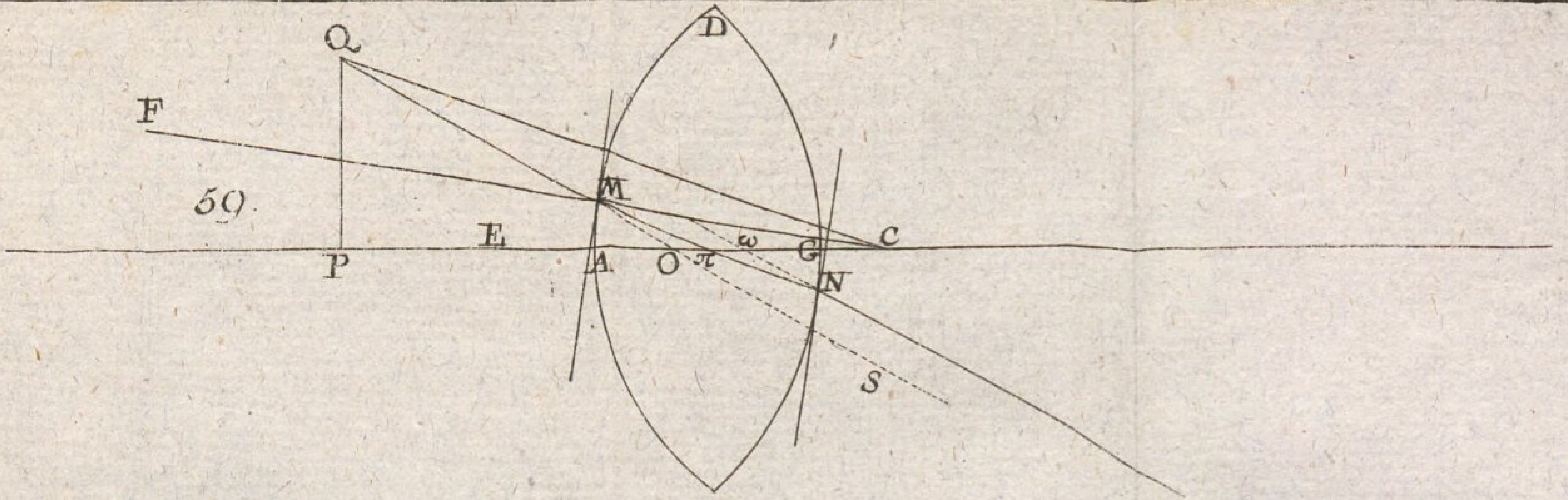

F
G
R
S
D
A
p
M
Q
L
H
B
C
N
K
P
E
q


44.
45.
46.
47.
48.
49.
violet
indig
blau
grün
gelb
orange
roth

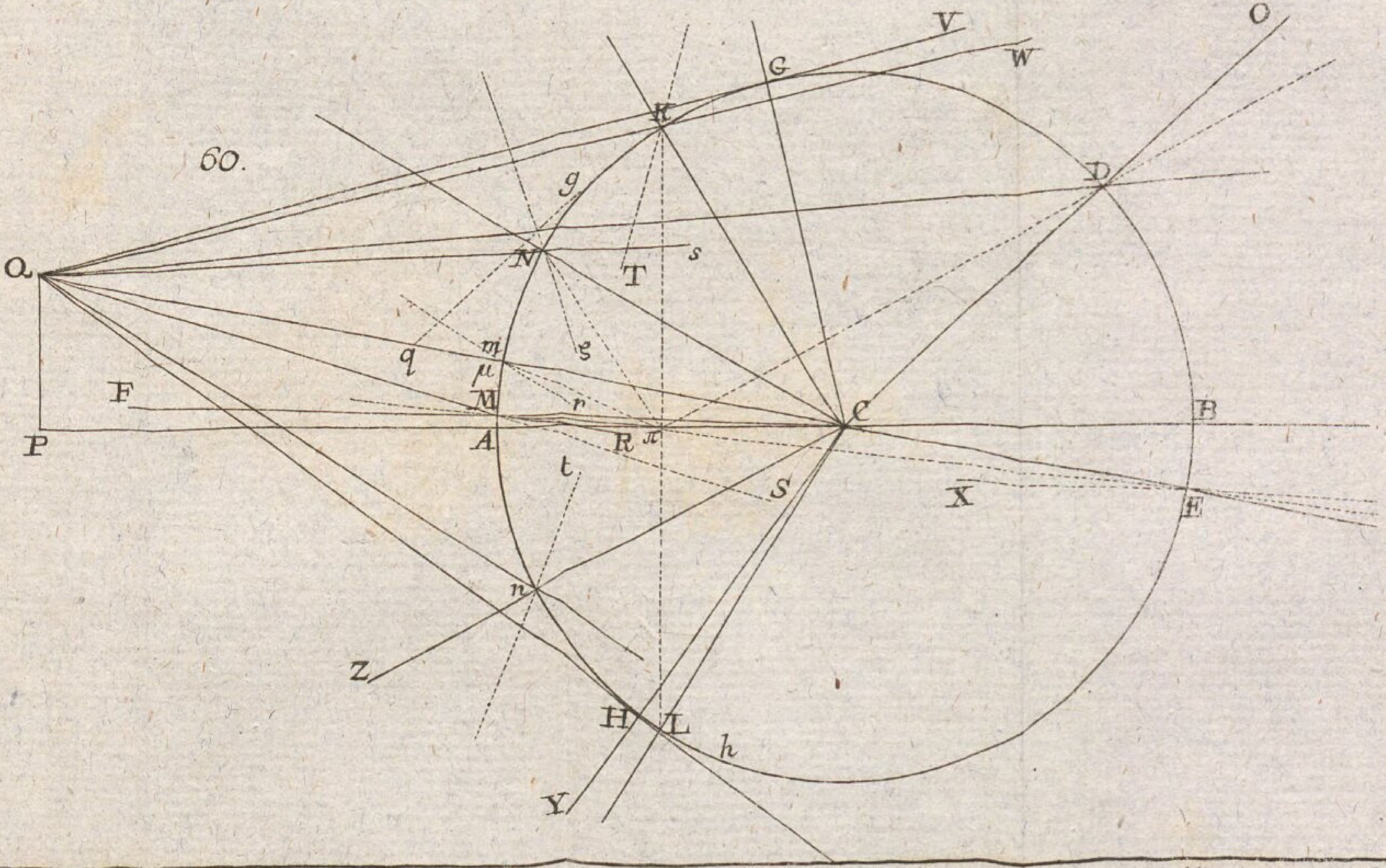

50.
R w K V
P′ M
W
P′ m
P A D Π′ C F Π π
N L
51.
R W
V
M
P π Π A Π′ C
Q
52.
R
M
A P π C
53.
R
W
M V
P π C A

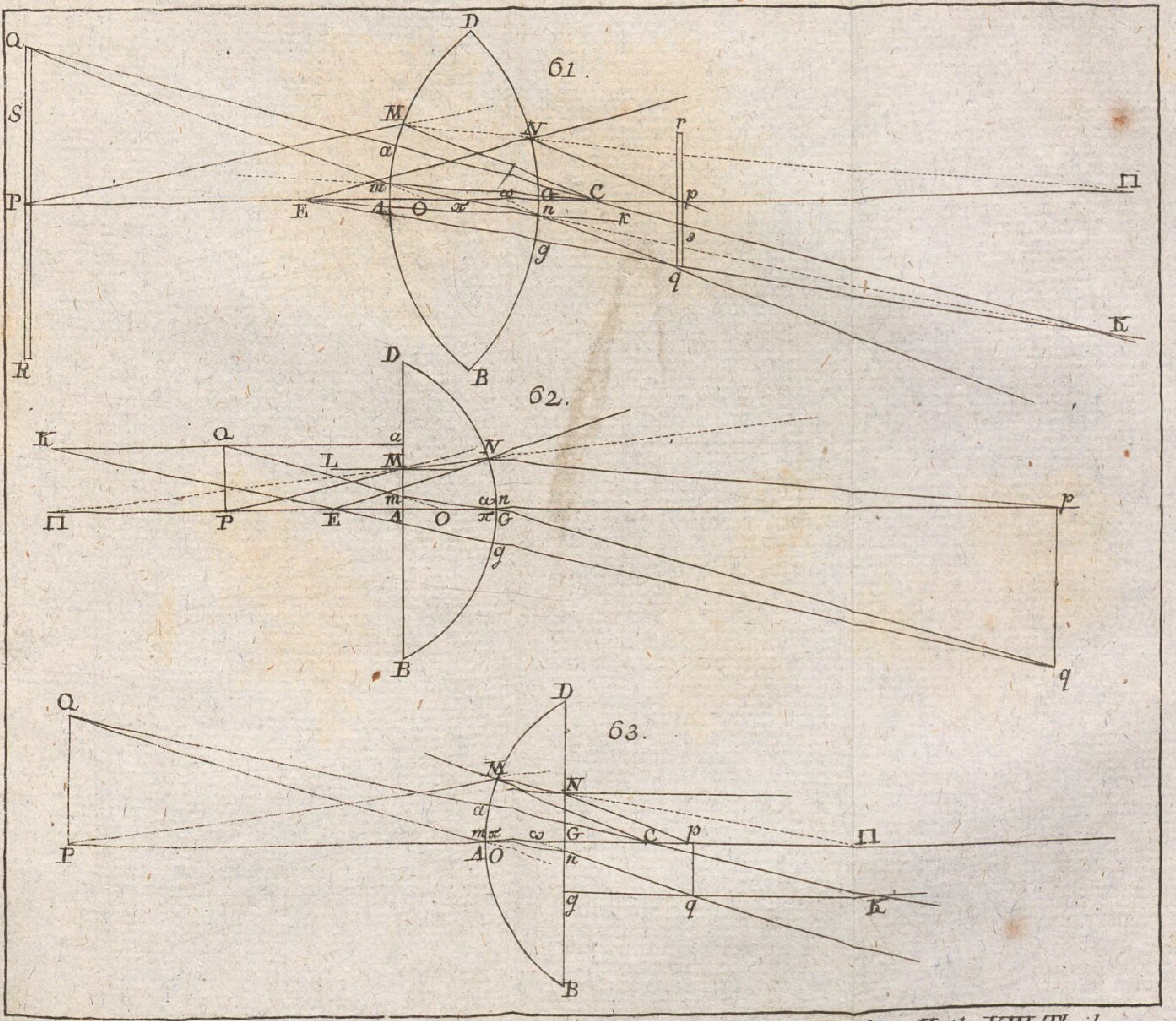

54.
55.
56.
57.
58.

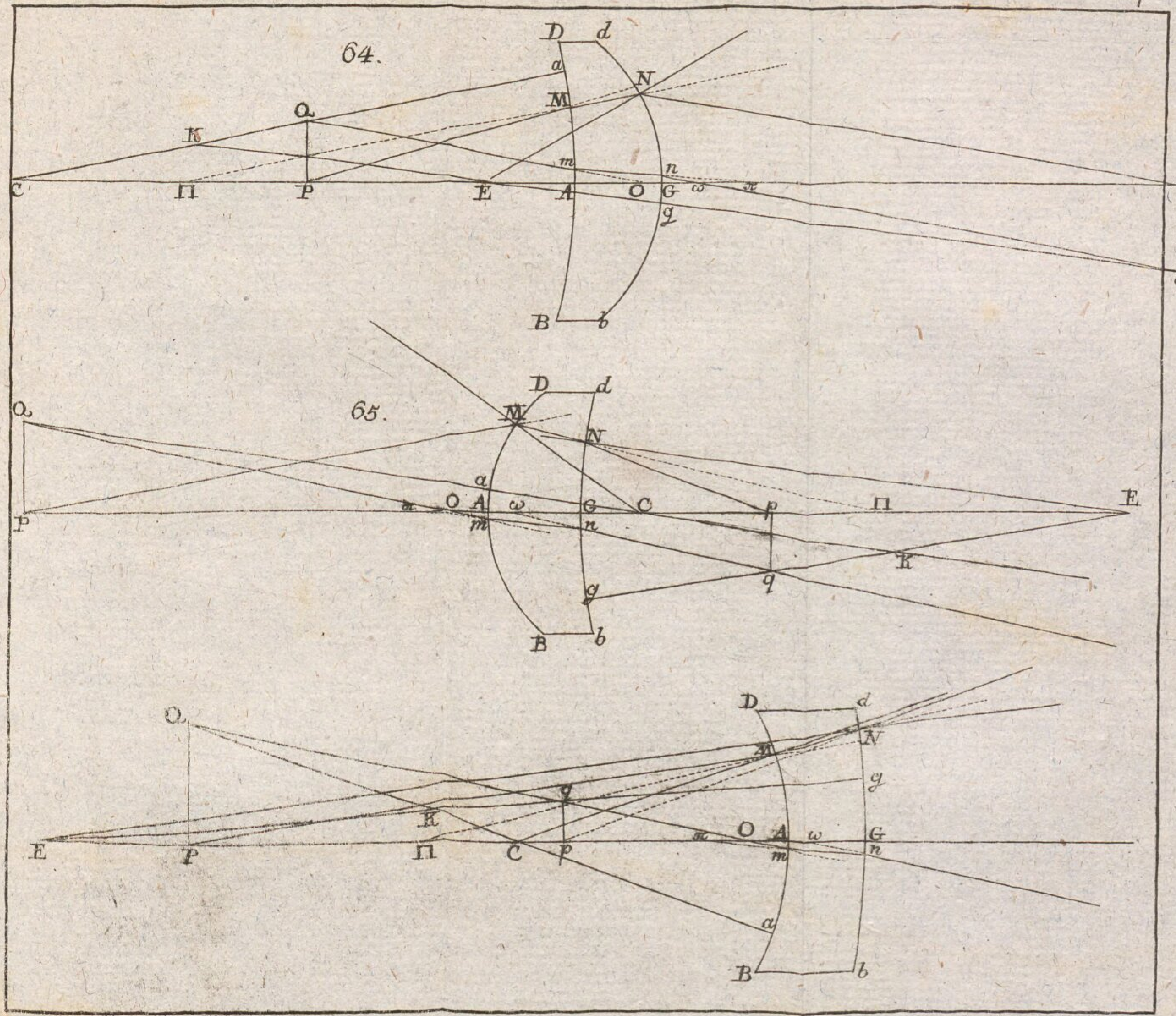
59.



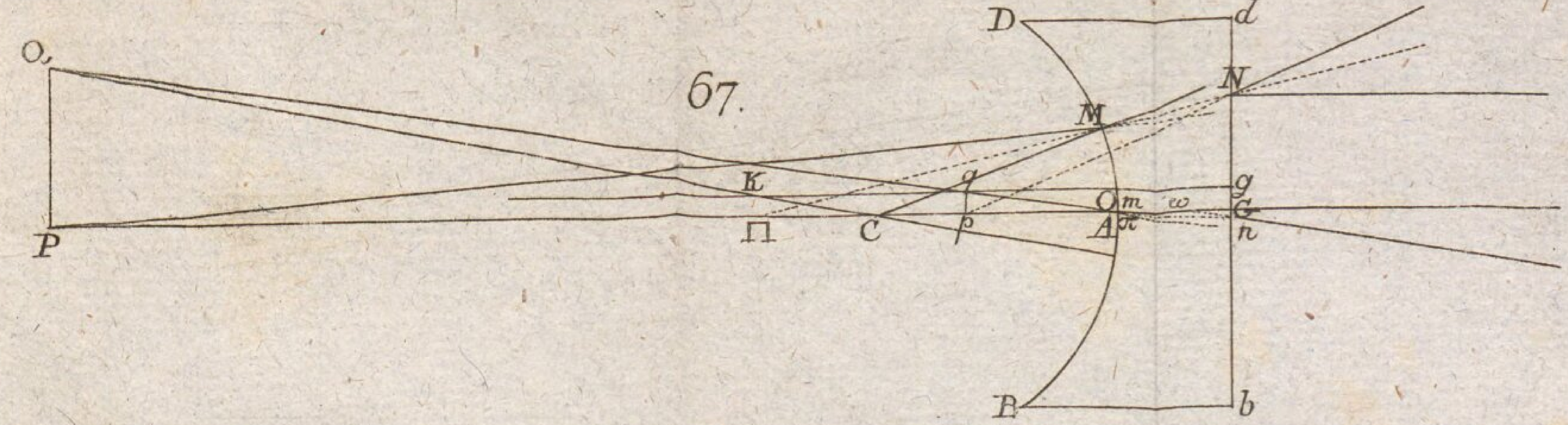
60.



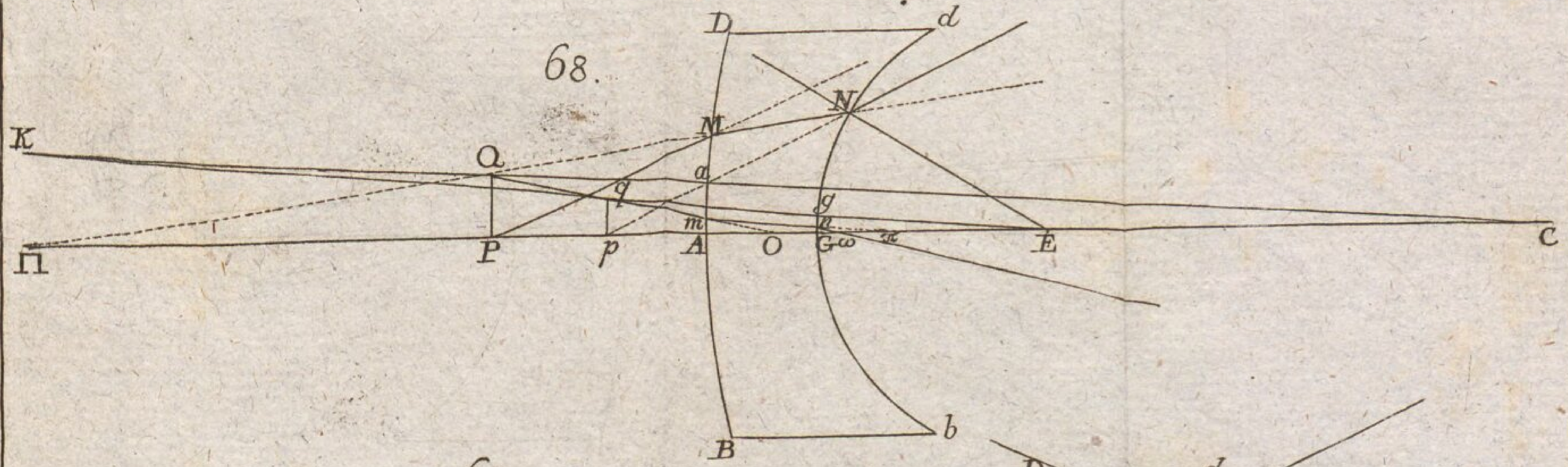

61.
62.
63.


64.
65.

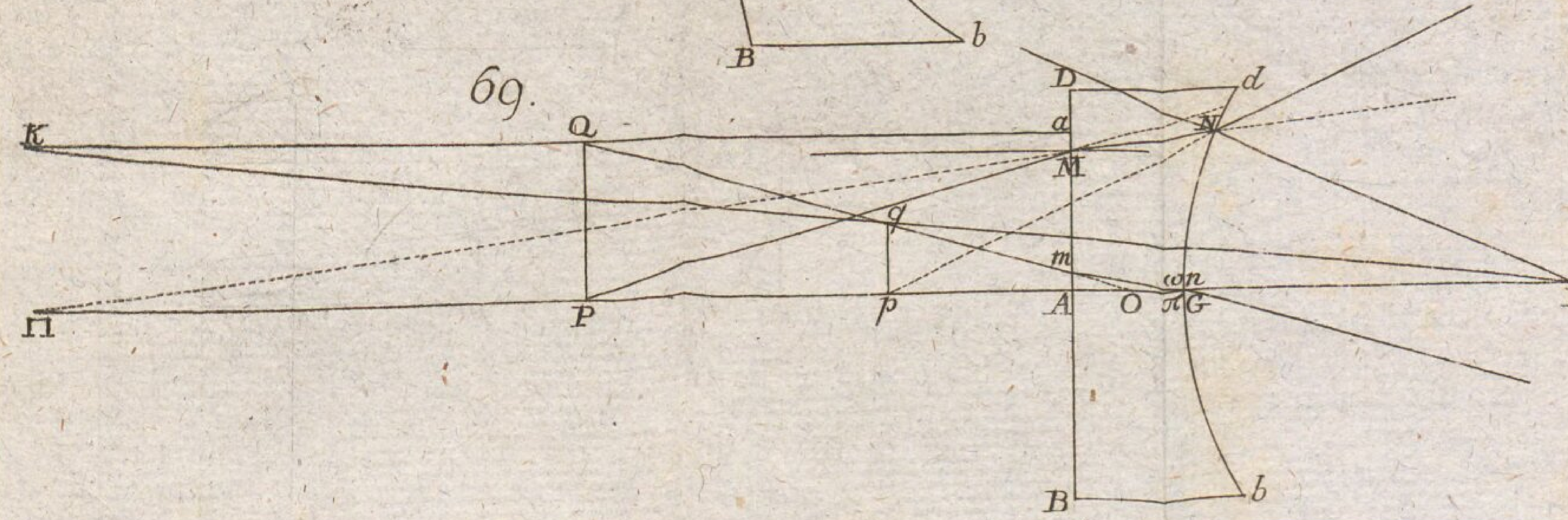
67.

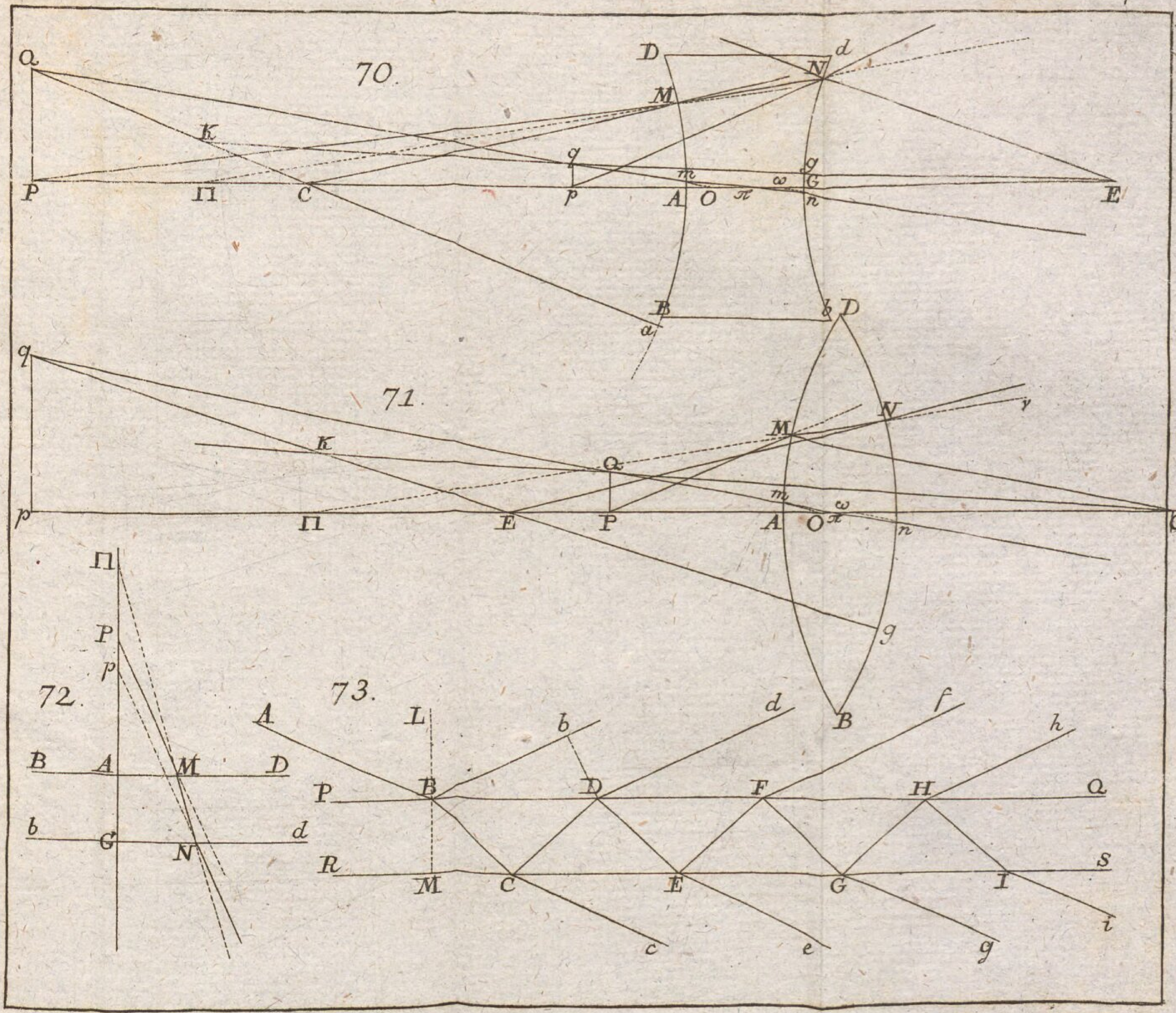

D
d
Q
N
M
K
q
g
O m ω G
P
Π
C
p
A π
n
B
b

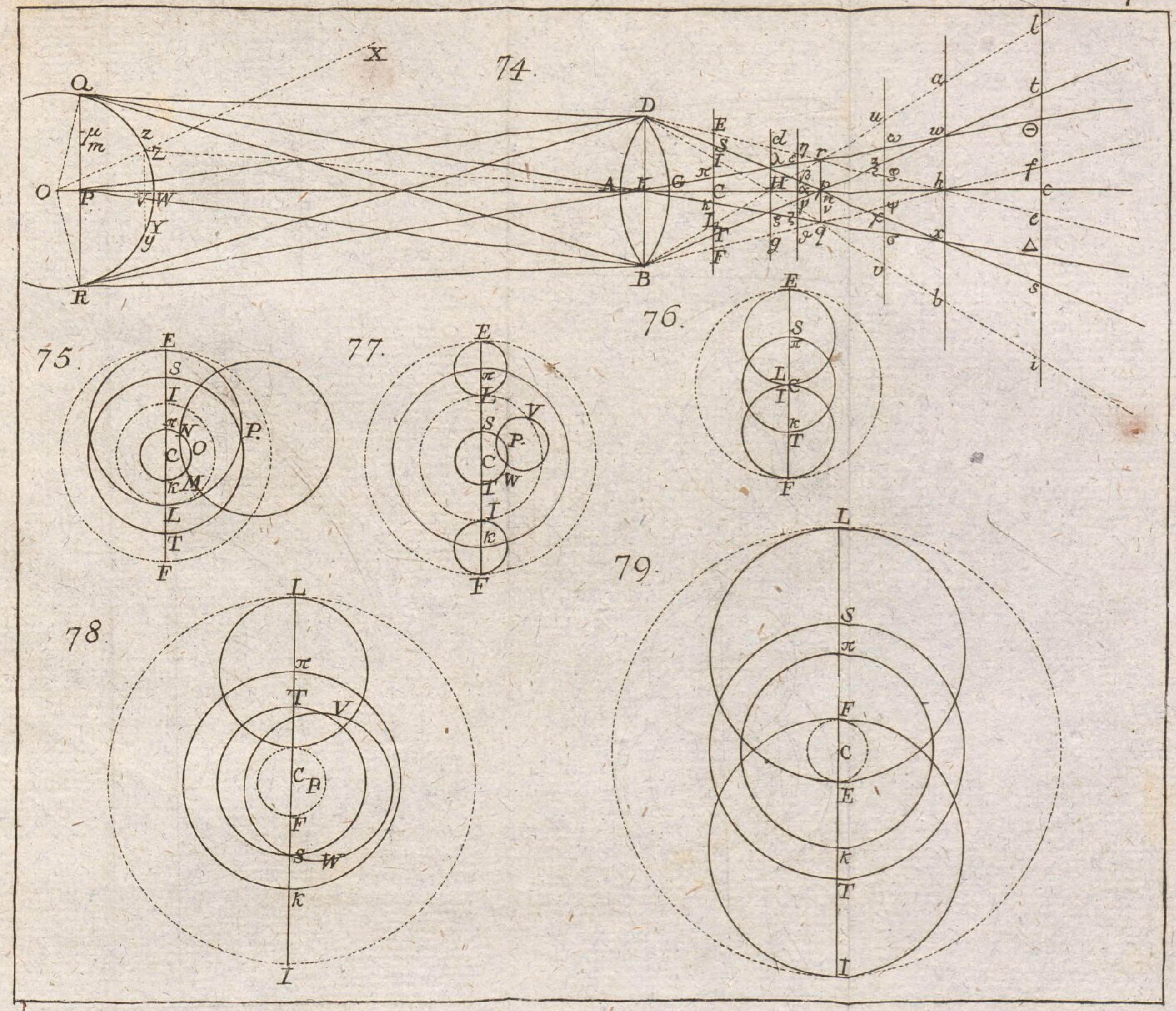
68.

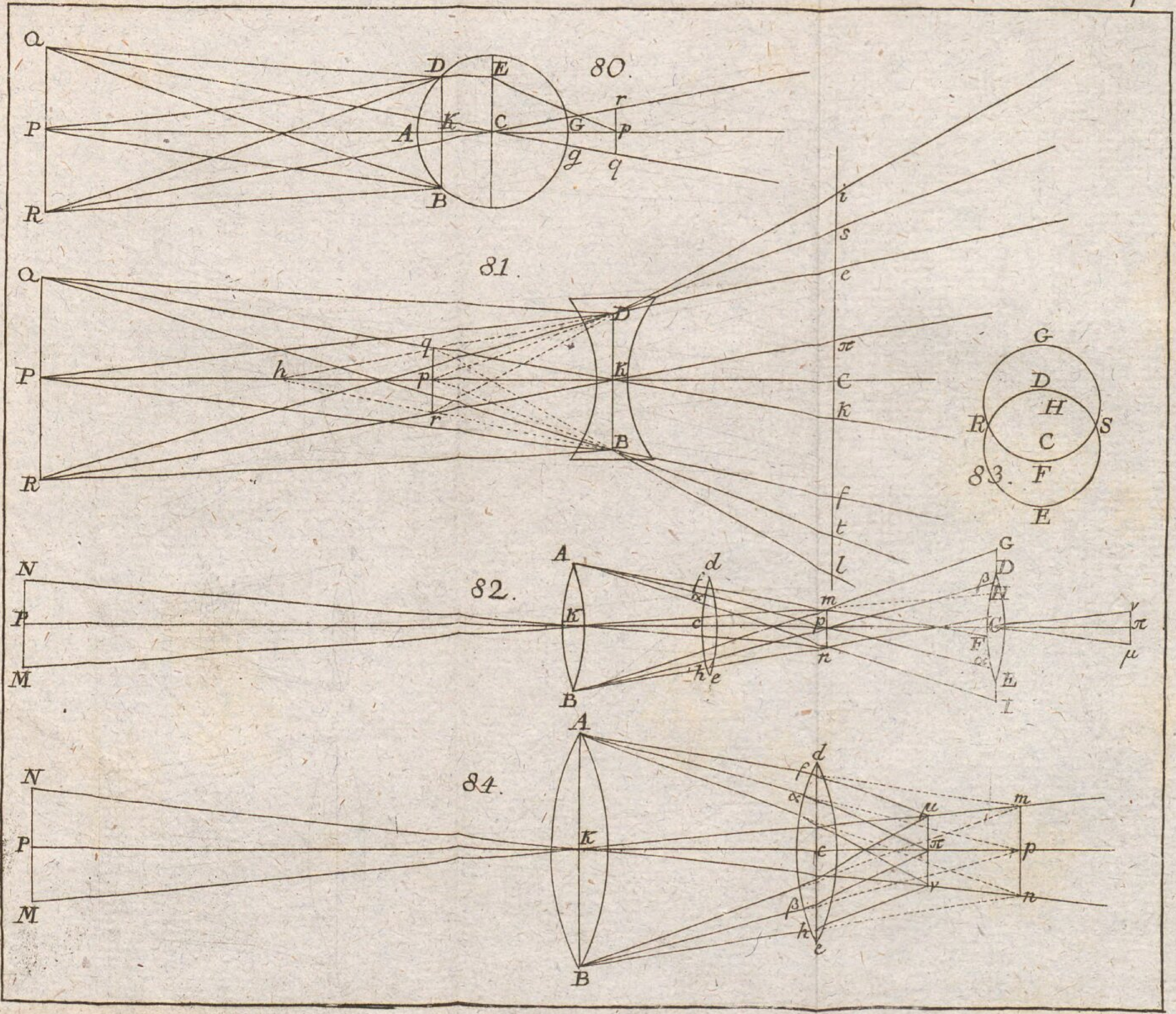

D
d
N
M
K
Q
a
q
g
m
n
P
p
A
O
G ω
π
E
C
Π
B
b

69.


D
d
K
Q
a
N
M
q
m
ω n
P
p
A
O
π G
E
Π
B
b

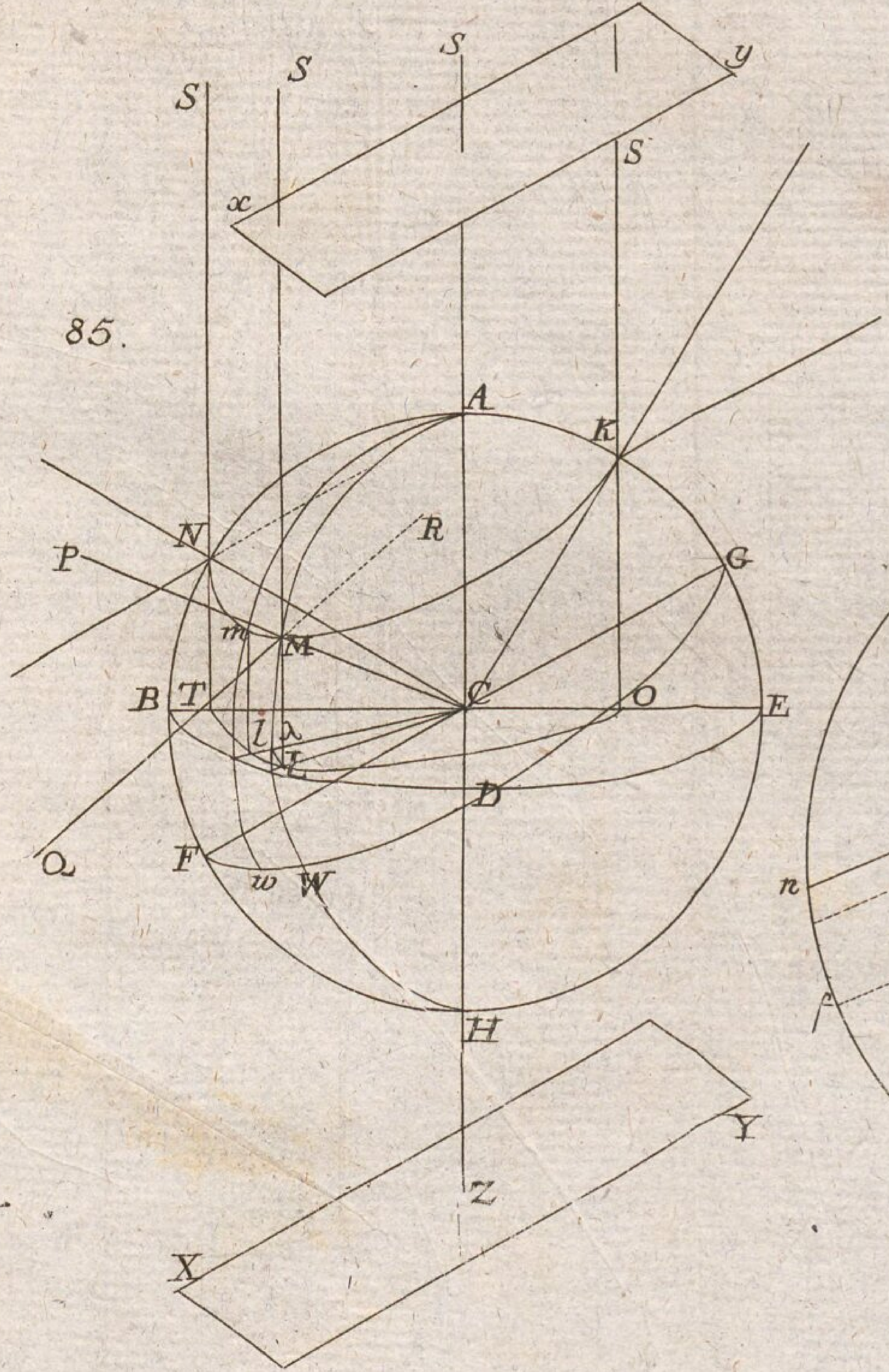

70.
71.
72.
73.


74.
75.
76.
77.
78.
79.

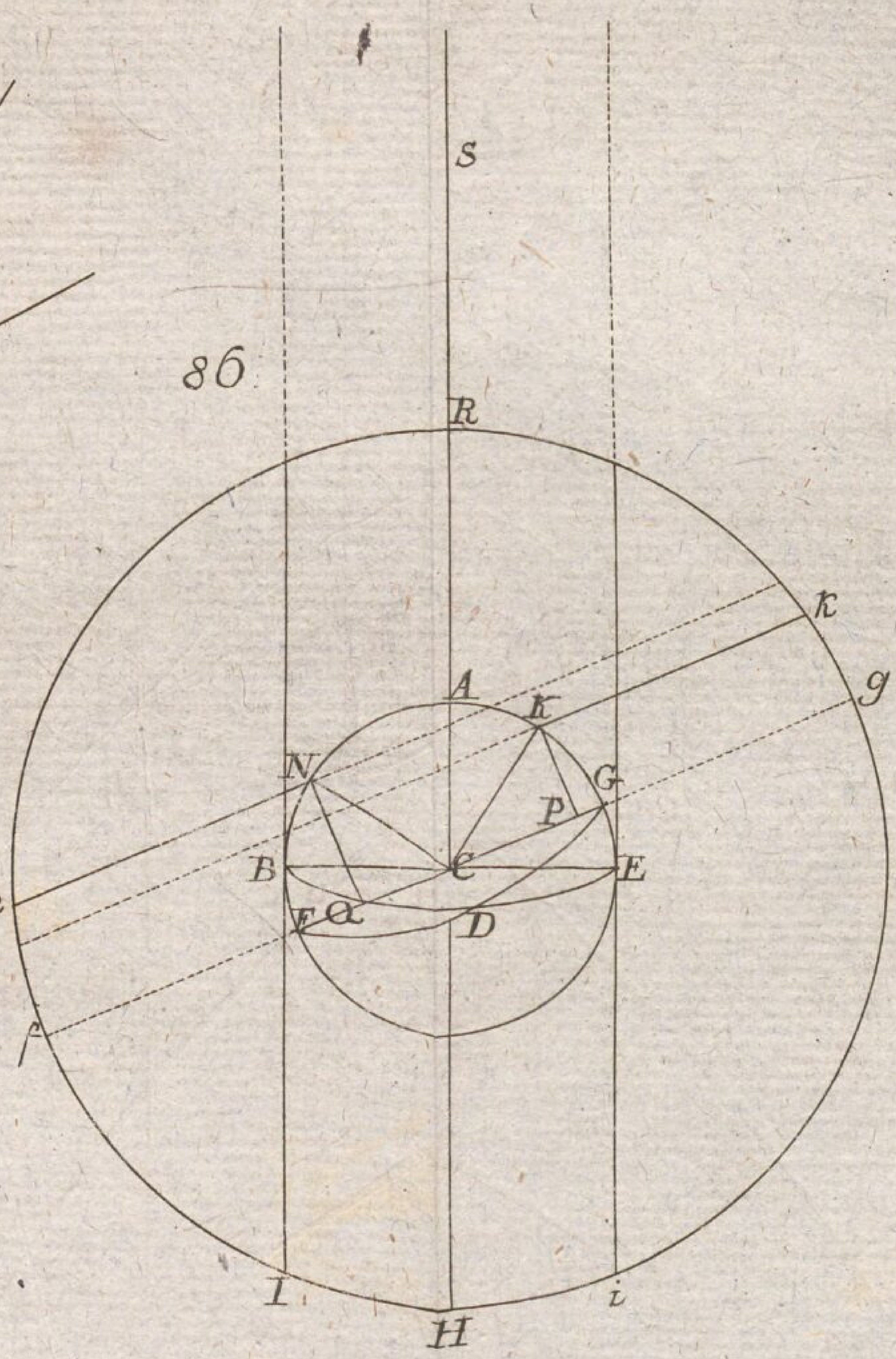


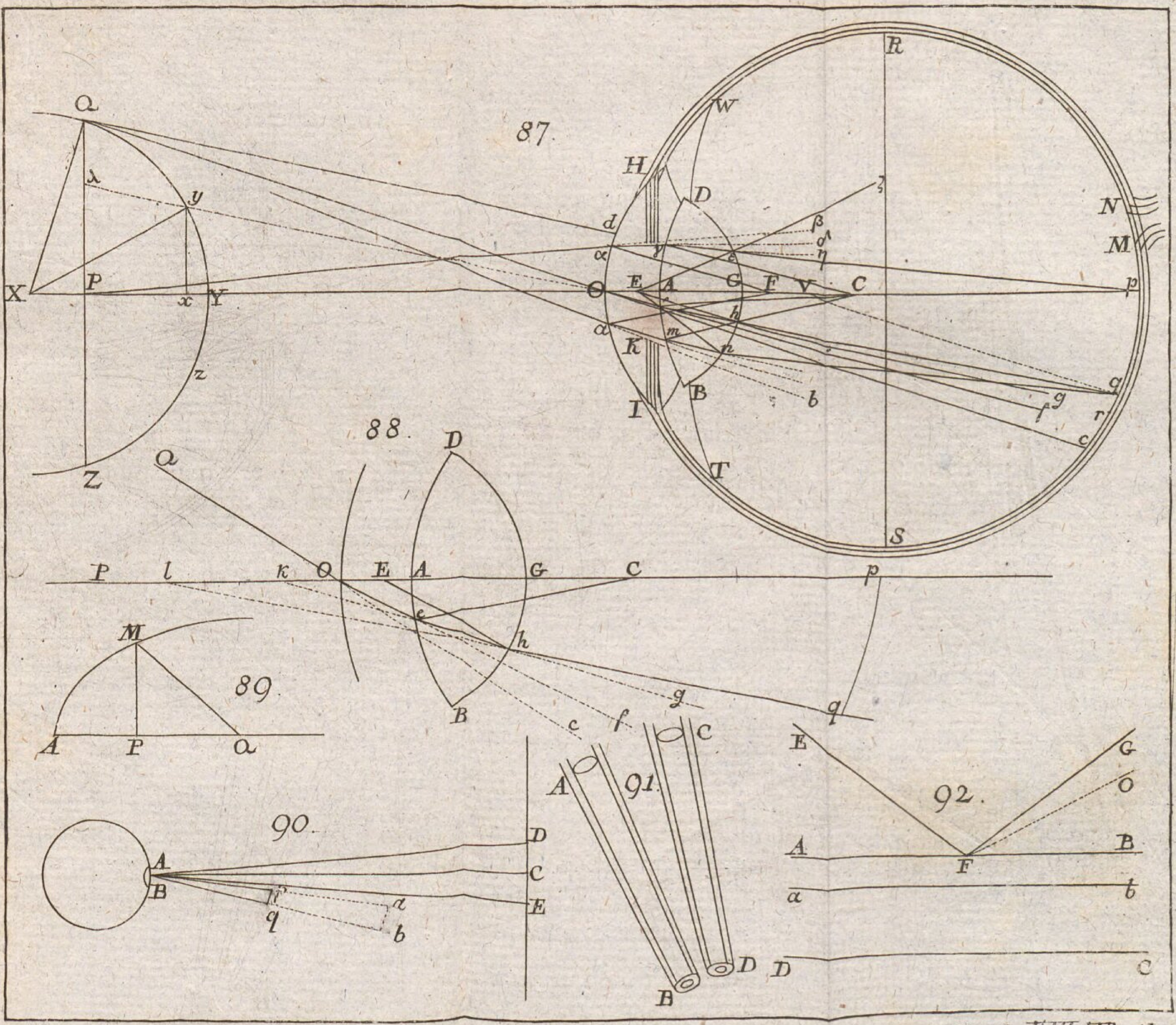
80.
Q
P
R
D
E
A
K
C
G
g
B
r
p
q
81.
Q
P
R
h
q
p
r
D
K
B
i
s
e
π
C
k
f
t
l
83.
G
D
H
R
S
C
F
E
82.
N
P
M
A
K
B
d
c
h
e
m
p
n
G
D
H
C
F
E
I
β
α
ν
π
μ
84.
N
P
M
A
K
B
d
f
α
c
β
h
e
μ
π
ν
m
p
n

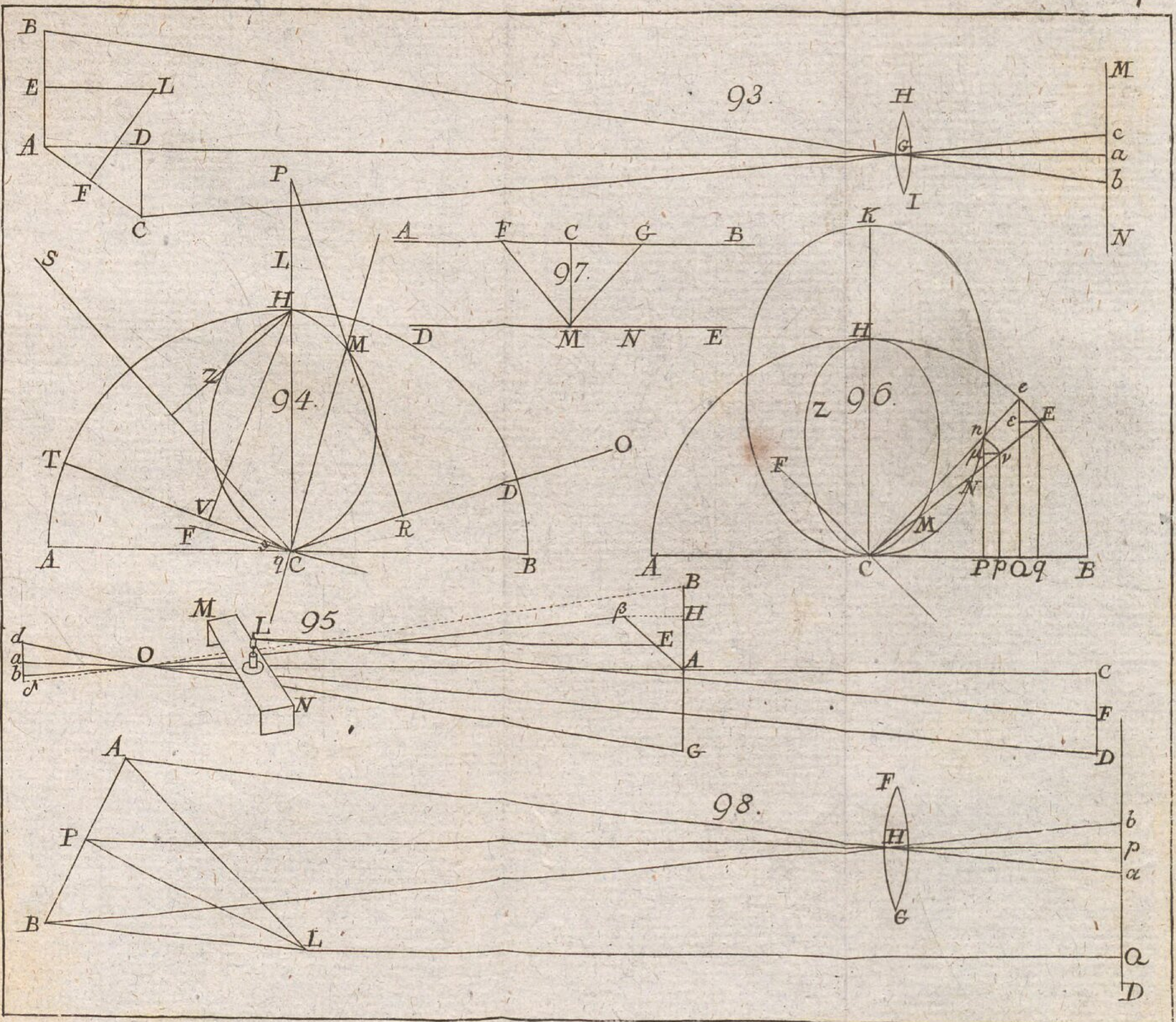
85.

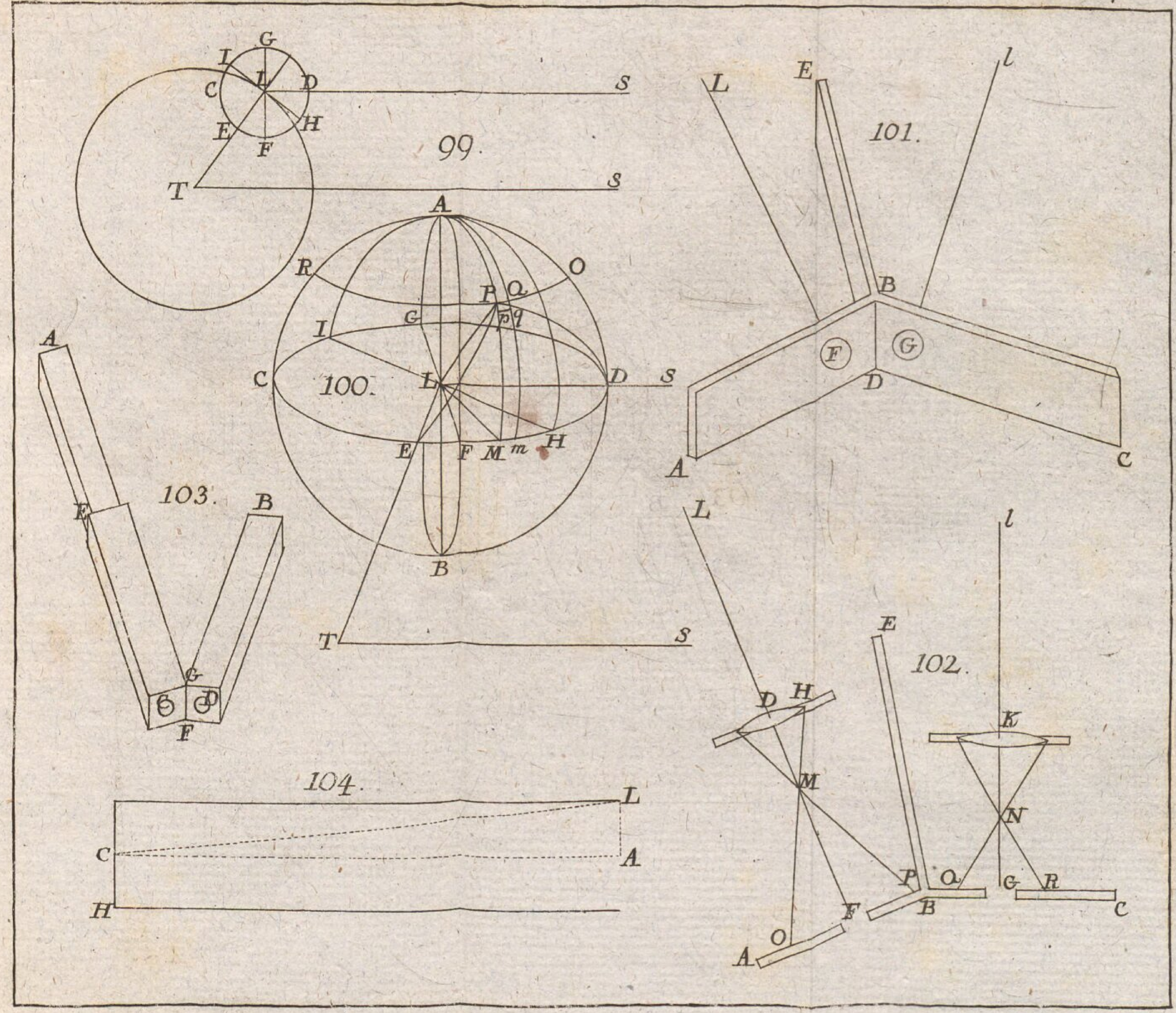

S
S
S
S
y
x
A
K
N
R
P
G
m
M
B
T
C
O
E
l
λ
L
D
F
w
W
Q
H
Y
Z
X

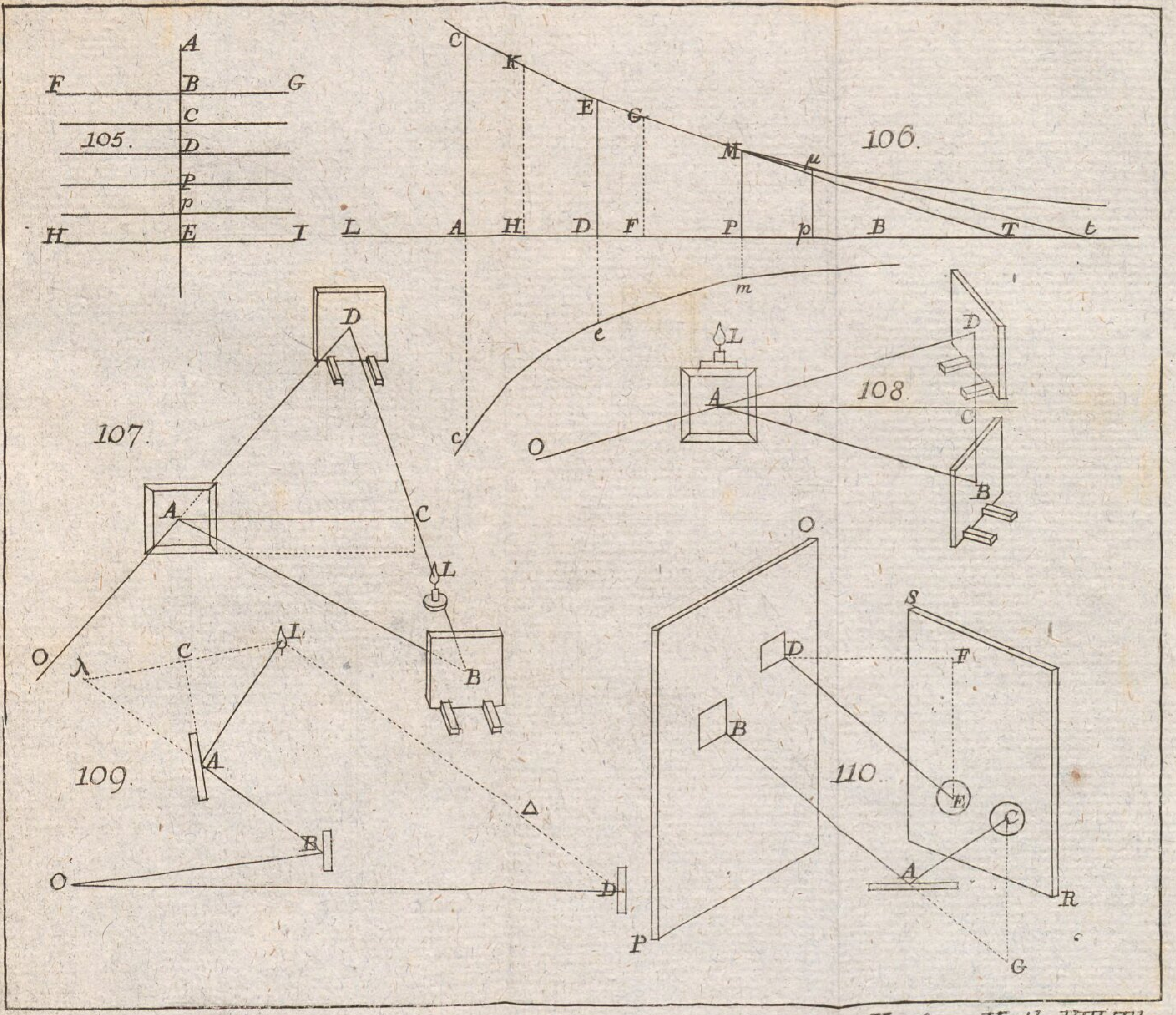
86.

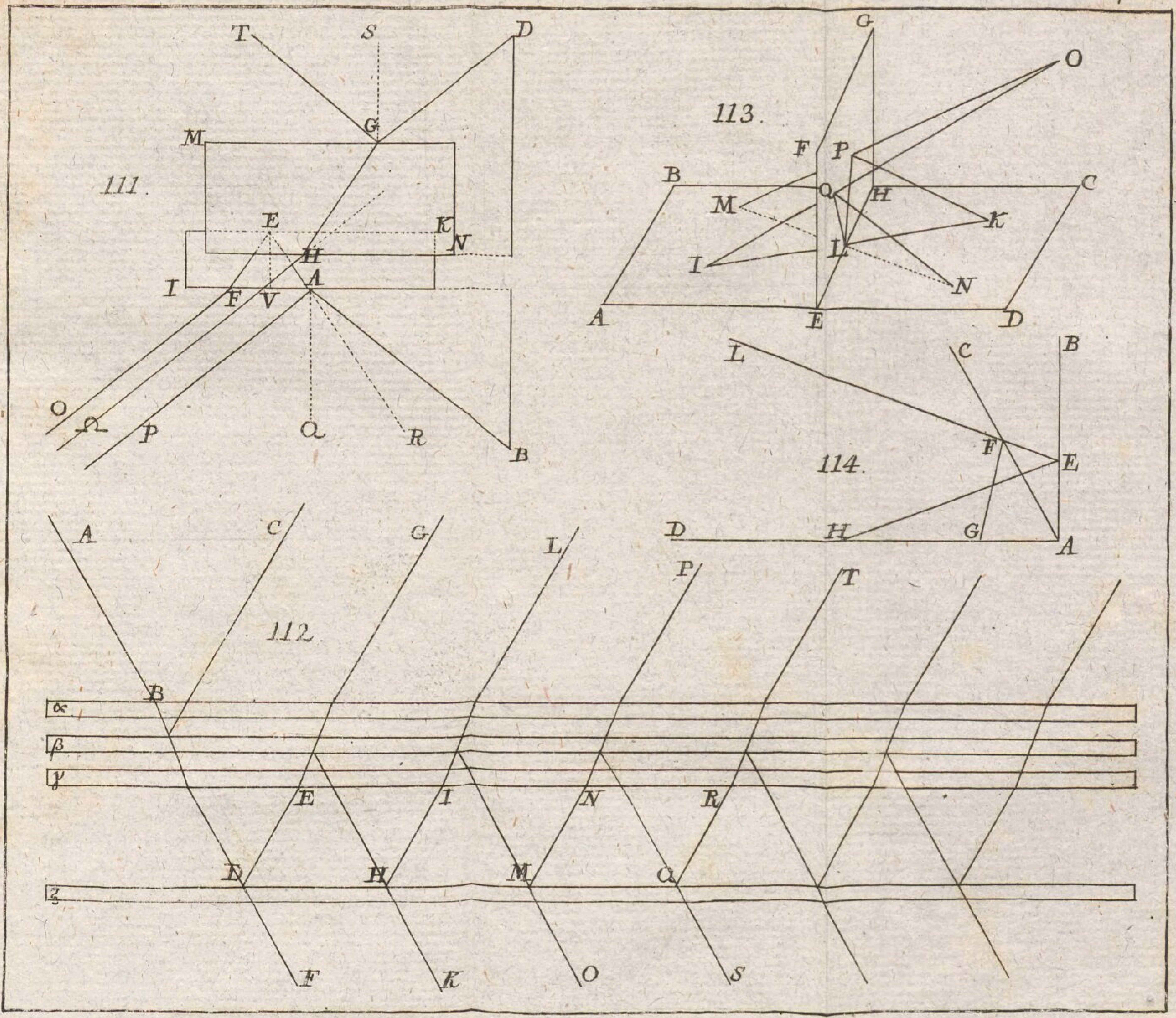

S
R
k
g
A
K
N
G
P
B
C
E
n
F
Q
D
f
I
H
i

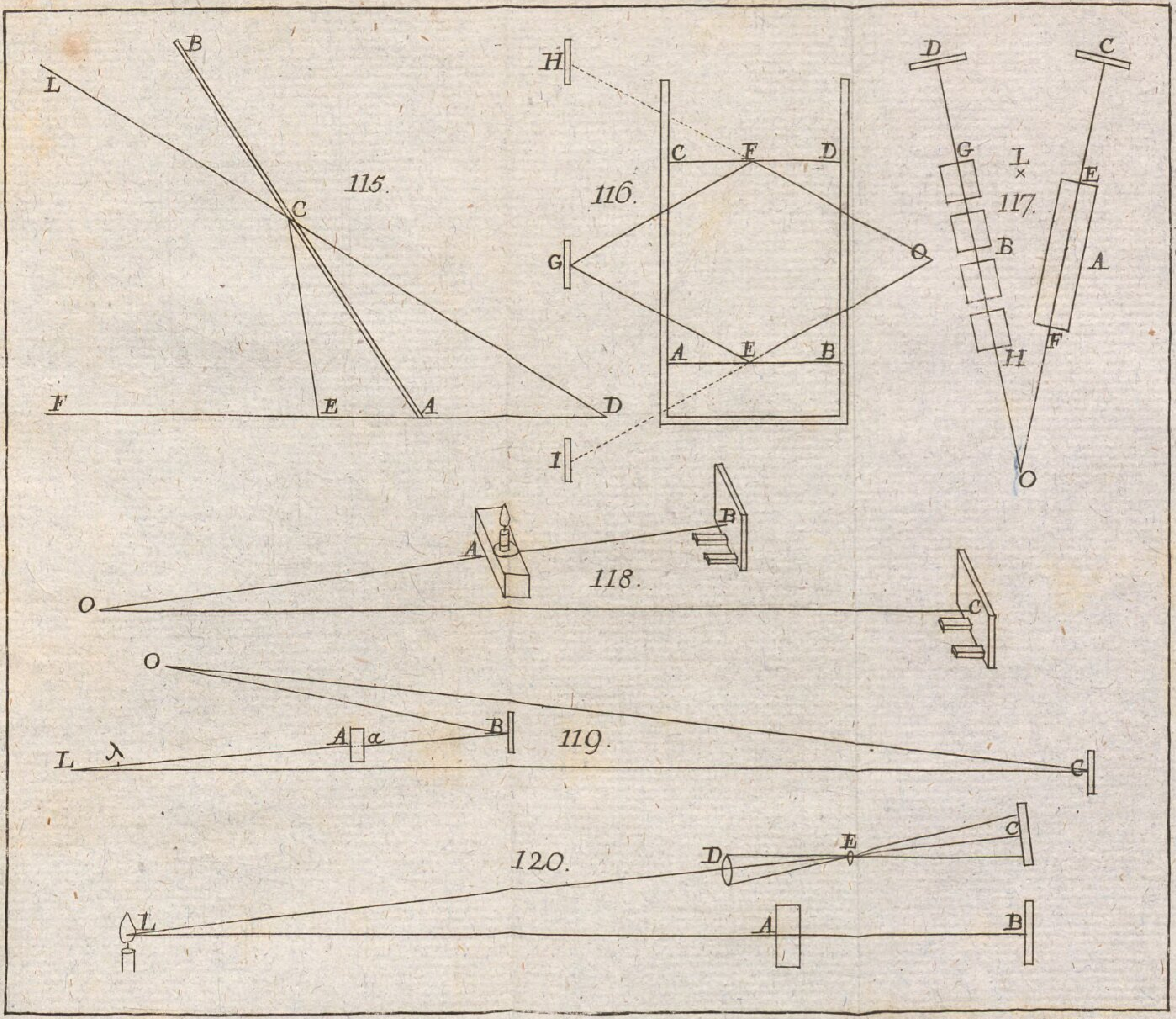

87.
88.
89.
90.
91.
92.

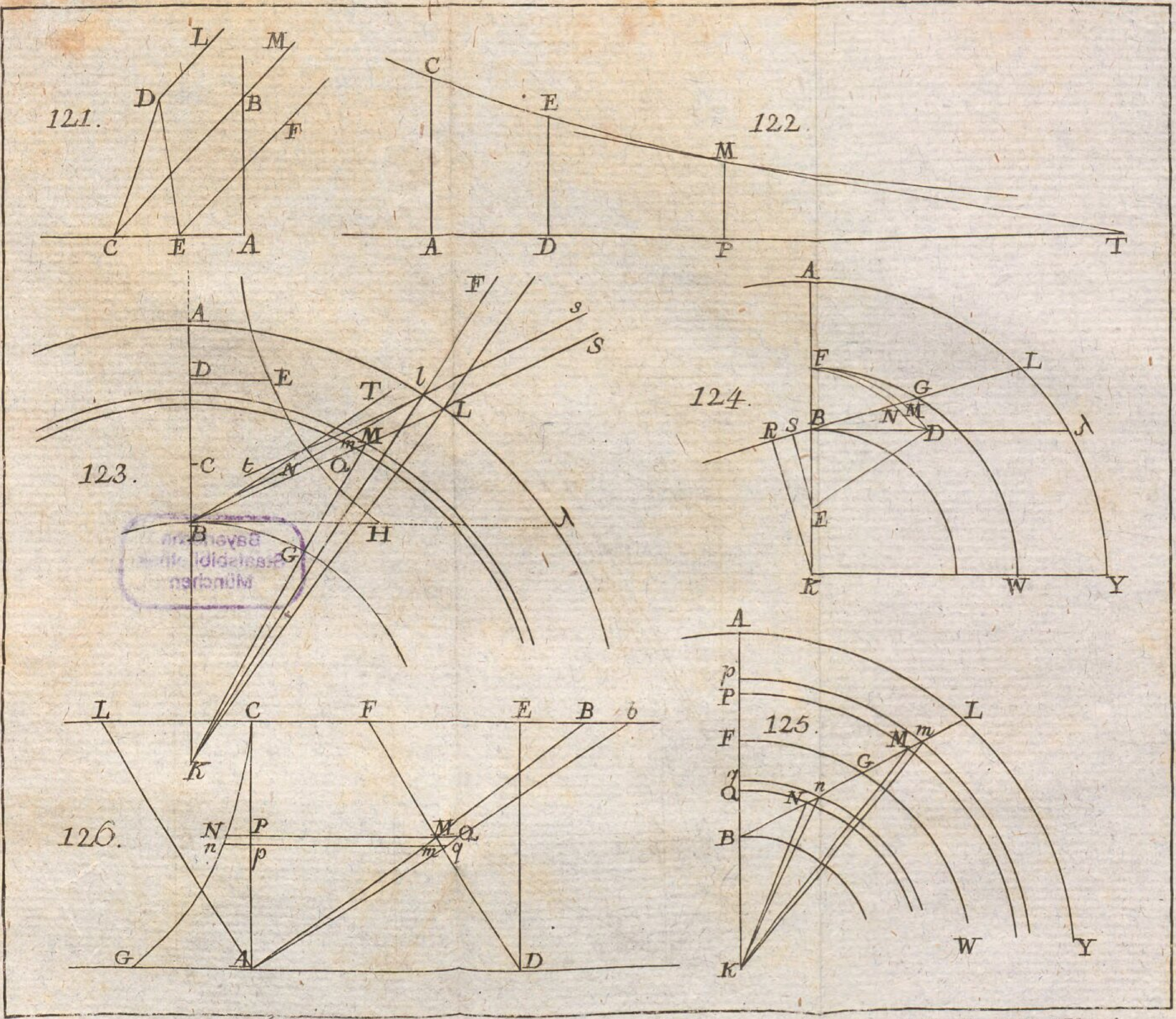

93.
B
E
L
A
D
F
C
H
G
I
M
c
a
b
N
94.
P
L
S
H
M
Z
T
V
F
R
D
O
A
C
B
97.
A
F
C
G
B
D
M
N
E
96.
K
H
Z
F
M
N
e
E
n
P
p
Q
q
95.
M
L
d
a
b
O
N
β
E
H
C
F
G
D
98.
A
P
B
L
F
H
G
b
p
a
Q
D


99.
100.
101.
102.
103.
104.


105.
A
F B G
C
D
P
p
H E I
106.
C
K
E G
M μ
L A H D F P p B T t
m
e
c
107.
D
A
C
L
B
O
108.
L
A
D
C
B
O
109.
L
C
λ
A
B
Δ
O
D
110.
O
S
D
F
B
E
C
A
R
P
G


111.
112.
113.
114.


115.
116.
117.
118.
119.
120.


121.
L M D B F C E A
122.
C E M A D P T
123.
A D E T l L s S F M m C t N O B H G K
124.
A F L G B N M R S D E K W Y
125.
A p P F q Q B L M m G N n K W Y
126.
L C F E B b N P n p M Q m q G A D

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Karsten, Wenceslaus Johann Gustav,

Lehrbegrif der gesamten Mathematik

Bd.: 8

Greifswald 1777

Math.u. 88-8
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594019-4
VD18 80340466-001